

ALEXANDER GROTHENDIECK

Éléments de géométrie algébrique (rédigés avec la collaboration de Jean Dieudonné) : IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas, Troisième partie

Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 28 (1966), p. 5-255.

http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1966__28__5_0

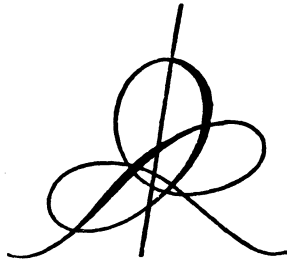
© Publications mathématiques de l'I.H.É.S., 1966, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Publications mathématiques de l'I.H.É.S. » (<http://www.ihes.fr/IHES/Publications/Publications.html>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

INSTITUT
DES HAUTES ÉTUDES
SCIENTIFIQUES



ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE ALGÈBRE

par A. GROTHENDIECK

Rédigés avec la collaboration de J. DIEUDONNÉ

IV

ÉTUDE LOCALE DES SCHÉMAS
ET DES MORPHISMES DE SCHÉMAS

(Troisième Partie)

1966

PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES, N° 28

LE BOIS-MARIE — BURES-SUR-YVETTE (S.-et.-O.)

DÉPOT LÉGAL

1^{re} édition 1^{er} trimestre 1966

TOUS DROITS

réservés pour tous pays

© 1966, *Institut des Hautes Études Scientifiques*

ÉTUDE LOCALE DES SCHÉMAS ET DES MORPHISMES DE SCHÉMAS

§ 8. LIMITES PROJECTIVES DE PRÉSCHÉMAS

8.1. Introduction.

(8.1.1) Dans ce paragraphe, nous allons étudier systématiquement la situation suivante. Soient I un ensemble préordonné filtrant croissant, $(A_\lambda, \varphi_{\mu\lambda})$ un système inductif d'anneaux ayant I pour ensemble d'indices, $A = \varinjlim A_\lambda$ sa limite inductive. Pour tout $\alpha \in I$ et tout A_α -préschéma X_α , considérons les A_λ -préschémas $X_\lambda = X_\alpha \otimes_{A_\alpha} A_\lambda$ pour $\lambda \geq \alpha$, et le A -préschéma $X = X_\alpha \otimes_{A_\alpha} A$; il est clair que les préschémas X_λ (pour $\lambda \geq \alpha$) forment un *système projectif*, et on verra (8.2.5) que X est une *limite projective* de ce système dans la catégorie des préschémas. Nous nous proposons de trouver des conditions sur X_α ou sur les A_λ permettant de démontrer des propriétés du type suivant : pour que X possède une propriété P (par exemple, la propriété d'être propre sur $S = \text{Spec}(A)$, ou irréductible, ou connexe, etc.), il faut et il suffit qu'il existe un indice $\mu \geq \alpha$ tel que, pour tout $\lambda \geq \mu$, X_λ ait (par rapport à $S_\lambda = \text{Spec}(A_\lambda)$, le cas échéant), la même propriété P . Nous obtiendrons des énoncés analogues pour des propriétés de \mathcal{O}_X -Modules, de A -morphisms de A -préschémas, etc. Nous montrerons également (8.9.1) que la donnée d'un A -préschéma de présentation finie (1.6.1) équivaut essentiellement à la donnée d'un A_λ -préschéma de présentation finie X_λ pour un λ assez grand, X étant alors *isomorphe* à $X_\lambda \otimes_{A_\lambda} A$. On a aussi des énoncés analogues pour les \mathcal{O}_X -Modules de présentation finie, leurs homomorphismes, les A -morphisms de A -préschémas de présentation finie, etc.

(8.1.2) L'utilité de tels résultats apparaîtra par exemple dans les questions suivantes :

a) Soient Y un préschéma, y un point de Y , (U_λ) le système projectif filtrant décroissant des voisinages ouverts affines de y dans Y ; si A_λ est l'anneau de U_λ , les A_λ forment un système inductif filtrant croissant, dont la limite inductive A est l'anneau local \mathcal{O}_y ; d'ailleurs, si on désigne par \mathfrak{p}_λ l'idéal premier \mathfrak{i}_y dans l'anneau A_λ , le système inductif (A_λ) est cofinal à tout système inductif $(A_\alpha)_f$, où f parcourt $A_\alpha - \mathfrak{p}_\alpha$ (pour un α fixé), car les $D(f)$ forment un système fondamental de voisinages de y dans U_α ,

donc dans Y . Les résultats du présent paragraphe impliqueront que la géométrie algébrique des \mathcal{O}_y -préschémas de présentation finie (et la théorie des Modules de présentation finie sur ces préschémas) est essentiellement équivalente à la géométrie algébrique des préschémas de présentation finie sur des voisinages ouverts « assez petits » de y . Ainsi, l'énoncé (8.10.5, (xii)) implique que si un morphisme $f: X \rightarrow Y$ est de présentation finie, alors, pour que $X \times_Y \text{Spec}(\mathcal{O}_y)$ soit propre sur $\text{Spec}(\mathcal{O}_y)$, il faut et il suffit qu'il existe un voisinage ouvert U de y dans Y tel que $f^{-1}(U)$ soit propre sur U .

Un cas particulièrement important, et dans une certaine mesure classique, est celui où Y est intègre et où y est son point générique, de sorte que \mathcal{O}_y n'est autre que le corps $R(Y) = K$ des fonctions rationnelles sur Y . Les résultats du présent paragraphe reviennent alors à interpréter la géométrie algébrique sur K en termes de la géométrie algébrique au-dessus d'ouverts non vides « assez petits » de Y , c'est-à-dire, intuitivement, en termes de « familles » d'objets géométriques indexées par les points d'un tel ouvert. Ce point de vue a d'ailleurs été couramment utilisé depuis longtemps, non seulement en Géométrie algébrique sur des corps algébriquement clos, mais aussi dans l'étude arithmétique des variétés définies sur un corps de nombres K (extension finie de \mathbf{Q}), en considérant ce dernier comme le corps des fractions de son anneau des entiers A (« théorie de la réduction modulo p » (p idéal premier de A); cf. (I, 3.7)). Les résultats des §§ 8 et 9 fournissent donc entre autres des fondements du langage de la « réduction modulo p » en arithmétique.

On notera que dans l'exemple envisagé ici, les morphismes $S_\mu \rightarrow S_\lambda$ (pour $\lambda \leq \mu$) sont les immersions ouvertes canoniques $U_\mu \rightarrow U_\lambda$, et *a fortiori* sont des morphismes plats (mais non fidèlement plats en général), ce qui explique l'intérêt des énoncés qui font appel à une telle restriction.

b) Supposons que les A_λ soient des corps, de sorte que $A = \varinjlim A_\lambda$ est aussi un corps. Ce cas se présente généralement lorsqu'on part de données géométriques au-dessus d'un corps quelconque K , que l'on considère comme extension d'un corps k (par exemple le sous-corps premier de K). Il y a alors intérêt à considérer K comme limite inductive de ses sous-extensions qui sont de type fini sur k , ce qui permet dans de nombreuses questions de se ramener au cas où K est une extension de type fini de k . Utilisant aussi la méthode esquissée dans *a)*, on peut alors se ramener généralement au cas d'un anneau de base A qui est une algèbre intègre de type fini sur k .

On notera que dans cet exemple, les morphismes $S_\mu \rightarrow S_\lambda$ sont fidèlement plats.

c) Supposons qu'on s'intéresse aux propriétés, locales sur Y , des préschémas de présentation finie au-dessus d'un préschéma quelconque Y , que l'on peut dès lors supposer affine d'anneau A . Il y a alors intérêt à considérer A comme limite inductive de ses sous-anneaux qui sont des \mathbf{Z} -algèbres de type fini, ce qui permet de ramener de nombreuses questions au cas où Y est le spectre d'une telle algèbre. C'est là l'explicitation du « point de vue kroneckérien » suivant lequel la Géométrie algébrique se réduit à la Géométrie algébrique des préschémas de type fini sur \mathbf{Z} (que l'on qualifie parfois de

« Géométrie algébrique absolue »). Cet exemple nous montre en particulier que dans la plupart des questions « relatives » sur un préschéma de base Y , on peut se ramener au cas où Y est *noethérien*.

On notera que dans cet exemple, au contraire des précédents, les morphismes $S_\mu \rightarrow S_\lambda$ n'ont en général aucune propriété particulière de régularité.

Par la suite, quand nous appliquerons les résultats qui vont suivre à l'une quelconque des trois situations particulières qui viennent d'être décrites, nous nous dispenserons de reprendre en détail le procédé qui permet de faire ces applications, nous contentant de renvoyer à ce qui précède.

(8.1.3) Dans l'exemple *a*) de (8.1.2), nous avons vu que si Y est un préschéma intègre de point générique y , $f: X \rightarrow Y$ un morphisme de présentation finie, alors, si la fibre générique $f^{-1}(y)$ est propre sur $k(y)$, il y a un voisinage ouvert U de y tel que $f^{-1}(U)$ soit propre sur U ; il en résulte *a fortiori* que pour tout $s \in U$, $f^{-1}(s)$ est propre sur $k(s)$. Il arrive qu'on ait besoin d'une réciproque, assurant que si $f^{-1}(s)$ est propre sur $k(s)$ pour « suffisamment » de points $s \in U$, alors $f^{-1}(y)$ est propre sur $k(y)$. Par exemple, supposons que X et Y soient des préschémas algébriques sur un corps k algébriquement clos (on peut prendre pour k le corps \mathbf{C} des nombres complexes, pour fixer les idées); on a parfois besoin de savoir que si, pour tout $s \in Y$, *rationnel sur k* , la fibre $f^{-1}(s)$ est propre sur $k(s)$, alors $f^{-1}(y)$ est propre sur $k(y)$, et par suite $f^{-1}(U)$ est propre sur U pour un voisinage U de y ⁽¹⁾. Or cet énoncé résultera aisément du suivant : l'ensemble E des points $s \in Y$ tels que $f^{-1}(s)$ soit propre sur $k(s)$ est *constructible* (et par conséquent identique à Y tout entier s'il contient les points fermés de Y , grâce au théorème des zéros de Hilbert (10.4.8)); cela équivaut encore à dire que si $f^{-1}(y)$ n'est pas propre sur $k(y)$, alors il existe un voisinage ouvert U de y tel que $f^{-1}(s)$ ne soit pas propre sur $k(s)$ pour tout $s \in U$ (cf. (9.6.1, (iv))). Cet exemple illustre l'intérêt qu'il y a à développer systématiquement des *critères de constructibilité* pour les notions les plus importantes : c'est ce qui sera fait au § 9.

8.2. Limites projectives de préschémas.

(8.2.1) Soient S_0 un espace annelé, L un ensemble préordonné filtrant croissant, $(\mathcal{A}_\lambda, \varphi_{\mu\lambda})$ un système inductif de \mathcal{O}_{S_0} -Algèbres (non nécessairement commutatives), ayant L pour ensemble d'indices. On sait que, considéré comme système inductif de \mathcal{O}_{S_0} -Modules, $(\mathcal{A}_\lambda, \varphi_{\mu\lambda})$ admet une limite inductive \mathcal{A} ; désignons par $\varphi_\lambda: \mathcal{A}_\lambda \rightarrow \mathcal{A}$ l'homomorphisme canonique (de \mathcal{O}_{S_0} -Modules). Soit $m_\lambda: \mathcal{A}_\lambda \otimes \mathcal{A}_\lambda \rightarrow \mathcal{A}_\lambda$ l'homomorphisme de \mathcal{O}_{S_0} -Modules qui définit la multiplication dans la \mathcal{O}_{S_0} -Algèbre \mathcal{A}_λ ; l'hypothèse sur les $\varphi_{\mu\lambda}$ entraîne que les m_λ forment un système inductif d'homomorphismes,

⁽¹⁾ On notera qu'un tel énoncé est en fin de compte purement géométrique, en ce sens qu'il ne fait appel qu'à des points rationnels sur k , et non à des points génériques; par exemple, lorsque $k = \mathbf{C}$, cet énoncé a une signification topologique évidente pour l'analyste, en interprétant « propre » au sens topologique du terme, pour les espaces sous-jacents aux espaces analytiques formés des points de X et Y rationnels sur \mathbf{C} .

et comme le foncteur \varinjlim commute au produit tensoriel, $m = \varinjlim m_\lambda$ est un homomorphisme $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ de \mathcal{O}_{S_0} -Modules; par passage à la limite sur les diagrammes commutatifs exprimant l'associativité de m_λ et l'existence de la section unité dans \mathcal{A}_λ , on voit que m définit sur \mathcal{A} une structure de \mathcal{O}_{S_0} -Algèbre et que φ_λ est un homomorphisme de \mathcal{O}_{S_0} -Algèbres pour tout $\lambda \in L$. En outre \mathcal{A} est limite inductive du système $(\mathcal{A}_\lambda, \varphi_{\mu\lambda})$ dans la catégorie des \mathcal{O}_{S_0} -Algèbres, autrement dit, pour toute \mathcal{O}_{S_0} -Algèbre \mathcal{B} , l'application canonique

$$(8.2.1.1) \quad \text{Hom}_{\mathcal{O}_{S_0}\text{-Alg.}}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \rightarrow \varprojlim_{\lambda} \text{Hom}_{\mathcal{O}_{S_0}\text{-Alg.}}(\mathcal{A}_\lambda, \mathcal{B})$$

qui à tout homomorphisme $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ de \mathcal{O}_{S_0} -Algèbres, fait correspondre la famille $(f \circ \varphi_\lambda)$, est *bijective*. En effet, on sait déjà qu'elle est injective et identifie $\text{Hom}_{\mathcal{O}_{S_0}\text{-Alg.}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ à une partie de $\varprojlim_{\lambda} \text{Hom}_{\mathcal{O}_{S_0}\text{-Mod.}}(\mathcal{A}_\lambda, \mathcal{B})$; tout revient à voir que si (f_λ) est un système inductif d'homomorphismes de \mathcal{O}_{S_0} -Algèbres, $f_\lambda : \mathcal{A}_\lambda \rightarrow \mathcal{B}$, sa limite inductive $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, qui est par définition un homomorphisme de \mathcal{O}_{S_0} -Modules, est aussi un homomorphisme de \mathcal{O}_{S_0} -Algèbres; mais cela résulte du passage à la limite inductive dans le diagramme commutatif d'homomorphismes de \mathcal{O}_{S_0} -Modules

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_\lambda \otimes \mathcal{A}_\lambda & \xrightarrow{t_\lambda \otimes t_\lambda} & \mathcal{B} \otimes \mathcal{B} \\ \downarrow m_\lambda & & \downarrow \\ \mathcal{A}_\lambda & \xrightarrow{t_\lambda} & \mathcal{B} \end{array}$$

et du fait que le foncteur \varinjlim commute aux produits tensoriels.

On notera enfin que si les \mathcal{A}_λ sont des \mathcal{O}_{S_0} -Algèbres commutatives, il en est de même de \mathcal{A} .

(8.2.2) Supposons maintenant que S_0 soit un *préschéma*, et que les \mathcal{A}_λ soient des \mathcal{O}_{S_0} -Algèbres (commutatives) *quasi-cohérentes*; on sait alors que $\mathcal{A} = \varinjlim \mathcal{A}_\lambda$ est une \mathcal{O}_{S_0} -Algèbre quasi-cohérente (I, 4.1.1). Désignons par S_λ (resp. S) le spectre de la \mathcal{O}_{S_0} -Algèbre \mathcal{A}_λ (resp. \mathcal{A}) (II, 1.3.1), et soient $u_{\lambda\mu} : S_\mu \rightarrow S_\lambda$ (pour $\lambda \leq \mu$) et $u_\lambda : S \rightarrow S_\lambda$ les S_0 -morphisms correspondant aux homomorphismes $\varphi_{\mu\lambda}$ et φ_λ respectivement (II, 1.2.7); il est clair que $(S_\lambda, u_{\lambda\mu})$ est un *système projectif* dans la catégorie des S_0 -préschémas. On notera que les $u_{\lambda\mu}$ et u_λ sont des morphismes *affines* (II, 1.6.2), donc *quasi-compacts* et *séparés*.

Proposition (8.2.3). — Avec les notations de (8.2.2), les morphismes $u_\lambda : S \rightarrow S_\lambda$ font de S une limite projective du système projectif $(S_\lambda, u_{\lambda\mu})$ dans la catégorie des préschémas. En outre, si $h : S_0 \rightarrow T$ est un morphisme, faisant de tout S_0 -préschéma un T -préschéma, S est aussi limite projective du système $(S_\lambda, u_{\lambda\mu})$ dans la catégorie des T -préschémas.

Prouvons d'abord la seconde assertion de l'énoncé dans le cas $T = S_0$.

Tout revient à démontrer que si X est un S_0 -préschéma quelconque, l'application canonique

$$(8.2.3.1) \quad \text{Hom}_{S_0}(X, S) \rightarrow \varprojlim_{\lambda} \text{Hom}_{S_0}(X, S_{\lambda})$$

qui à tout S_0 -morphisme $v : X \rightarrow S$ fait correspondre la famille $(u_{\lambda} \circ v)$, est *bijective*. Or, si $g : X \rightarrow S_0$ est le morphisme structural et si on pose $\mathcal{B} = g_*(\mathcal{O}_X)$, qui est une \mathcal{O}_{S_0} -Algèbre, l'application (8.2.3.1) s'identifie canoniquement à (8.2.1.1) (II, 1.2.7), et la conclusion résulte donc de ce qu'on a vu dans (8.2.1).

Les autres assertions de (8.2.3) sont conséquences du lemme général suivant :

Lemme (8.2.4). — *Soient \mathcal{C} une catégorie, T un objet de \mathcal{C} , \mathcal{C}_T la sous-catégorie des objets de \mathcal{C} au-dessus de T . Soit $(S_{\lambda}, u_{\lambda\mu})$ un système projectif dans \mathcal{C}_T ; alors toute limite projective de ce système dans \mathcal{C}_T est aussi limite projective dans \mathcal{C} , et réciproquement.*

Soit $f_{\lambda} : S_{\lambda} \rightarrow T$ le morphisme structural. Supposons que S soit limite projective de $(S_{\lambda}, u_{\lambda\mu})$ dans \mathcal{C} , et désignons par $u_{\lambda} : S \rightarrow S_{\lambda}$ les morphismes canoniques correspondants. Considérons alors un système projectif de T -morphisms $w_{\lambda} : Y \rightarrow S_{\lambda}$, où $Y \in \mathcal{C}_T$. Il existe par hypothèse un morphisme unique (dans \mathcal{C}) $w : Y \rightarrow S$ tel que $w_{\lambda} = u_{\lambda} \circ w$ pour tout λ . L'hypothèse que les u_{λ} sont des T -morphisms entraîne que les morphismes $f_{\lambda} \circ u_{\lambda} : S \rightarrow T$ sont tous les mêmes, et ce morphisme f fait donc de S un T -objet. Si $g : Y \rightarrow T$ est le morphisme structural de Y , on a alors $f \circ w = f_{\lambda} \circ u_{\lambda} \circ w = f_{\lambda} \circ w_{\lambda} = g$ pour tout λ , ce qui prouve que w est un T -morphisme. Inversement, supposons (avec les mêmes notations) que S soit limite projective de $(S_{\lambda}, u_{\lambda\mu})$ dans \mathcal{C}_T , et considérons maintenant un système projectif de morphismes (de \mathcal{C}) $w_{\lambda} : Y \rightarrow S_{\lambda}$. Les morphismes composés $f_{\lambda} \circ w_{\lambda} : Y \rightarrow T$ sont alors tous les mêmes : en effet, pour deux indices quelconques λ, μ , il y a un indice ν tel que $\lambda \leq \nu$ et $\mu \leq \nu$, d'où $f_{\nu} = f_{\lambda} \circ u_{\lambda\nu} = f_{\mu} \circ u_{\mu\nu}$; comme $w_{\lambda} = u_{\lambda\nu} \circ w_{\nu}$, et $w_{\mu} = u_{\mu\nu} \circ w_{\nu}$, on a $f_{\lambda} \circ w_{\lambda} = f_{\lambda} \circ u_{\lambda\nu} \circ w_{\nu} = f_{\nu} \circ w_{\nu}$, et on voit de même que $f_{\mu} \circ w_{\mu} = f_{\nu} \circ w_{\nu}$. Si $g : Y \rightarrow T$ est l'unique morphisme ainsi défini, g fait de Y un T -objet, et les w_{λ} sont alors des T -morphisms ; ils ont par suite une limite projective $w : Y \rightarrow S$ qui est un T -morphisme, et *a fortiori* un morphisme de \mathcal{C} ; d'ailleurs la première partie du raisonnement montre que toute limite projective w' (dans \mathcal{C}) du système projectif (w_{λ}) est nécessairement aussi un T -morphisme, donc égale à w , ce qui achève de prouver le lemme.

Proposition (8.2.5). — *Sous les conditions de (8.2.2), soient α un élément de L , X_{α} un S_{α} -préschéma. Pour tout $\lambda \geq \alpha$, posons $X_{\lambda} = X_{\alpha} \times_{S_{\alpha}} S_{\lambda}$, et pour $\alpha \leq \lambda \leq \mu$, posons $v_{\lambda\mu} = 1_{X_{\alpha}} \times u_{\lambda\mu}$, de sorte que $(X_{\lambda}, v_{\lambda\mu})$ est un système projectif de X_{α} -préschémas, dont l'ensemble d'indices est formé des $\lambda \geq \alpha$ dans L . Posons de même $X = X_{\alpha} \times_{S_{\alpha}} S$ et $v_{\lambda} = 1_{X_{\alpha}} \times u_{\lambda}$. Alors les X_{α} -morphisms $v_{\lambda} : X \rightarrow X_{\lambda}$ font de X une limite projective du système projectif $(X_{\lambda}, v_{\lambda\mu})$ dans la catégorie des X_{α} -préschémas, ou dans la catégorie de tous les préschémas.*

Cela résultera encore du lemme général suivant :

Lemme (8.2.6). — *Soient \mathcal{C} une catégorie dans laquelle les produits fibrés existent, $q : T' \rightarrow T$ un morphisme de \mathcal{C} , \mathcal{C}_T (resp. $\mathcal{C}_{T'}$) la catégorie des objets de \mathcal{C} au-dessus*

de T (resp. T'). Soit $(S_\lambda, u_{\lambda\mu})$ un système projectif (non nécessairement filtrant) dans \mathcal{C}_T , et posons $S'_\lambda = S_\lambda \times_T T'$, $u'_{\lambda\mu} = u_{\lambda\mu} \times_{I_{T'}}$, de sorte que $(S'_\lambda, u'_{\lambda\mu})$ est un système projectif dans $\mathcal{C}_{T'}$. Alors, si (S, u_λ) est une limite projective de $(S_\lambda, u_{\lambda\mu})$ dans \mathcal{C}_T , $(S \times_T T', u_\lambda \times_{I_{T'}})$ est une limite projective de $(S'_\lambda, u'_{\lambda\mu})$ dans $\mathcal{C}_{T'}$.

On a par hypothèse, pour tout λ , un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} S' & \xrightarrow{u'_\lambda} & S'_\lambda & \xrightarrow{h'_\lambda} & T' \\ p \downarrow & & p_\lambda \downarrow & & \downarrow q \\ S & \xrightarrow{u_\lambda} & S_\lambda & \xrightarrow{h_\lambda} & T \end{array}$$

où l'on a posé $S' = S \times_T T'$, $u'_\lambda = u_\lambda \times_{I_{T'}}$, $h'_\lambda = h_\lambda \times_{I_{T'}}$. Soient Y un T' -objet, $g' : Y \rightarrow T'$ le morphisme correspondant, et considérons un système projectif de T' -morphisms $w'_\lambda : Y \rightarrow S'_\lambda$. Alors Y est un T -objet pour le morphisme $g = q \circ g'$, et les $w_\lambda = p_\lambda \circ w'_\lambda$ sont des T -morphisms puisque $h_\lambda \circ w_\lambda = h_\lambda \circ p_\lambda \circ w'_\lambda = q \circ h'_\lambda \circ w'_\lambda = q \circ g'$ par hypothèse. En outre, on vérifie aussitôt que (w_λ) est un système projectif. Il existe donc par hypothèse un T -morphisme $w : Y \rightarrow S$ et un seul tel que $u_\lambda \circ w = w_\lambda$ pour tout λ . Par définition du produit fibré, il y a un unique T' -morphisme $w' : Y \rightarrow S'$ tel que $p \circ w' = w$. On a alors $u_\lambda \circ p \circ w' = u_\lambda \circ w = w_\lambda = p_\lambda \circ w'_\lambda$, ce qui s'écrit aussi $p_\lambda \circ u'_\lambda \circ w' = p_\lambda \circ w'_\lambda$; d'autre part, en écrivant que w' est un T' -morphisme, il vient $h'_\lambda \circ u'_\lambda \circ w' = g' = h'_\lambda \circ w'_\lambda$. La définition de S'_λ comme produit fibré $S_\lambda \times_T T'$ donne donc $u'_\lambda \circ w' = w'_\lambda$, et il est immédiat que w' est l'unique T' -morphisme vérifiant ces relations, d'où le lemme.

Remarque (8.2.7). — Étant donné un espace annelé quelconque S , les limites inductives par rapport à un ensemble préordonné quelconque L (non nécessairement filtrant) existent dans la catégorie des \mathcal{O}_S -Algèbres commutatives, puisque la limite inductive filtrante existe d'après (8.2.1) et d'autre part, pour deux homomorphismes de \mathcal{O}_S -Algèbres $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$, le produit tensoriel $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{C}$ est la « somme amalgamée » correspondante dans cette catégorie.

Lorsque S est un préschéma, on sait que le produit tensoriel $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{C}$ est une \mathcal{O}_S -Algèbre quasi cohérente lorsqu'il en est ainsi de \mathcal{A} , \mathcal{B} et \mathcal{C} (I, 1.3.13); on en conclut que, dans la catégorie des \mathcal{O}_S -Algèbres quasi-cohérentes, les limites inductives pour un ensemble préordonné quelconque d'indices existent toujours. Cela permet de généraliser la définition d'une limite projective de préschémas et les prop. (8.2.3) et (8.2.5) au cas où l'ensemble préordonné L n'est pas nécessairement filtrant.

(8.2.8) Les notations étant celles de (8.2.2), posons $u_{\lambda\mu} = (\psi_{\lambda\mu}, \theta_{\lambda\mu})$ et $u_\lambda = (\psi_\lambda, \theta_\lambda)$; $(S_\lambda, \psi_{\lambda\mu})$ est donc un système projectif d'espaces topologiques et (ψ_λ) un système projectif d'applications continues $S \rightarrow S_\lambda$ des espaces sous-jacents respectivement aux préschémas S et S_λ .

Proposition (8.2.9). — Avec les notations de (8.2.8), la limite projective du système projectif (ψ_λ) d'applications continues est un homéomorphisme de l'espace sous-jacent à S sur la limite projective du système projectif $(S_\lambda, \psi_{\lambda\mu})$ d'espaces topologiques.

Soit T l'espace topologique limite du système $(S_\lambda, \psi_{\lambda\mu})$ et posons $\psi = \varprojlim \psi_\lambda : S \rightarrow T$. On peut se borner au cas où $S_0 = S_\alpha$ pour un $\alpha \in L$, et $\lambda \geq \alpha$.

(i) Montrons en premier lieu que la topologie de S est image réciproque par ψ de la topologie de T ; autrement dit, si $\pi_\lambda : T \rightarrow S_\lambda$ est l'application canonique, il faut montrer que tout ouvert de S est réunion d'ouverts de la forme $\psi^{-1}(\pi_\lambda^{-1}(U_\lambda))$, où U_λ est ouvert dans S_λ . Or tout ouvert de S est par définition réunion d'ouverts obtenus de la façon suivante : on considère un ouvert affine U_0 de S_0 , d'anneau A_0 , de sorte que $\psi_\alpha^{-1}(U_0)$ est l'ouvert affine de S d'anneau $A = \Gamma(U_0, \mathcal{A})$, puis on prend un élément $f \in A$ et on considère dans $\text{Spec}(A)$, identifié à $\psi_\alpha^{-1}(U_0)$, l'ouvert $D(f)$. Ce sont ces ouverts $D(f)$ qui forment une base de la topologie de S (II, 1.3.1). Or, si on pose $A_\lambda = \Gamma(U_0, \mathcal{A}_\lambda)$, on a $A = \varinjlim A_\lambda$ (I, 1.3.9), donc il existe un indice λ tel que f soit l'image canonique d'un élément $f_\lambda \in A_\lambda$; on a alors $D(f) = \psi_\lambda^{-1}(D(f_\lambda))$ (I, 1.2.2), et comme $\psi_\lambda = \pi_\lambda \circ \psi$, notre assertion est démontrée.

(ii) Prouvons maintenant que ψ est *bijective*, ce qui achèvera la démonstration. Comme S est un espace de Kolmogoroff, il résulte déjà de (i) que ψ est injective, et il reste donc à montrer que ψ est surjective. On peut évidemment remplacer pour cela T par un ouvert $\pi_\alpha^{-1}(U_0)$, où U_0 est ouvert affine dans $S_\alpha = S_0$, donc on peut se limiter au cas où les S_λ et S sont affines, autrement dit \mathcal{A}_λ est le faisceau associé à une A_0 -algèbre A_λ , et \mathcal{A} le faisceau d'algèbres associé à $A = \varinjlim A_\lambda$; nous noterons encore $\varphi_{\mu\lambda} : A_\lambda \rightarrow A_\mu$ et $\varphi_\lambda : A_\lambda \rightarrow A$ les homomorphismes canoniques. Par définition, un élément de T est une famille $(\mathfrak{p}_\lambda)_{\lambda \in L}$, où \mathfrak{p}_λ est un idéal premier de A_λ et où l'on a $\mathfrak{p}_\lambda = \varphi_{\mu\lambda}^{-1}(\mathfrak{p}_\mu)$ pour $\lambda \leq \mu$. On sait alors ((5.13.3) et (5.13.1)) qu'il y a un idéal premier \mathfrak{p} de A tel que $\mathfrak{p}_\lambda = \varphi_\lambda^{-1}(\mathfrak{p})$ pour tout $\lambda \in L$, ce qui achève la démonstration.

En particulier, on a ainsi démontré le

Corollaire (8.2.10). — Soit $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ un système inductif filtrant d'anneaux, et soient $A = \varinjlim A_\lambda$, $\varphi_\lambda : A_\lambda \rightarrow A$ les homomorphismes canoniques. L'application canonique $\mathfrak{p} \mapsto (\varphi_\lambda^{-1}(\mathfrak{p}))$ est un homéomorphisme de $\text{Spec}(A)$ sur l'espace topologique $\varprojlim \text{Spec}(A_\lambda)$.

Corollaire (8.2.11). — Avec les notations de (8.2.8), pour tout ouvert quasi-compact U de S , il existe un indice λ et un ouvert quasi-compact U_λ de S_λ tel que $U = \psi_\lambda^{-1}(U_\lambda)$.

Cela résulte de ce que, par définition de la topologie limite projective, les $\psi_\lambda^{-1}(U_\lambda)$ (U_λ ouvert quasi-compact de S_λ) forment une base de la topologie de S , et de ce que l'ensemble d'indices L est filtrant.

Corollaire (8.2.12). — Avec les notations de (8.2.8), la limite inductive du système inductif d'homomorphismes $\theta_\lambda^\# : \psi_\lambda^*(\mathcal{O}_{S_\lambda}) \rightarrow \mathcal{O}_S$ de faisceaux d'anneaux sur S est un isomorphisme

$$(8.2.12.1) \quad \varinjlim_\lambda \psi_\lambda^*(\mathcal{O}_{S_\lambda}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_S.$$

On peut évidemment supposer les S_λ affines; avec les notations de la démonstration de (8.2.9), tout revient à voir que la limite inductive du système d'applications canoniques $(A_\lambda)_{\mathfrak{p}_\lambda} \rightarrow A_{\mathfrak{p}}$ est un isomorphisme, ce qui n'est autre que (5.13.3, (ii)).

Proposition (8.2.13). — Supposons que les morphismes $u_{\lambda\mu} : S_\mu \rightarrow S_\lambda$ soient des immersions ouvertes, de sorte que S_μ s'identifie à un sous-préschéma induit sur un ouvert de S_λ pour $\lambda \leq \mu$. Alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{L}$, l'espace sous-jacent au préschéma S s'identifie au sous-espace de S_α intersection des S_λ pour $\lambda \geq \alpha$, et le faisceau structural \mathcal{O}_S au faisceau induit (G, II, 1.5) par \mathcal{O}_{S_α} sur cette intersection ; plus généralement, pour tout \mathcal{O}_{S_α} -Module \mathcal{F}_α , $u_\alpha^*(\mathcal{F}_\alpha)$ s'identifie au \mathcal{O}_S -Module induit par \mathcal{F}_α sur S .

La première assertion résulte de (8.2.9), vu la définition d'une limite projective d'espaces topologiques; en outre tous les $\psi_\lambda^*(\mathcal{O}_{S_\lambda})$ sont égaux au faisceau induit par \mathcal{O}_{S_α} sur S par définition (0_I, 3.7.1) et, avec les notations de la démonstration de (8.2.9), les homomorphismes $(A_\lambda)_{p_\lambda} \rightarrow (A_\mu)_{p_\mu}$ sont bijectifs pour un système (p_λ) d'idéaux premiers correspondant à un même point de S ; l'assertion relative à \mathcal{O}_S se déduit donc de (8.2.12). La dernière assertion résulte alors de la définition de $u_\alpha^*(\mathcal{F}_\alpha)$ (0_I, 4.3.1).

Remarque (8.2.14). — Les résultats de (8.2.9) et (8.2.12) montrent que S est limite projective du système projectif $(S_\lambda, u_{\lambda\mu})$ dans la catégorie de tous les espaces annelés (ou de tous les espaces annelés en anneaux locaux). En effet, soit Y un espace annelé, et considérons un système projectif de morphismes d'espaces annelés $w_\lambda : Y \rightarrow S_\lambda$. Si l'on pose $w_\lambda = (\rho_\lambda, \omega_\lambda)$, les ρ_λ forment un système projectif d'applications continues et, en vertu de (8.2.9), leur limite projective ρ s'identifie à une application continue $Y \rightarrow S$ telle que $\rho_\lambda = \psi_\lambda \circ \rho$. D'autre part, les $\omega_\lambda^\# : \rho^*(\mathcal{O}_{S_\lambda}) \rightarrow \mathcal{O}_Y$ forment un système inductif d'homomorphismes de faisceaux d'anneaux; comme on peut écrire $\rho_\lambda^*(\mathcal{O}_{S_\lambda}) = \rho^*(\psi_\lambda^*(\mathcal{O}_{S_\lambda}))$ et que le foncteur ρ^* est exact, la limite inductive des $\rho_\lambda^*(\mathcal{O}_{S_\lambda})$ est $\rho^*(\mathcal{O}_X)$ en vertu de (8.2.12), et il y a donc un homomorphisme unique $\omega^\# : \rho^*(\mathcal{O}_S) \rightarrow \mathcal{O}_Y$ tel que $\omega_\lambda^\# = \omega^\# \circ \rho^*(\theta_\lambda^\#)$, ce qui démontre notre assertion.

8.3. Parties constructibles dans une limite projective de préschémas.

(8.3.1) Dans toute la suite de ce paragraphe, nous supposons remplies les conditions de (8.2.2), dont nous conservons les notations.

Théorème (8.3.2). — Pour tout λ , soient E_λ, F_λ deux parties de S_λ . Posons

$$(8.3.2.1) \quad E = \bigcap_\lambda u_\lambda^{-1}(E_\lambda), \quad F = \bigcup_\lambda u_\lambda^{-1}(F_\lambda).$$

On suppose vérifiées les conditions suivantes :

- (i) Pour tout λ , E_λ est pro-constructible et F_λ est ind-constructible (1.9.4).
- (ii) Pour $\lambda \leq \mu$, on a

$$E_\mu \subset u_{\lambda\mu}^{-1}(E_\lambda), \quad F_\mu \supset u_{\lambda\mu}^{-1}(F_\lambda).$$

(iii) Il existe $\alpha \in \mathbb{L}$ tel que S_α soit quasi-compact (ce qui entraîne que S_λ est quasi-compact pour $\lambda \geq \alpha$).

Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- a) $E \subset F$.

b) Il existe $\lambda \geq \alpha$ tel que $u_\lambda^{-1}(E_\lambda) \subset u_\lambda^{-1}(F_\lambda)$ (et alors on a $u_\mu^{-1}(E_\mu) \subset u_\mu^{-1}(F_\mu)$ pour $\mu \geq \lambda$).

c) Il existe $\lambda \geq \alpha$ tel que $E_\lambda \subset F_\lambda$ (et alors on a $E_\mu \subset F_\mu$ pour $\mu \geq \lambda$).

Les remarques entre parenthèses dans b) et c) résultent de (ii). Posons

$$G_\lambda = E_\lambda \cap (S_\lambda - F_\lambda), \quad G = E \cap (S - F).$$

Alors G_λ est une partie pro-constructible de S_λ (1.9.5, (i)), et en vertu de (8.3.2.1) et de (ii), on a

$$G_\mu \subset u_{\lambda\mu}^{-1}(G_\lambda) \quad \text{pour } \lambda \leq \mu$$

$$G = \bigcap_\lambda u_\lambda^{-1}(G_\lambda).$$

On est donc ramené à prouver le cas particulier de (8.3.2) correspondant à $F_\lambda = \emptyset$ pour tout λ :

Corollaire (8.3.3). — Pour tout λ , soit E_λ une partie pro-constructible de S_λ telle que, pour $\lambda \leq \mu$, on ait $E_\mu \subset u_{\lambda\mu}^{-1}(E_\lambda)$. Supposons qu'il existe $\alpha \in L$ tel que S_α soit quasi-compact. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

a) $E = \bigcap_\lambda u_\lambda^{-1}(E_\lambda) = \emptyset$.

b) Il existe un λ tel que $u_\lambda^{-1}(E_\lambda) = \emptyset$ (et alors $u_\mu^{-1}(E_\mu) = \emptyset$ pour $\mu \geq \lambda$).

c) Il existe λ tel que $E_\lambda = \emptyset$ (et alors $E_\mu = \emptyset$ pour $\mu \geq \lambda$).

Il est clair que c) implique a). Prouvons que a) entraîne b) : puisque S_λ est quasi-compact, il en est de même de S (8.2.2); E_λ étant pro-constructible, il en est de même de $u_\lambda^{-1}(E_\lambda)$ (1.9.5, (vi)); alors la famille filtrante décroissante d'ensembles pro-constructibles $u_\lambda^{-1}(E_\lambda)$ a une intersection vide, donc (1.9.9) l'un d'eux est vide.

Enfin, montrons que b) entraîne c). Comme S_α est quasi-compact et L filtrant, on peut remplacer S_α par un ouvert affine, donc supposer (8.2.2) que S et les S_λ pour $\lambda \geq \alpha$ sont affines; on a alors (1.9.2.1), pour $\lambda \geq \alpha$,

$$u_\lambda(S) = \bigcap_{\mu \geq \lambda} u_{\lambda\mu}(S_\mu)$$

d'où

$$E_\lambda \cap u_\lambda(S) = \bigcap_{\mu \geq \lambda} (E_\lambda \cap u_{\lambda\mu}(S_\mu)).$$

Or, comme u_λ et les $u_{\lambda\mu}$ sont quasi-compacts, $u_\lambda(S)$ et $u_{\lambda\mu}(S_\mu)$ sont pro-constructibles dans S_λ (1.9.5, (vii)), donc les ensembles $E_\lambda \cap u_{\lambda\mu}(S_\mu)$ pour $\mu \geq \lambda$ forment une famille filtrante décroissante de parties pro-constructibles de S_λ . Comme S_λ est quasi-compact, l'hypothèse b) entraîne que l'intersection de cette famille est vide, donc (1.9.9) un des ensembles $E_\lambda \cap u_{\lambda\mu}(S_\mu)$ est vide, donc $E_\mu \subset u_{\lambda\mu}^{-1}(E_\lambda)$ est vide. C.Q.F.D.

Corollaire (8.3.4). — Pour tout λ , soit F_λ une partie ind-constructible de S_λ telle que pour $\lambda \leq \mu$ on ait $u_{\lambda\mu}^{-1}(F_\lambda) \subset F_\mu$. Supposons qu'il existe $\alpha \in L$ tel que S_α soit quasi-compact. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

a) L'ensemble $F = \bigcup_\lambda u_\lambda^{-1}(F_\lambda)$ est égal à S .

b) Il existe un λ tel que $u_\lambda^{-1}(F_\lambda) = S$ (et alors $u_\mu^{-1}(F_\mu) = S$ pour $\mu \geq \lambda$).

c) Il existe un λ tel que $F_\lambda = S_\lambda$ (et alors $F_\mu = S_\mu$ pour $\mu \geq \lambda$).

Cela se déduit aussitôt de (8.3.3) par passage aux complémentaires.

Corollaire (8.3.5). — Pour tout λ , soient E_λ, F_λ deux parties constructibles de S_λ telles que, pour $\mu \geq \lambda$, on ait $E_\mu \subset u_{\lambda\mu}^{-1}(E_\lambda)$ et $F_\mu \supset u_{\lambda\mu}^{-1}(F_\lambda)$. Supposons qu'il existe un indice α tel que S_α soit quasi-compact. Alors, pour que $E \subset F$ (resp. $E = F$), il faut et il suffit qu'il existe λ tel que $E_\lambda \subset F_\lambda$ (resp. $E_\lambda = F_\lambda$), auquel cas on a aussi $E_\mu \subset F_\mu$ (resp. $E_\mu = F_\mu$) pour $\mu \geq \lambda$.

C'est un cas particulier de (8.3.2).

En particulier :

Corollaire (8.3.6). — Supposons qu'il existe un α tel que S_α soit quasi-compact. Pour que $S = \emptyset$, il faut et il suffit qu'il existe un λ tel que $S_\lambda = \emptyset$.

Corollaire (8.3.7). — On a, pour tout λ ,

$$(8.3.7.1) \quad u_\lambda(S) = \bigcap_{\mu \geq \lambda} u_{\lambda\mu}(S_\mu).$$

Il est clair que le premier membre de (8.3.7.1) est contenu dans le second. Soit s un point de S_λ et posons $X_\lambda = \text{Spec}(\mathbf{k}(s))$; considérons le système projectif $(X_\mu, v_{\mu\nu})$ où $X_\mu = X_\lambda \times_{S_\lambda} S_\mu$ et $v_{\mu\nu} = 1 \times u_{\mu\nu}$ pour $\lambda \leq \mu \leq \nu$; sa limite projective est $X = X_\lambda \times_{S_\lambda} S$ et $v_\lambda = 1 \times u_\lambda$ est l'application canonique $X \rightarrow X_\lambda$ (8.2.5). Si $s \in \bigcap_{\mu \geq \lambda} u_{\lambda\mu}(S_\mu)$, cela entraîne que $X_\mu \neq \emptyset$ pour tout $\mu \geq \lambda$ (I, 3.4.8); il résulte alors de (8.3.6) que $X \neq \emptyset$, donc $s \in u_\lambda(S)$ par (I, 3.4.8).

Proposition (8.3.8). — (i) Pour que le morphisme $u_\lambda : S \rightarrow S_\lambda$ soit dominant (resp. surjectif), il faut et il suffit que pour $\mu \geq \lambda$ le morphisme $u_{\lambda\mu} : S_\mu \rightarrow S_\lambda$ soit dominant (resp. surjectif).

(ii) Si, pour un indice λ , les morphismes $u_{\lambda\mu} : S_\mu \rightarrow S_\lambda$ sont plats (resp. fidèlement plats) pour tout $\mu \geq \lambda$, alors le morphisme $u_\lambda : S \rightarrow S_\lambda$ est plat (resp. fidèlement plat).

(iii) Supposons que les morphismes $u_\mu : S \rightarrow S_\mu$ soient surjectifs pour $\mu \geq \lambda$. Pour que u_λ soit un morphisme ouvert (resp. universellement ouvert), il faut et il suffit que, pour tout $\mu \geq \lambda$, $u_{\lambda\mu}$ soit un morphisme ouvert (resp. universellement ouvert).

(i) Comme $u_\lambda(S) \subset u_{\lambda\mu}(S_\mu)$ pour $\mu \geq \lambda$, la nécessité des conditions est triviale, et il résulte aussitôt de (8.3.7.1) que si les $u_{\lambda\mu}$ sont surjectifs, il en est de même de u_λ . Supposons maintenant les $u_{\lambda\mu}$ dominants pour $\mu \geq \lambda$, et considérons dans S_λ un ouvert quasi-compact non vide U_λ ; alors les $U_\mu = u_{\lambda\mu}^{-1}(U_\lambda)$ pour $\mu \geq \lambda$ forment un système projectif dont la limite projective est $U = u_\lambda^{-1}(U_\lambda)$ (8.2.5). Par hypothèse les U_μ sont tous non vides, donc il en est de même de U par (8.3.6), ce qui prouve que u_λ est dominant.

(ii) En vertu de (i), il suffit de considérer le cas où les $u_{\lambda\mu}$ sont plats; on peut alors se borner au cas où S_λ est affine, donc aussi les S_μ pour $\mu \geq \lambda$ et S , et l'assertion résulte alors de (2.1.2) et (0_I, 6.2.3).

(iii) En vertu de (8.2.5) et de (I, 3.5.2), il suffit de traiter le cas des morphismes ouverts. Comme $u_\lambda = u_{\lambda\mu} \circ u_\mu$ et que u_μ est surjectif, on sait que si u_λ est ouvert il en est de même de $u_{\lambda\mu}$ pour $\mu \geq \lambda$ (Bourbaki, *Top. gén.*, chap. I^{er}, 3^e éd., § 5, n^o 1, prop. 1).

Inversement, pour montrer que u_λ est ouvert lorsque tous les $u_{\lambda\mu}$ le sont pour $\mu \geq \lambda$, il suffit de voir que pour tout ouvert quasi-compact V de S , $u_\lambda(V)$ est ouvert dans S_λ ; mais il existe alors $\mu \geq \lambda$ tel que $V = u_\mu^{-1}(V_\mu)$, où V_μ est ouvert dans S_μ (8.2.11); comme u_μ est surjectif, on a $V_\mu = u_\mu(V)$ et $u_\lambda(V) = u_{\lambda\mu}(u_\mu(V))$ est donc ouvert par hypothèse.

On notera qu'il peut se faire que tous les $u_{\lambda\mu}$ soient ouverts sans qu'il en soit ainsi de u_λ si les u_μ ne sont pas surjectifs. On en a un exemple en considérant un anneau intègre A qui n'est pas un corps, et son corps des fractions K , qui est limite inductive des A_f , où f parcourt $A - \{0\}$; si l'on pose $S_1 = \text{Spec}(A)$, $S_f = \text{Spec}(A_f)$, on a $S = \varprojlim S_f = \text{Spec}(K)$, et le morphisme $S \rightarrow S_1$ n'est pas ouvert, bien que les morphismes $S_f \rightarrow S_1$ le soient.

(8.3.9) Pour tout préschéma X , nous noterons comme d'ordinaire $\mathfrak{P}(X)$ l'ensemble des parties de l'ensemble sous-jacent à X , par $\mathfrak{C}(X)$ (resp. $\mathfrak{D}c(X)$, $\mathfrak{F}c(X)$, $\mathfrak{L}\mathfrak{F}c(X)$) l'ensemble des parties constructibles (resp. constructibles et ouvertes, resp. constructibles et fermées, resp. constructibles et localement fermées) de X . Il est clair que $(\mathfrak{P}(S_\lambda), u_{\lambda\mu}^{-1})$ est un système inductif d'ensembles et que les applications $u_\lambda^{-1} : \mathfrak{P}(S_\lambda) \rightarrow \mathfrak{P}(S)$ forment un système inductif d'applications, d'où, en passant à la limite inductive, une application canonique

$$(8.3.9.1) \quad u_{\mathfrak{P}} : \varinjlim \mathfrak{P}(S_\lambda) \rightarrow \mathfrak{P}(S).$$

En outre, il résulte de (1.8.2) que $u_{\lambda\mu}^{-1}$ applique $\mathfrak{C}(S_\lambda)$ (resp. $\mathfrak{D}c(S_\lambda)$, $\mathfrak{F}c(S_\lambda)$, $\mathfrak{L}\mathfrak{F}c(S_\lambda)$) dans $\mathfrak{C}(S_\mu)$ (resp. $\mathfrak{D}c(S_\mu)$, $\mathfrak{F}c(S_\mu)$, $\mathfrak{L}\mathfrak{F}c(S_\mu)$) et que u_λ^{-1} applique $\mathfrak{C}(S_\lambda)$ (resp. $\mathfrak{D}c(S_\lambda)$, $\mathfrak{F}c(S_\lambda)$, $\mathfrak{L}\mathfrak{F}c(S_\lambda)$) dans $\mathfrak{C}(S)$ (resp. $\mathfrak{D}c(S)$, $\mathfrak{F}c(S)$, $\mathfrak{L}\mathfrak{F}c(S)$). On a donc par restriction de (8.3.9.1), des applications canoniques

$$(8.3.9.2) \quad \varinjlim \mathfrak{C}(S_\lambda) \rightarrow \mathfrak{C}(S)$$

$$(8.3.9.3) \quad \varinjlim \mathfrak{D}c(S_\lambda) \rightarrow \mathfrak{D}c(S)$$

$$(8.3.9.4) \quad \varinjlim \mathfrak{F}c(S_\lambda) \rightarrow \mathfrak{F}c(S)$$

$$(8.3.9.5) \quad \varinjlim \mathfrak{L}\mathfrak{F}c(S_\lambda) \rightarrow \mathfrak{L}\mathfrak{F}c(S).$$

(8.3.10) Soit $g_\alpha : X_\alpha \rightarrow S_\alpha$ un morphisme; avec les notations de (8.2.5) on a comme ci-dessus une application canonique $v_{\mathfrak{P}} : \varinjlim \mathfrak{P}(X_\lambda) \rightarrow \mathfrak{P}(X)$; d'autre part, on a des morphismes de projection $g_\lambda : X_\lambda \rightarrow S_\lambda$ pour tout $\lambda \geq \alpha$ et un morphisme de projection $g : X \rightarrow S$. Il est clair que les $g_\lambda^{-1} : \mathfrak{P}(S_\lambda) \rightarrow \mathfrak{P}(X_\lambda)$ forment un système inductif d'applications, et que les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{P}(S_\lambda) & \xrightarrow{u_\lambda^{-1}} & \mathfrak{P}(S) \\ g_\lambda^{-1} \downarrow & & \downarrow g^{-1} \\ \mathfrak{P}(X_\lambda) & \xrightarrow{v_\lambda^{-1}} & \mathfrak{P}(X) \end{array}$$

sont commutatifs; on en déduit donc par passage à la limite inductive un diagramme commutatif

$$(8.3.10.1) \quad \begin{array}{ccc} \varinjlim \mathfrak{P}(S_\lambda) & \xrightarrow{u_{\mathfrak{P}}} & \mathfrak{P}(S) \\ \downarrow \varinjlim g_\lambda^{-1} & & \downarrow g^{-1} \\ \varinjlim \mathfrak{P}(X_\lambda) & \xrightarrow{v_{\mathfrak{P}}} & \mathfrak{P}(X) \end{array}$$

et il résulte de (1.8.2) que l'on a des diagrammes analogues en remplaçant \mathfrak{P} par \mathfrak{C} , \mathfrak{Dc} , \mathfrak{Fc} ou \mathfrak{Vc} .

Il résulte de (8.3.5) que sous l'hypothèse que pour un $\alpha \in L$, S_α est *quasi-compact*, l'application canonique (8.3.9.2) est *injective*. En outre :

Théorème (8.3.11). — *Supposons qu'il existe un $\alpha \in L$ tel que S_α soit quasi-compact et quasi-séparé. Alors les applications canoniques (8.3.9.2), (8.3.9.3), (8.3.9.4) et (8.3.9.5) sont bijectives.*

En vertu de la remarque précédente, il reste à prouver que ces applications sont *surjectives*; comme toute partie constructible de S est réunion finie d'ensembles de la forme $U \cap C$, où U et V sont ouverts et constructibles, il suffira de prouver que (8.3.9.3) est surjective pour qu'il en soit de même de (8.3.9.2) (et aussi de (8.3.9.4), par passage aux complémentaires). Or, comme les morphismes $S_\lambda \rightarrow S_\alpha$ et $S \rightarrow S_\alpha$ sont affines, donc séparés, les S_λ pour $\lambda \geq \alpha$ et S sont quasi-compacts et quasi-séparés (1.2.2), et l'on sait que les parties ouvertes constructibles dans un tel préschéma ne sont autres que les parties ouvertes quasi-compactes (1.8.1). La conclusion résulte donc de (8.2.11) sauf pour l'application (8.3.9.5). Pour prouver que cette dernière est surjective, considérons une partie Z localement fermée et constructible dans S ; Z est donc quasi-compacte (0_{III}, 9.1.4). Comme tout point $x \in Z$ admet par hypothèse un voisinage ouvert quasi-compact V_x dans S tel que $Z \cap V_x$ soit fermé dans V_x , on peut couvrir Z par un nombre fini des V_x ; autrement dit, il y a un ouvert quasi-compact U contenant Z et tel que Z soit fermé dans U ; comme Z est constructible dans S , il l'est aussi dans U (0_{III}, 9.1.8). On sait (8.2.11) qu'il y a un indice λ et un ouvert quasi-compact U_λ dans S_λ tels que $U = u_\lambda^{-1}(U_\lambda)$. Appliquant à U (qui est limite projective des $U_\mu = u_{\lambda\mu}^{-1}(U_\lambda)$ pour $\mu \geq \lambda$) le fait que l'application (8.3.9.4) est surjective, on voit qu'il existe un $\mu \geq \lambda$ et un ensemble fermé constructible Z_μ dans U_μ tels que $Z = u_\mu^{-1}(Z_\mu)$. Mais comme l'immersion canonique $U_\mu \rightarrow S_\mu$ est quasi-compacte par hypothèse (1.2.7), elle est de présentation finie (1.6.2, (i)), et Z_μ est aussi une partie constructible de S_μ en vertu de (1.8.4) et (1.8.1); comme Z_μ est évidemment localement fermée dans S_μ , cela achève la démonstration.

Corollaire (8.3.12). — *Supposons qu'il existe un α tel que S_α soit quasi-compact, et soit, pour tout λ , Z_λ une partie constructible de S_λ telle que $Z_\mu = u_{\lambda\mu}^{-1}(Z_\lambda)$ pour $\mu \geq \lambda$. Si $Z = u_\lambda^{-1}(Z_\lambda)$,*

alors, pour que Z soit ouverte (resp. fermée, resp. localement fermée) dans S , il faut et il suffit qu'il existe $\lambda \geq \alpha$ tel que Z_λ le soit dans S_λ .

Couvrons S_α par un nombre fini d'ouverts affines $U_\alpha^{(i)}$; alors les $U^{(i)} = u_\alpha^{-1}(U_\alpha^{(i)})$ forment un recouvrement ouvert affine de S , et pour que Z soit ouvert (resp. fermé, resp. localement fermé) dans S , il faut et il suffit que chacun des $Z \cap U^{(i)}$ le soit dans $U^{(i)}$. Comme L est filtrant et que chacun des $Z \cap U^{(i)}$ est constructible dans $U^{(i)}$ (0_{III}, 9.1.8), on peut se borner à démontrer le corollaire lorsque S_α est affine, donc quasi-compact et quasi-séparé; mais alors il résulte de (8.3.11).

Proposition (8.3.13). — *Supposons que les morphismes $u_{\lambda\mu} : S_\mu \rightarrow S_\lambda$ soient plats pour $\lambda \leq \mu$, et qu'il existe α tel que S_α soit quasi-compact. Pour tout λ , soient Z'_λ, Z''_λ deux parties pro-constructibles de S_λ , telles que $Z'_\mu = u_{\lambda\mu}^{-1}(Z'_\lambda)$ et $Z''_\mu = u_{\lambda\mu}^{-1}(Z''_\lambda)$ pour $\mu \geq \lambda$; on suppose en outre que $\overline{Z'_\alpha}$ est constructible dans S_α . Soient $Z' = u_\lambda^{-1}(Z'_\lambda)$, $Z'' = u_\lambda^{-1}(Z''_\lambda)$; pour que $Z'' \subset \overline{Z'}$, il faut et il suffit qu'il existe $\lambda \geq \alpha$ tel que $Z''_\lambda \subset \overline{Z'_\lambda}$.*

En effet, on sait que $u_\lambda : S \rightarrow S_\lambda$ est aussi un morphisme plat pour tout λ (8.3.8); comme Z'_λ est pro-constructible, l'adhérence de Z'_μ pour $\mu \geq \lambda$ (resp. de Z') dans S_μ (resp. S) est égale à $u_{\lambda\mu}^{-1}(\overline{Z'_\lambda})$ (resp. $u_\lambda^{-1}(\overline{Z'_\lambda})$) (2.3.10). Comme les $u_{\lambda\mu}^{-1}(Z'_\lambda)$ et $u_\lambda^{-1}(Z'_\lambda)$ sont constructibles (1.8.2), la conclusion résulte de (8.3.2).

8.4. Critères d'irréductibilité et de connexion pour les limites projectives de préschémas.

Proposition (8.4.1). — *Supposons qu'il existe un indice α tel que S_α soit quasi-compact.*

(i) *Si S n'est pas irréductible et si de plus l'espace sous-jacent à S est noethérien et S_α quasi-séparé, il existe $\lambda \geq \alpha$ tel que, pour $\mu \geq \lambda$, S_μ ne soit pas irréductible.*

(ii) *Si S n'est pas connexe, il existe $\lambda \geq \alpha$ tel que, pour $\mu \geq \lambda$, S_μ ne soit pas connexe.*

Supposons que S soit réunion de deux ensembles fermés S', S'' distincts de S (resp. fermés disjoints et non vides). Dans le cas (i), S' et S'' sont constructibles puisque l'espace S est noethérien. En vertu de (8.3.11), il existe donc un $\lambda \geq \alpha$ et deux ensembles fermés constructibles S'_λ, S''_λ de S_λ tels que $S' = u_\lambda^{-1}(S'_\lambda)$, $S'' = u_\lambda^{-1}(S''_\lambda)$; comme $S = S' \cup S''$, il résulte aussi de (8.3.11) que l'on peut supposer que $S_\lambda = S'_\lambda \cup S''_\lambda$; comme S'_λ et S''_λ sont distincts de S_λ , cela prouve que S_λ n'est pas irréductible.

Dans le cas (ii), S' et S'' sont ouverts quasi-compacts, donc, en vertu de (8.2.11), il existe un $\lambda \geq \alpha$ et deux ensembles ouverts quasi-compacts S'_λ, S''_λ de S_λ tels que $S' = u_\lambda^{-1}(S'_\lambda)$, $S'' = u_\lambda^{-1}(S''_\lambda)$. D'ailleurs, comme S' et S'' sont ouverts et fermés dans S , ils sont à la fois pro-constructibles et ind-constructibles (1.9.6), donc constructibles (1.9.11), et il résulte donc de (8.3.5) que l'on peut supposer λ pris tel que $S_\lambda = S'_\lambda \cup S''_\lambda$ et $S'_\lambda \cap S''_\lambda = \emptyset$, ce qui montre que S_λ n'est pas connexe.

Proposition (8.4.2). — *Supposons que l'espace sous-jacent à S soit noethérien et que l'une des deux conditions suivantes soit vérifiée :*

a) *Pour $\lambda \leq \mu$, $u_{\lambda\mu} : S_\mu \rightarrow S_\lambda$ est dominant, et il existe α tel que S_α soit quasi-compact.*

b) Il existe α tel que l'espace sous-jacent à S_α soit noethérien, et pour $\mu \geq \lambda$, $u_{\lambda\mu}$ est un homéomorphisme de S_μ sur un sous-espace de S_λ .

Sous ces conditions, il existe un λ tel que, pour tout $\mu \geq \lambda$:

(i) Pour toute composante irréductible Y_i de S ($1 \leq i \leq m$), $\overline{u_\mu(Y_i)}$ est une composante irréductible de S_μ , et l'application $Y_i \rightarrow \overline{u_\mu(Y_i)}$ est une bijection de l'ensemble des composantes irréductibles de S sur l'ensemble des composantes irréductibles de S_μ .

(ii) Pour toute composante connexe C_j de S ($1 \leq j \leq n$), $\overline{u_\mu(C_j)}$ est une composante connexe de S_μ , et l'application $C_j \rightarrow \overline{u_\mu(C_j)}$ est une bijection de l'ensemble des composantes connexes de S sur l'ensemble des composantes connexes de S_μ .

Nous établirons d'abord le

Lemme (8.4.2.1). — Sous la condition a) ou b) de (8.4.2), il existe λ tel que, pour $\mu \geq \lambda$, $u_\mu : S \rightarrow S_\mu$ soit dominant.

Dans le cas a), cela a déjà été prouvé sans supposer l'espace S noethérien (8.3.8,

(i)). Dans le cas b), posons $Z_\alpha = \overline{u_\alpha(S)}$; en tant que partie fermée de l'espace noethérien S_α , Z_α est constructible, et comme $u_\alpha^{-1}(Z_\alpha) = S$, il résulte de (8.3.5) qu'il existe $\lambda \geq \alpha$ tel que, pour $\mu \geq \lambda$, on ait $Z_\mu = \overline{u_{\lambda\mu}^{-1}(Z_\lambda)} = S_\mu$. Mais comme $u_{\alpha\mu}$ est un homéomorphisme de S_μ sur un sous-espace de S_α , et comme l'application composée $S \rightarrow Z_\mu \rightarrow Z_\alpha$ est dominante, il en est de même de $S \rightarrow Z_\mu = S_\mu$.

Ce lemme étant démontré, on peut supposer que pour tout λ , u_λ est un morphisme dominant.

(i) Chacun des S_λ est réunion des $\overline{u_\lambda(Y_i)}$, qui sont irréductibles. D'autre part, si U_i est l'ouvert de S complémentaire de la réunion des Y_j d'indice $j \neq i$ ($1 \leq i \leq m$), les U_i sont deux à deux disjoints et $Y_i = \overline{U_i}$ ($0_I, 2.1.6$). Comme l'espace sous-jacent à S est noethérien, les U_i sont quasi-compacts, donc il existe un indice λ et des ouverts $U_{i\lambda}$ de S_λ tels que $U_i = u_\lambda^{-1}(U_{i\lambda})$ pour $1 \leq i \leq m$ (8.2.11). On en conclut que si l'on pose $U_{i\mu} = u_{\lambda\mu}^{-1}(U_{i\lambda})$ pour $\lambda \leq \mu$, les $U_{i\mu}$ sont deux à deux disjoints, car les $U_i = u_\mu^{-1}(U_{i\mu})$ le sont et u_μ est dominant. Par suite, aucune des adhérences $\overline{U_{i\mu}}$ n'est contenue dans une autre et $u_\mu(U_i)$ est dense dans $U_{i\mu}$ puisque u_μ est dominant; on a donc $\overline{U_{i\mu}} = \overline{u_\mu(Y_i)}$, ce qui prouve que les $\overline{U_{i\mu}}$ sont les composantes irréductibles de S_μ ($0_I, 2.1.7$) et achève la démonstration.

(ii) Comme l'espace S est noethérien, les C_j sont ouverts et fermés dans S et quasi-compacts; le même raisonnement que dans (i) montre donc qu'il existe un λ et des ouverts $V_{j\lambda}$ de S_λ tels que $C_j = u_\lambda^{-1}(V_{j\lambda})$ pour $1 \leq j \leq n$. On voit aussi, comme dans (i), que si l'on pose $V_{j\mu} = u_{\lambda\mu}^{-1}(V_{j\lambda})$ pour $\mu \geq \lambda$, les $V_{j\mu}$ sont deux à deux disjoints, et $u_\mu(C_j)$ est dense dans $V_{j\mu}$; cela entraîne que $V_{j\mu}$ est connexe. En outre, il résulte de (8.3.4) que pour μ assez grand, la réunion des $V_{j\mu}$ est S_μ , puisque tout ouvert dans un préschéma est ind-constructible (1.9.6). Les $V_{j\mu}$ sont donc les composantes connexes de S_μ , ce qui achève la démonstration.

On notera que si les morphismes $u_{\lambda\mu}$ sont des immersions, ils vérifieront en particulier la condition b) de (8.4.2).

Corollaire (8.4.3). — *Supposons vérifiée l'une des conditions a), b) de (8.4.2), l'espace sous-jacent à S étant noethérien ; alors, pour que S soit irréductible, il faut et il suffit qu'il existe λ tel que S_μ le soit pour tout $\mu \geq \lambda$.*

Proposition (8.4.4). — *Supposons qu'il existe un α tel que S_α soit quasi-compact et que, pour $\lambda \leq \mu$, $u_{\lambda\mu} : S_\mu \rightarrow S_\lambda$ soit dominant. Alors, pour que S soit connexe, il faut et il suffit qu'il existe λ tel que S_μ le soit pour tout $\mu \geq \lambda$.*

La condition est suffisante en vertu de (8.4.1) ; d'autre part, on a vu (8.3.8, (i)) que $u_\lambda : S \rightarrow S_\lambda$ est dominant pour λ assez grand, donc, si S est connexe, il en est de même de S_λ , puisque $u_\lambda(S)$ est dense dans S_λ et connexe.

Corollaire (8.4.5). — *Soient k un corps, X un k -préschéma quasi-compact. Pour que X soit géométriquement connexe (4.5.2), il faut et il suffit que, pour toute extension finie et séparable K de k , $X \otimes_k K$ soit connexe.*

La condition est trivialement nécessaire. Pour voir qu'elle est suffisante, nous devons prouver que si Ω est une clôture algébrique de k , $X \otimes_k \Omega$ est connexe (4.5.1). Or, Ω est limite inductive filtrante des sous-extensions finies k' de k , et pour $k \subset k' \subset k'' \subset \Omega$, le morphisme $X \otimes_k k'' \rightarrow X \otimes_k k'$ est surjectif. On est donc ramené, en vertu de (8.4.4), à prouver que $X \otimes_k k'$ est connexe pour toute extension finie k' de k . Mais si K est la plus grande extension séparable contenue dans k' , le morphisme $X \otimes_k k' \rightarrow X \otimes_k K$ est fini, surjectif et radiciel, donc (2.4.5) un homéomorphisme, et comme $X \otimes_k K$ est connexe par hypothèse, il en est de même de $X \otimes_k k'$.

Remarques (8.4.6). — (i) La démonstration de (8.4.2) montre que la conclusion de cette proposition est valable si l'on suppose que l'espace sous-jacent à S est noethérien, qu'il existe α tel que S_α soit quasi-compact, et enfin que les $u_\lambda : S \rightarrow S_\lambda$ sont dominants.

(ii) Par contre, la conclusion de (8.4.2) peut être en défaut lorsque les u_λ ne sont pas dominants pour λ assez grand, même lorsque les S_λ et S sont noethériens, ainsi que le montre l'exemple suivant. Prenons pour ensemble d'indices \mathbf{N} , tous les S_n étant égaux à $\text{Spec}(A \times K) = \text{Spec}(A) \amalg \text{Spec}(K)$, où K est un corps, A une K-algèbre quelconque, et tous les morphismes $u_{n, n+1}$ étant égaux au même morphisme correspondant à l'homomorphisme $(x, y) \mapsto (j(y), y)$ de $A \times K$ dans lui-même, où $j : K \rightarrow A$ est l'homomorphisme canonique. On vérifie aisément que la limite inductive de ce système d'anneaux est K, l'homomorphisme canonique u_n correspondant à la seconde projection $A \times K \rightarrow K$. On voit donc que $S = \text{Spec}(K)$ est irréductible bien qu'aucun des S_n ne soit connexe.

8.5. Modules de présentation finie sur une limite projective de préschémas.

(8.5.1) Nous conservons toujours les notations de (8.2.2) ; nous nous bornerons en outre au cas où S_0 est l'un des S_λ , auquel on peut toujours se ramener.

Lorsque, dans cette section, nous considérerons une famille (\mathcal{F}_λ) , où, pour tout $\lambda \in \mathbf{L}$, \mathcal{F}_λ est un \mathcal{O}_{S_λ} -Module, il sera sous-entendu que cette famille vérifie la condition

$$(8.5.1.1) \quad \mathcal{F}_\mu = u_{\lambda\mu}^*(\mathcal{F}_\lambda) \quad \text{pour } \lambda \leq \mu.$$

Nous poserons alors

$$(8.5.1.2) \quad \mathcal{F} = u_\lambda^*(\mathcal{F}_\lambda)$$

qui est un \mathcal{O}_S -Module ne dépendant pas de l'indice $\lambda \in L$, en vertu de l'hypothèse (8.5.1.1).

Soient maintenant (\mathcal{F}_λ) , (\mathcal{G}_λ) deux telles familles de \mathcal{O}_{S_λ} -Modules.

Il est clair que les applications $f_\lambda \rightsquigarrow u_{\lambda\mu}^*(f_\lambda)$ de $\text{Hom}_{S_\lambda}(\mathcal{F}_\lambda, \mathcal{G}_\lambda)$ dans $\text{Hom}_{S_\mu}(\mathcal{F}_\mu, \mathcal{G}_\mu)$ définissent alors un *système inductif* de groupes abéliens $(\text{Hom}_{S_\lambda}(\mathcal{F}_\lambda, \mathcal{G}_\lambda), u_{\lambda\mu}^*)$, et que les applications $f_\lambda \rightsquigarrow u_\lambda^*(f_\lambda)$ forment un *système inductif* d'homomorphismes de groupes abéliens

$$u_\lambda^* : \text{Hom}_{S_\lambda}(\mathcal{F}_\lambda, \mathcal{G}_\lambda) \rightarrow \text{Hom}_S(\mathcal{F}, \mathcal{G});$$

d'où, en passant à la limite inductive, un homomorphisme canonique de groupes abéliens

$$(8.5.1.3) \quad u_{\mathcal{F}, \mathcal{G}} : \varinjlim \text{Hom}_{S_\lambda}(\mathcal{F}_\lambda, \mathcal{G}_\lambda) \rightarrow \text{Hom}_S(\mathcal{F}, \mathcal{G}).$$

Notons que lorsque $\mathcal{F}_\lambda = \mathcal{O}_{S_\lambda}$, la condition (8.5.1.1) est vérifiée, et que l'on a $\mathcal{F} = \mathcal{O}_S$; l'homomorphisme (8.5.1.3) donne donc (0_I, 5.1.1) un homomorphisme canonique de groupes abéliens

$$(8.5.1.4) \quad u_{\mathcal{G}} : \varinjlim \Gamma(S_\lambda, \mathcal{G}_\lambda) \rightarrow \Gamma(S, \mathcal{G}).$$

Théorème (8.5.2). — (i) *Supposons S_0 quasi-compact (resp. quasi-compact et quasi-séparé) et que, pour un $\lambda \in L$, \mathcal{F}_λ soit quasi-cohérent et de type fini (resp. de présentation finie) et \mathcal{G}_λ quasi-cohérent. Alors l'homomorphisme $u_{\mathcal{F}, \mathcal{G}}$ est injectif (resp. bijectif).*

(ii) *Supposons S_0 quasi-compact et quasi-séparé. Pour tout \mathcal{O}_S -Module quasi-cohérent \mathcal{F} de présentation finie, il existe un $\lambda \in L$ et un \mathcal{O}_{S_λ} -Module quasi-cohérent \mathcal{F}_λ de présentation finie tels que \mathcal{F} soit isomorphe à $u_\lambda^*(\mathcal{F}_\lambda)$.*

(i) On peut évidemment se borner au cas où $S_0 = S_\lambda$ puisque les morphismes $u_{0\lambda} : S_\lambda \rightarrow S_0$ sont affines, donc quasi-compacts et séparés. Considérons d'abord le cas où $S_0 = \text{Spec}(A_0)$ est affine. Alors l'assertion (i) équivaut au

Lemme (8.5.2.1). — *Soient A_0 un anneau, $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ un système inductif de A_0 -algèbres, $A = \varinjlim A_\lambda$; soient M_0, N_0 deux A_0 -modules, et posons $M_\lambda = M_0 \otimes_{A_0} A_\lambda$, $N_\lambda = N_0 \otimes_{A_0} A_\lambda$, $M = M_0 \otimes_{A_0} A = \varinjlim M_\lambda$, $N = N_0 \otimes_{A_0} A = \varinjlim N_\lambda$. Si M_0 est de type fini (resp. de présentation finie), l'homomorphisme canonique*

$$(8.5.2.2) \quad \varinjlim \text{Hom}_{A_\lambda}(M_\lambda, N_\lambda) \rightarrow \text{Hom}_A(M, N)$$

est injectif (resp. bijectif).

On sait en effet (Bourbaki, *Alg.*, chap. II, 3^e éd., § 5, n^o 1) que l'on a des isomorphismes canoniques fonctoriels

$$\text{Hom}_{A_\lambda}(M_\lambda, N_\lambda) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{A_0}(M_0, N_\lambda), \quad \text{Hom}_A(M, N) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{A_0}(M_0, N)$$

si bien que l'homomorphisme (8.5.2.2) n'est autre, à des isomorphismes canoniques près, que l'homomorphisme canonique

$$(8.5.2.3) \quad \varinjlim \text{Hom}_{A_0}(M_0, N_\lambda) \rightarrow \text{Hom}_{A_0}(M_0, \varinjlim N_\lambda),$$

qui, à tout système inductif d'homomorphismes de A_0 -modules $\theta_\lambda : M_0 \rightarrow N_\lambda$, fait correspondre sa limite inductive.

Or, si M_0 est de type fini (resp. de présentation finie), on a une suite exacte $A_0^m \rightarrow M_0 \rightarrow 0$ (resp. $A_0^n \rightarrow A_0^m \rightarrow M_0 \rightarrow 0$); comme il est clair que (8.5.2.3) est bijectif lorsque M_0 est de la forme A_0^q , il suffit d'utiliser l'exactitude à gauche du foncteur $M_0 \rightarrow \text{Hom}_{A_0}(M_0, P)$ et l'exactitude du foncteur \varinjlim (dans la catégorie des groupes abéliens) pour conclure.

Passons au cas où S_0 est quasi-compact, et soit (U_i) un recouvrement fini de S_0 par des ouverts affines; pour tout λ , les $U_{i\lambda} = u_{0\lambda}^{-1}(U_i)$ forment un recouvrement ouvert affine de S_λ , et les $V_i = u_0^{-1}(U_i)$ un recouvrement ouvert affine de S . Pour voir que $u_{\mathcal{F}, \mathcal{G}}$ est injectif, il faut prouver que si $f_\lambda : \mathcal{F}_\lambda \rightarrow \mathcal{G}_\lambda$ est tel que $f = u_\lambda^*(f_\lambda) = 0$, alors il existe $\mu \geq \lambda$ tel que $f_\mu = u_{\lambda\mu}^*(f_\lambda) = 0$. En vertu du lemme (8.5.2.1), pour chaque i il existe un λ_i tel que $f_\mu|_{U_{i\mu}} = 0$ pour $\mu \geq \lambda_i$. Il suffit donc de prendre μ plus grand que tous les λ_i .

Supposons en outre S_0 quasi-séparé et \mathcal{F}_0 de présentation finie, et soit $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un homomorphisme de \mathcal{O}_S -Modules. En vertu du lemme (8.5.2.1), pour tout i , il existe un indice λ_i et un homomorphisme $f_{\lambda_i}^{(i)} : \mathcal{F}_{\lambda_i}|_{U_{i, \lambda_i}} \rightarrow \mathcal{G}_{\lambda_i}|_{U_{i, \lambda_i}}$ tels que $u_{\lambda_i}^*(f_{\lambda_i}^{(i)}) = f|_{V_i}$. Comme L est filtrant, on peut en outre supposer tous les λ_i égaux à un même λ . Notons maintenant que S_λ est quasi-séparé (1.2.3) et \mathcal{F}_λ est un \mathcal{O}_{S_λ} -Module quasi-cohérent de présentation finie (0_I, 5.2.5); comme, pour tout couple d'indices i, j , $U_{ij\lambda} = U_{i\lambda} \cap U_{j\lambda}$ est quasi-compact et que l'on a $u_\lambda^*(f_\lambda^{(i)}|_{U_{ij\lambda}}) = u_\lambda^*(f_\lambda^{(j)}|_{U_{ij\lambda}}) = f|(V_i \cap V_j)$ par définition, il résulte de ce qu'on a vu plus haut qu'il existe un indice λ_{ij} tel que $u_{\lambda_{ij}}^*(f_\lambda^{(i)}|_{U_{ij\lambda}}) = u_{\lambda_{ij}}^*(f_\lambda^{(j)}|_{U_{ij\lambda}})$ pour $\mu \geq \lambda_{ij}$; prenant μ plus grand que tous les λ_{ij} , on voit donc que $u_{\lambda\mu}^*(f_\lambda^{(i)})$ et $u_{\lambda\mu}^*(f_\lambda^{(j)})$ coïncident dans $U_{i\mu} \cap U_{j\mu}$ pour tout couple (i, j) , et par suite définissent un homomorphisme $f_\mu : \mathcal{F}_\mu \rightarrow \mathcal{G}_\mu$ tel que $f = u_\mu^*(f_\mu)$.

Avant de passer à la démonstration de (ii), notons les corollaires suivants de (i) :

Corollaire (8.5.2.4). — *Supposons S_0 quasi-compact, \mathcal{F}_λ quasi-cohérent de type fini, \mathcal{G}_λ quasi-cohérent de présentation finie. Soit $f_\lambda : \mathcal{F}_\lambda \rightarrow \mathcal{G}_\lambda$ un homomorphisme. Pour que $f = u_\lambda^*(f_\lambda) : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ soit un isomorphisme, il faut et il suffit qu'il existe $\mu \geq \lambda$ tel que $f_\mu = u_{\lambda\mu}^*(f_\lambda) : \mathcal{F}_\mu \rightarrow \mathcal{G}_\mu$ soit un isomorphisme.*

On peut toujours supposer $S_\lambda = S_0$; la question étant locale sur S_0 , on peut en outre (S_0 étant quasi-compact et L filtrant) se ramener au cas où S_0 est affine, donc quasi-séparé. La condition étant trivialement suffisante, il reste à montrer qu'elle est nécessaire : or, il y a par hypothèse un \mathcal{O}_S -homomorphisme $g : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}$ tel que $g \circ f = 1_{\mathcal{F}}$ et $f \circ g = 1_{\mathcal{G}}$. Comme \mathcal{G} est de présentation finie, il existe $\nu \geq \lambda$ et un homomorphisme $g_\nu : \mathcal{G}_\nu \rightarrow \mathcal{F}_\nu$ tels que $g = u_\nu^*(g_\nu)$ en vertu de (8.5.2, (i)); on a par suite $u_\nu^*(g_\nu \circ f_\nu) = 1_{\mathcal{F}}$

et $u_v^*(f_v \circ g_v) = 1_{\mathcal{G}}$; compte tenu de ce que \mathcal{F}_v et \mathcal{G}_v sont de type fini, on en conclut par (8.5.2, (i)) qu'il existe $\mu \geq v$ tel que l'on ait $g_\mu \circ f_\mu = 1_{\mathcal{F}_\mu}$ et $f_\mu \circ g_\mu = 1_{\mathcal{G}_\mu}$, d'où le corollaire.

Corollaire (8.5.2.5). — Supposons S_0 quasi-compact et quasi-séparé. Supposons que $\mathcal{F}_\lambda, \mathcal{G}_\lambda$ soient des \mathcal{O}_{S_λ} -Modules quasi-cohérents de présentation finie. Pour que \mathcal{F} et \mathcal{G} soient isomorphes, il faut et il suffit qu'il existe $\mu \geq \lambda$ tel que \mathcal{F}_μ et \mathcal{G}_μ soient isomorphes. De plus, pour tout isomorphisme $f : \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}$, il existe un $v \geq \mu$ et un isomorphisme $f_v : \mathcal{F}_v \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}_v$, tels que $f = u_v^*(f_v)$.

Cela résulte de (8.5.2.4) et de (8.5.2, (i)) puisque tout homomorphisme $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ est de la forme $u_\mu^*(f_\mu)$ pour un $\mu \geq \lambda$ et un homomorphisme $f_\mu : \mathcal{F}_\mu \rightarrow \mathcal{G}_\mu$.

(ii) Considérons encore en premier lieu le cas où $S_0 = \text{Spec}(A_0)$ est affine. Alors l'assertion équivaut au lemme (5.13.7.1).

Dans le cas général, en partant d'un recouvrement ouvert affine fini (U_i) de S_0 , on déduit de (5.13.7.1) que pour tout i , il existe un indice $\lambda(i)$ et un $\mathcal{O}_{U_i, \lambda(i)}$ -Module quasi-cohérent de présentation finie \mathcal{F}_i tels que $u_{\lambda(i)}^*(\mathcal{F}_i) = \mathcal{F}|_{V_i}$ (avec les notations de (i)). En outre, comme L est filtrant, on peut supposer que tous les λ_i sont égaux à un même λ . Comme $U_{ij\lambda} = U_{i\lambda} \cap U_{j\lambda}$ est quasi-compact et quasi-séparé (1.2.7), il résulte de (8.5.2.5) que pour tout couple (i, j) , il existe un indice $\lambda_{ij} \geq \lambda$ et un isomorphisme $\theta_{ij} : u_{\lambda, \lambda_{ij}}^*(\mathcal{F}_i|_{U_{ij\lambda}}) \xrightarrow{\sim} u_{\lambda, \lambda_{ij}}^*(\mathcal{F}_j|_{U_{ij\lambda}})$ tel que $u_{\lambda_{ij}}^*(\theta_{ij})$ soit l'automorphisme identique de $\mathcal{F}|_{(V_i \cap V_j)}$; on peut encore supposer tous les λ_{ij} égaux à λ . Changeant les notations, on peut donc supposer qu'il existe pour tout couple (i, j) un isomorphisme $\theta_{ij} : \mathcal{F}_i|_{U_{ij\lambda}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_j|_{U_{ij\lambda}}$, tels que $u_\lambda^*(\theta_{ij})$ soit l'automorphisme identique de $\mathcal{F}|_{(V_i \cap V_j)}$. Enfin, pour trois indices quelconques i, j, k , si l'on pose $U_{ijk, \lambda} = U_{i\lambda} \cap U_{j\lambda} \cap U_{k\lambda}$, $U_{ijk, \lambda}$ est quasi-compact, et si $\theta'_{ij}, \theta'_{jk}$ et θ'_{ik} désignent les restrictions de θ_{ij}, θ_{jk} et θ_{ik} à $U_{ijk, \lambda}$, on a $u_\lambda^*(\theta'_{ij} \circ \theta'_{jk}) = u_\lambda^*(\theta'_{ik})$. Il y a donc, en vertu de (i), un indice $\mu \geq \lambda$ tel que l'on ait $u_{\lambda\mu}^*(\theta'_{ik}) = u_{\lambda\mu}^*(\theta'_{ij} \circ \theta'_{jk})$, donc les isomorphismes $u_{\lambda\mu}^*(\theta'_{ij}) : u_{\lambda\mu}^*(\mathcal{F}_i)|_{U_{ij\mu}} \xrightarrow{\sim} u_{\lambda\mu}^*(\mathcal{F}_j)|_{U_{ij\mu}}$ vérifient la condition de recollement, et définissent par suite sur S_μ un \mathcal{O}_{S_μ} -Module quasi-cohérent \mathcal{F}_μ de présentation finie (0₁, 3.3.1) tel que \mathcal{F} soit isomorphe à $u_\mu^*(\mathcal{F}_\mu)$.

Scolie (8.5.3). — Le résultat de (8.5.2) s'exprime encore en disant que si S_0 est quasi-compact et quasi-séparé, la catégorie des \mathcal{O}_S -modules quasi-cohérents de présentation finie est déterminée à équivalence près par la donnée des catégories des \mathcal{O}_{S_λ} -Modules quasi-cohérents de présentation finie, des foncteurs $u_{\lambda\mu}^*$ entre ces catégories, et des isomorphismes de transition $u_{\mu\nu}^* \circ u_{\lambda\mu}^* \xrightarrow{\sim} u_{\lambda\nu}^*$. De façon imagée, on peut dire que la donnée d'un \mathcal{O}_S -Module quasi-cohérent de présentation finie \mathcal{F} équivaut « fonctoriellement » à la donnée d'un \mathcal{O}_{S_λ} -Module de présentation finie \mathcal{F}'_λ pour λ grand et que, si un \mathcal{O}_{S_μ} -Module quasi-cohérent de présentation finie \mathcal{F}''_μ a aussi \mathcal{F} comme image réciproque, alors \mathcal{F}'_λ et \mathcal{F}''_μ ont même image réciproque dans un S_ν convenable ($\nu \geq \lambda, \nu \geq \mu$).

Nous allons interpréter de ce point de vue diverses notions liées aux \mathcal{O}_S -Modules quasi-cohérents.

Corollaire (8.5.4). — Supposons S_0 quasi-compact et quasi-séparé ; alors, pour tout \mathcal{O}_{S_λ} -Module quasi-cohérent \mathcal{G}_λ , l'homomorphisme canonique (8.5.1.4) est bijectif.

En effet, il suffit d'appliquer (8.5.2, (i)) au cas où $\mathcal{F}_\lambda = \mathcal{O}_{S_\lambda}$, qui est de présentation finie.

Proposition (8.5.5). — Supposons S_0 quasi-compact, et supposons que \mathcal{F}_λ soit un \mathcal{O}_{S_λ} -Module quasi-cohérent de présentation finie. Pour que \mathcal{F} soit localement libre (resp. localement libre de rang n), il faut et il suffit qu'il existe $\mu \geq \lambda$ tel que \mathcal{F}_μ le soit.

La condition étant trivialement suffisante, prouvons qu'elle est nécessaire. Si \mathcal{F} est localement libre (resp. localement libre de rang n), il existe un recouvrement ouvert affine fini (V_i) de S tel que $\mathcal{F}|_{V_i}$ soit isomorphe à $\mathcal{O}_S^{n_i}|_{V_i}$ (resp. $\mathcal{O}_S^n|_{V_i}$) pour tout i . En vertu de (8.2.11), il existe un $\nu \geq \lambda$ et pour chaque i un ouvert quasi-compact $U_{i\nu}$ de S_ν tels que $V_i = u_\nu^{-1}(U_{i\nu})$. Comme S_ν est quasi-compact, chaque $U_{i\nu}$ est réunion finie d'ouverts affines; on est donc ramené au cas où S_0 est affine et $\mathcal{F} = \mathcal{O}_S^n$; on sait alors qu'il existe $\mu \geq \lambda$ tel que \mathcal{F}_μ soit isomorphe à $\mathcal{O}_{S_\mu}^n$ (8.5.2.5).

Proposition (8.5.6). — Supposons S_0 quasi-compact, et considérons une suite

$$\mathcal{F}_\lambda \rightarrow \mathcal{G}_\lambda \rightarrow \mathcal{H}_\lambda \rightarrow 0$$

d'homomorphismes de \mathcal{O}_{S_λ} -Modules quasi-cohérents, où \mathcal{F}_λ et \mathcal{G}_λ sont de type fini et \mathcal{H}_λ de présentation finie. Pour que la suite correspondante $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$ soit exacte, il faut et il suffit qu'il existe $\mu \geq \lambda$ tel que la suite $\mathcal{F}_\mu \rightarrow \mathcal{G}_\mu \rightarrow \mathcal{H}_\mu \rightarrow 0$ le soit (auquel cas il en est de même de la suite $\mathcal{F}_\nu \rightarrow \mathcal{G}_\nu \rightarrow \mathcal{H}_\nu \rightarrow 0$ pour $\nu \geq \mu$).

Le fait que la condition soit suffisante et la dernière assertion résultent de ce que le foncteur u_λ^* (resp. $u_{\lambda\nu}^*$) est exact à droite. Pour démontrer que la condition est nécessaire, notons qu'il résulte de l'hypothèse et de (8.5.2, (i)) qu'il existe $\nu \geq \lambda$ tel que le composé $\mathcal{F}_\nu \rightarrow \mathcal{G}_\nu \rightarrow \mathcal{H}_\nu$ soit nul. Si l'on pose $\mathcal{H}'_\nu = \text{Coker}(\mathcal{F}_\nu \rightarrow \mathcal{G}_\nu)$, on a donc un homomorphisme $f_\nu : \mathcal{H}'_\nu \rightarrow \mathcal{H}_\nu$; par hypothèse, $u_\nu^*(f_\nu)$ est un isomorphisme, et il résulte donc de (8.5.2.4) qu'il existe $\mu \geq \nu$ tel que $u_{\nu\mu}^*(f_\nu)$ soit un isomorphisme, ce qui achève la démonstration.

Corollaire (8.5.7). — Supposons S_0 quasi-compact, \mathcal{F}_λ quasi-cohérent, \mathcal{G}_λ quasi-cohérent de type fini, et soit $f_\lambda : \mathcal{F}_\lambda \rightarrow \mathcal{G}_\lambda$ un homomorphisme. Pour que $f = u_\lambda^*(f_\lambda) : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ soit surjectif, il faut et il suffit qu'il existe $\mu \geq \lambda$ tel que $f_\mu = u_{\lambda\mu}^*(f_\lambda) : \mathcal{F}_\mu \rightarrow \mathcal{G}_\mu$ le soit.

C'est le cas particulier de (8.5.6) appliqué à la suite $0 \rightarrow \mathcal{H}_\lambda \rightarrow 0 \rightarrow 0$, où $\mathcal{H}_\lambda = \text{Coker}(f_\lambda)$, qui est quasi-cohérent et de type fini (compte tenu de ce que l'on a $\mathcal{H} = \text{Coker}(f)$ et $\mathcal{H}_\mu = \text{Coker}(f_\mu)$, en vertu de l'exactitude à droite des foncteurs u_λ^* et $u_{\lambda\mu}^*$).

Corollaire (8.5.8). — Supposons S_0 quasi-compact et les morphismes $u_{\lambda\mu} : S_\mu \rightarrow S_\lambda$ plats. Alors :

(i) Soit $\mathcal{F}_\lambda \xrightarrow{f_\lambda} \mathcal{G}_\lambda \xrightarrow{g_\lambda} \mathcal{H}_\lambda$ une suite d'homomorphismes de \mathcal{O}_{S_λ} -Modules quasi-cohérents, tels que $\text{Im } f_\lambda$ et $\text{Ker } g_\lambda$ soient de type fini. Pour que la suite correspondante $\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G} \xrightarrow{g} \mathcal{H}$ soit

exacte, il faut et il suffit qu'il existe $\mu \geq \lambda$ tel que la suite $\mathcal{F}_\mu \xrightarrow{i_\mu} \mathcal{G}_\mu \xrightarrow{g_\mu} \mathcal{H}_\mu$ soit exacte.

(ii) Soit $f_\lambda : \mathcal{F}_\lambda \rightarrow \mathcal{G}_\lambda$ un homomorphisme de \mathcal{O}_{S_λ} -Modules quasi-cohérents tel que $\text{Ker } f_\lambda$ soit de type fini. Pour que $f = u_\lambda^*(f_\lambda) : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ soit injectif, il faut et il suffit qu'il existe $\mu \geq \lambda$ tel que $f_\mu = u_{\lambda\mu}^*(f_\lambda) : \mathcal{F}_\mu \rightarrow \mathcal{G}_\mu$ le soit.

(i) Compte tenu de (8.3.8, (ii)), notons que, par platitude, $\text{Im } f$ et $\text{Ker } g$ (resp. $\text{Im } f_\mu$ et $\text{Ker } g_\mu$ pour $\mu \geq \lambda$) sont les images réciproques de $\text{Im } f_\lambda$ et $\text{Ker } g_\lambda$ ($\mathbf{0}_I$, 6.7.2). Supposons que la suite $\mathcal{F} \xrightarrow{i} \mathcal{G} \xrightarrow{g} \mathcal{H}$ soit exacte. Puisque $\text{Im } f_\lambda$ est de type fini, il existe $\mu \geq \lambda$ tel que le composé $\mathcal{F}_\mu \xrightarrow{i_\mu} \mathcal{G}_\mu \xrightarrow{g_\mu} \mathcal{H}_\mu$ soit nul, en vertu de (8.5.2, (i)). Changeant les notations, on peut donc déjà supposer que $g_\lambda \circ f_\lambda = 0$. Alors comme l'homomorphisme $\mathcal{F} \rightarrow \text{Ker } g$ est surjectif et que $\text{Ker } g_\lambda$ est de type fini, il résulte de (8.5.7) qu'il existe $\mu \geq \lambda$ tel que l'homomorphisme $\mathcal{F}_\mu \rightarrow \text{Ker } g_\mu$ soit surjectif, ce qui achève de prouver (i).

(ii) L'assertion est le cas particulier de (i) appliqué à la suite $0 \rightarrow \mathcal{F}_\lambda \rightarrow \mathcal{G}_\lambda$.

Lemme (8.5.9). — Supposons S_0 quasi-compact, \mathcal{F}_λ quasi-cohérent de type fini; soient \mathcal{G}'_λ et \mathcal{G}''_λ deux quotients quasi-cohérents de \mathcal{F}_λ , \mathcal{G}'_λ étant en outre supposé de présentation finie. Pour que \mathcal{G}'' soit quotient de \mathcal{G}' , il faut et il suffit qu'il existe $\mu \geq \lambda$ tel que \mathcal{G}''_μ soit quotient de \mathcal{G}'_μ .

Par hypothèse, il y a deux homomorphismes surjectifs $p'_\lambda : \mathcal{F}_\lambda \rightarrow \mathcal{G}'_\lambda$, $p''_\lambda : \mathcal{F}_\lambda \rightarrow \mathcal{G}''_\lambda$; en vertu de l'exactitude à droite de u_λ^* et de $u_{\lambda\mu}^*$, $p'_\mu = u_{\lambda\mu}^*(p'_\lambda)$, $p''_\mu = u_{\lambda\mu}^*(p''_\lambda)$, $p'_\mu = u_{\lambda\mu}^*(p'_\lambda)$ sont aussi surjectifs; en outre, s'il existe un homomorphisme $f : \mathcal{G}' \rightarrow \mathcal{G}''$ (resp. $f_\mu : \mathcal{G}'_\mu \rightarrow \mathcal{G}''_\mu$) tel que $p'' = f \circ p'$ (resp. $p''_\mu = f_\mu \circ p'_\mu$), cet homomorphisme est nécessairement *unique*, ce qui montre que la question est *locale* sur S_λ , et qu'on peut par suite (S_0 étant quasi-compact et L filtrant) supposer S_λ affine, donc *quasi-séparé*. Il est clair que la condition de l'énoncé est suffisante. Inversement, comme \mathcal{G}'_λ est de présentation finie, S_λ quasi-compact et quasi-séparé, il résulte de (8.5.2, (i)) que s'il existe un homomorphisme $f : \mathcal{G}' \rightarrow \mathcal{G}''$ tel que $p'' = f \circ p'$, il existe un $\mu \geq \lambda$ et un homomorphisme $f_\mu : \mathcal{G}'_\mu \rightarrow \mathcal{G}''_\mu$ tels que $f = u_\mu^*(f_\mu)$ et $p''_\mu = f_\mu \circ p'_\mu$, d'où le lemme.

(8.5.10) Dans la fin de ce numéro, pour tout Module quasi-cohérent \mathcal{F} sur un préschéma, notons $\Omega(\mathcal{F})$ l'ensemble des Modules quotients de \mathcal{F} qui sont de *présentation finie*. Si \mathcal{F}_λ est quasi-cohérent et $\mathcal{G}_\lambda \in \Omega(\mathcal{F}_\lambda)$, il résulte du fait que $u_{\lambda\mu}^*$ et u_λ^* sont exacts à droite, que l'on a $\mathcal{G}_\mu \in \Omega(\mathcal{F}_\mu)$ pour $\mu \geq \lambda$ et $\mathcal{G} \in \Omega(\mathcal{F})$; il est clair que $(\Omega(\mathcal{F}_\lambda), u_{\lambda\mu}^*)$ est un système inductif d'ensembles, et que les $u_\lambda^* : \Omega(\mathcal{F}_\lambda) \rightarrow \Omega(\mathcal{F})$ forment un système inductif d'applications, d'où, en passant à la limite inductive, une application canonique

$$(8.5.10.1) \quad u_\Omega : \varinjlim \Omega(\mathcal{F}_\lambda) \rightarrow \Omega(\mathcal{F}).$$

En outre, si (\mathcal{F}'_λ) est une seconde famille de \mathcal{O}_{S_λ} -Modules quasi-cohérents et si, pour tout λ , \mathcal{F}'_λ est un quotient de \mathcal{F}_λ , alors \mathcal{F}' est un quotient de \mathcal{F} et l'on a un diagramme commutatif

$$(8.5.10.2) \quad \begin{array}{ccc} \varinjlim \mathcal{Q}(\mathcal{F}_\lambda) & \xrightarrow{u_\Omega} & \mathcal{Q}(\mathcal{F}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \varinjlim \mathcal{Q}(\mathcal{F}'_\lambda) & \xrightarrow{u_\Omega} & \mathcal{Q}(\mathcal{F}') \end{array}$$

Proposition (8.5.11). — Supposons S_0 quasi-compact (resp. quasi-compact et quasi-séparé). Supposons \mathcal{F}_λ quasi-cohérent de type fini (resp. de présentation finie) pour tout λ ; alors l'application canonique (8.5.10.1) est injective (resp. bijective).

La première assertion résulte du lemme plus précis (8.5.9). Pour démontrer la seconde, considérons un \mathcal{O}_S -Module quotient \mathcal{G} de \mathcal{F} qui soit de présentation finie. Il résulte de (8.5.2, (ii)) qu'il existe un $\lambda' \in L$ et un $\mathcal{O}_{S_{\lambda'}}$ -Module $\mathcal{G}_{\lambda'}$ quasi-cohérent de présentation finie tels que $\mathcal{G} = u_{\lambda'}^*(\mathcal{G}_{\lambda'})$; comme L est filtrant, on peut supposer $\lambda' = \lambda$ (en remplaçant λ et λ' par un indice qui les majore). Considérons alors l'homomorphisme canonique $p : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$; il résulte de (8.5.2, (i)) qu'il existe un $\mu \geq \lambda$ et un homomorphisme $p_\mu : \mathcal{F}_\mu \rightarrow \mathcal{G}_\mu$ tels que $p = u_\mu^*(p_\mu)$. En outre, en vertu de (8.5.7), on peut supposer μ pris assez grand pour que p_μ soit surjectif, ce qui termine la démonstration.

8.6. Sous-préschémas de présentation finie d'une limite projective de préschémas.

(8.6.1) Étant donné un préschéma Y , désignons dans ce numéro par $\mathcal{E}\text{pr}(Y)$ l'ensemble ordonné (I, 4.1.10) des sous-préschémas de Y qui sont de *présentation finie* sur Y (1.6.1), par $\mathcal{E}\text{pro}(Y)$ (resp. $\mathcal{E}\text{prf}(Y)$) la partie de $\mathcal{E}\text{pr}(Y)$ formée des sous-préschémas induits sur des ouverts (resp. des sous-préschémas fermés) de Y , de présentation finie sur Y ; il revient au même de dire qu'un sous-préschéma Z de Y appartient à $\mathcal{E}\text{pro}(Y)$ (resp. $\mathcal{E}\text{prf}(Y)$) ou qu'il est induit sur un ouvert et que l'espace sous-jacent Z est *rétro-compact* dans Y (resp. qu'il est fermé et que l'idéal \mathcal{J} de \mathcal{O}_Y qui le définit est de *type fini*, ce qui signifie aussi que $j_*(\mathcal{O}_Z) \in \mathcal{Q}(\mathcal{O}_Y)$ si $j : Z \rightarrow Y$ est l'injection canonique) (1.6.1 et 1.4.5).

(8.6.2) Nous conservons toujours les notations de (8.2.2) et supposons que S_0 est un des S_λ . Soit Y_λ un sous-préschéma de S_λ ; alors $Y_\mu = u_{\lambda\mu}^{-1}(Y_\lambda)$ (resp. $Y = u_\lambda^{-1}(Y_\lambda)$) est un sous-préschéma de S_μ pour $\mu \geq \lambda$ (resp. de S); il est induit sur un ouvert (resp. il est fermé) si Y_λ l'est (I, 4.3.2) et de présentation finie sur S_μ (resp. S) si Y_λ est de présentation finie sur S_λ (1.6.2, (iii)). Par suite $(\mathcal{E}\text{pr}(S_\lambda), u_{\lambda\mu}^{-1})$ (resp. $(\mathcal{E}\text{pro}(S_\lambda), u_{\lambda\mu}^{-1}), (\mathcal{E}\text{prf}(S_\lambda), u_{\lambda\mu}^{-1})$) est un *système inductif* et les applications $u_\lambda^{-1} : \mathcal{E}\text{pr}(S_\lambda) \rightarrow \mathcal{E}\text{pr}(S)$ (resp. $\mathcal{E}\text{pro}(S_\lambda) \rightarrow \mathcal{E}\text{pro}(S)$, $\mathcal{E}\text{prf}(S_\lambda) \rightarrow \mathcal{E}\text{prf}(S)$) forment un système inductif d'applications; d'où, en passant à la limite inductive, des applications canoniques

$$(8.6.2.1) \quad \varinjlim \mathcal{E}\text{pr}(S_\lambda) \rightarrow \mathcal{E}\text{pr}(S)$$

$$(8.6.2.2) \quad \varinjlim \mathcal{E}\text{pro}(S_\lambda) \rightarrow \mathcal{E}\text{pro}(S)$$

$$(8.6.2.3) \quad \varinjlim \mathcal{E}\text{prf}(S_\lambda) \rightarrow \mathcal{E}\text{prf}(S).$$

Rappelons (I, 4.1.10) que $\mathfrak{Spr}(X)$, pour tout préschéma X , est un ensemble ordonné par la relation « Z est un sous-préschéma du sous-préschéma Y » qui s'écrit $Z \leq Y$. Les applications $u_{\lambda\mu}^{-1}$ et u_{λ}^{-1} sont croissantes pour les relations d'ordre correspondantes dans $\mathfrak{Spr}(S_{\lambda})$, $\mathfrak{Spr}(S_{\mu})$, $\mathfrak{Spr}(S)$. En outre, on définit une relation d'ordre dans l'ensemble $\varinjlim \mathfrak{Spr}(S_{\lambda})$ en écrivant que $\eta \leq \eta'$ pour deux éléments de cet ensemble lorsqu'il existe un λ et deux éléments $Y_{\lambda}, Y'_{\lambda}$ de $\mathfrak{Spr}(S_{\lambda})$, dont η et η' sont les images canoniques, et qui sont tels que $Y_{\lambda} \leq Y'_{\lambda}$; on vérifie aisément que cela ne dépend pas des représentants $Y_{\lambda}, Y'_{\lambda}$ considérés, et que l'on a bien ainsi une relation d'ordre. Cela étant, le fait que les u_{λ}^{-1} sont croissantes entraîne aussitôt que l'application canonique (8.6.2.1) est croissante; il en est de même évidemment de (8.6.2.2) et (8.6.2.3).

Proposition (8.6.3). — *Supposons S_0 quasi-compact (resp. quasi-compact et quasi-séparé). Alors les applications (8.6.2.1), (8.6.2.2), (8.6.2.3) sont injectives (resp. bijectives).*

Compte tenu des remarques de (8.6.1), les assertions relatives à (8.6.2.3) découlent de (8.5.11) appliqué à $\mathcal{F}_{\lambda} = \mathcal{O}_{S_{\lambda}}$; de même, les assertions relatives à (8.6.2.2) sont des cas particuliers de (8.3.5) et (8.3.11), compte tenu de ce que les S_{λ} et S sont quasi-compacts. Reste à considérer l'application (8.6.2.1). Prouvons d'abord qu'elle est surjective lorsque S_0 est quasi-compact et quasi-séparé. Soit Z un sous-préschéma de S , de présentation finie sur S ; comme S est quasi-compact, il en est de même de Z , donc il existe un ouvert quasi-compact U de S tel que Z soit un sous-préschéma fermé de U , de présentation finie sur U . Il existe alors un indice λ et un ouvert quasi-compact U_{λ} de S_{λ} tels que $U = u_{\lambda}^{-1}(U_{\lambda})$ (8.2.11); comme S_{λ} est quasi-séparé, il en est de même de U_{λ} (1.2.7), et par suite on peut se borner au cas où $U = S$; mais dans ce cas, on est ramené au fait que (8.6.2.3) est surjective.

Enfin, pour voir que (8.6.2.1) est injective lorsque S_0 est quasi-compact, il suffira de prouver le résultat plus précis suivant :

Corollaire (8.6.3.1). — *Supposons S_0 quasi-compact et soient $Z'_{\lambda}, Z''_{\lambda}$ deux sous-préschémas de S_{λ} , de présentation finie sur S_{λ} . Pour que $Z' = u_{\lambda}^{-1}(Z'_{\lambda})$ soit majoré par $Z'' = u_{\lambda}^{-1}(Z''_{\lambda})$ (I, 4.1.10), il faut et il suffit qu'il existe $\mu \geq \lambda$ tel que $Z'_{\mu} = u_{\lambda\mu}^{-1}(Z'_{\lambda})$ soit majoré par $Z''_{\mu} = u_{\lambda\mu}^{-1}(Z''_{\lambda})$.*

Il est trivial que la condition est suffisante. Pour voir qu'elle est nécessaire, notons d'abord que les ensembles sous-jacents Z'_{λ} et Z''_{λ} sont localement constructibles dans S_{λ} par hypothèse (1.8.4), donc l'hypothèse entraîne l'existence d'un $\nu \geq \lambda$ tel que $Z'_{\nu} \subset Z''_{\nu}$ (8.3.5); remplaçant λ par ν , on peut donc déjà supposer que l'on a $Z'_{\lambda} \subset Z''_{\lambda}$. En outre, par hypothèse (1.6.1), les sous-espaces Z'_{λ} et Z''_{λ} de S_{λ} sont quasi-compacts; pour tout point $x \in Z'_{\lambda}$, il y a un voisinage ouvert quasi-compact $V(x)$ dans S_{λ} tels que $V(x) \cap Z'_{\lambda}$ et $V(x) \cap Z''_{\lambda}$ soient fermés dans $V(x)$. En recouvrant S_{λ} par un nombre fini de voisinages $V(x_i)$ on voit donc qu'il y a un ouvert quasi-compact U_{λ} de S_{λ} contenant Z'_{λ} et tel que Z'_{λ} et $Z''_{\lambda} \cap U_{\lambda}$ soient fermés dans U_{λ} . Si l'on désigne par Y_{λ} le sous-préschéma induit par Z''_{λ} sur $U_{\lambda} \cap Z'_{\lambda}$, il est clair qu'avec les notations habituelles, Y_{μ} (resp. Y) est induit par Z''_{μ} sur $U_{\mu} \cap Z'_{\mu}$ pour $\mu \geq \lambda$ (resp. par Z'' sur $U \cap Z'$); en outre Z' est majoré par Y (I, 4.4.1), et comme il suffit de prouver que Z'_{μ} est majoré par Y_{μ} pour μ

assez grand, on voit finalement qu'on est ramené (en remplaçant S_λ par U_λ) au cas où Z'_λ et Z''_λ sont des sous-préschémas fermés de S_λ . Mais alors, cela a déjà été démontré puisque (8.6.2.3) est croissante et injective.

Corollaire (8.6.4). — *Supposons S_0 quasi-compact, et soit Z_λ un sous-préschéma de S_λ , de présentation finie sur S_λ . Pour que $Z = u_\lambda^{-1}(Z_\lambda)$ soit un sous-préschéma induit sur un ouvert (resp. un sous-préschéma fermé) de S , il faut et il suffit qu'il existe $\mu \geq \lambda$ tel que $Z_\mu = u_{\lambda\mu}^{-1}(Z_\lambda)$ soit induit sur un ouvert (resp. un sous-préschéma fermé) dans S_μ .*

Soit $(U_\lambda^{(i)})$ un recouvrement ouvert affine fini de S_λ , et posons $U_\mu^{(i)} = u_{\lambda\mu}^{-1}(U_\lambda^{(i)})$ pour $\mu \geq \lambda$ et $U^{(i)} = u_\lambda^{-1}(U_\lambda^{(i)})$. Si Z est ouvert (resp. fermé) dans S , $Z \cap U^{(i)}$ l'est dans $U^{(i)}$, et inversement si chacun des $Z_\mu \cap U_\mu^{(i)}$ est ouvert (resp. fermé) dans $U_\mu^{(i)}$, Z_μ l'est dans S_μ . Puisque L est filtrant, il suffit de démontrer le corollaire lorsque S_λ est affine, donc quasi-séparé. Mais alors le résultat découle de ce que les applications (8.6.2.1), (8.6.2.2) et (8.6.2.3) sont bijectives.

8.7. Critères pour qu'une limite projective de préschémas soit un préschéma réduit (resp. intègre).

Nous conservons les hypothèses et notations de (8.2.2) et supposons toujours que S_0 est un des S_λ .

Proposition (8.7.1). — *Supposons que S soit non réduit. Alors il existe λ_0 tel que pour $\lambda \geq \lambda_0$, S_λ soit non réduit.*

La question étant locale sur S_0 , on peut supposer $S_0 = \text{Spec}(A_0)$ affine, d'où $S = \text{Spec}(A)$, où $A = \varinjlim A_\lambda$ est la limite inductive d'un système inductif de A_0 -algèbres (A_λ) . On sait alors (5.13.2) que le nilradical de A est la limite inductive de ceux des A_λ ; s'il n'est pas nul, un des A_λ contient donc un élément nilpotent $a_\lambda \neq 0$ dont l'image dans A est un élément nilpotent et $\neq 0$, et l'image de a_λ dans les A_μ pour $\mu \geq \lambda$ est par suite un élément nilpotent et $\neq 0$.

Proposition (8.7.2). — *Supposons vérifiée l'une des hypothèses suivantes :*

a) S_0 est quasi-compact, le nilradical \mathcal{N}_0 de \mathcal{O}_{S_0} est un idéal de type fini (ce qui sera par exemple vérifié lorsque S_0 est noethérien), et les morphismes $u_{\lambda\mu} : S_\mu \rightarrow S_\lambda$ sont des immersions ouvertes.

b) Les morphismes $u_{\lambda\mu} : S_\mu \rightarrow S_\lambda$ sont fidèlement plats.

Sous ces conditions, pour que S soit réduit, il faut et il suffit qu'il existe λ_0 tel que S_λ soit réduit pour $\lambda \geq \lambda_0$.

En outre, dans le cas b), si S est réduit, tous les S_λ le sont.

La dernière assertion résulte de ce que le morphisme $S \rightarrow S_\lambda$ est alors fidèlement plat pour tout λ (8.3.8) et de (2.1.13). D'autre part, (8.7.1) prouve que la condition de l'énoncé est suffisante (sans hypothèse sur S_0 ni sur les $u_{\lambda\mu}$). Il reste donc à voir que la condition est nécessaire dans l'hypothèse a); alors (8.2.13), l'espace sous-jacent à S s'identifie à l'intersection des espaces sous-jacents aux S_λ (les S_λ étant identifiés à des sous-préschémas induits sur des ouverts de S_0), et le faisceau structural \mathcal{O}_S s'identifie au

faisceau induit sur S par tous les \mathcal{O}_{S_λ} ; en particulier pour tout $s \in S$, l'anneau local \mathcal{O}_s est le même pour S et pour tous les S_λ . Si \mathcal{N}_λ est le Nilradical de \mathcal{O}_{S_λ} , le Nilradical \mathcal{N} de \mathcal{O}_s a donc en chaque point de S la même fibre \mathcal{N}_s (nilradical de \mathcal{O}_s) que $u_\lambda^*(\mathcal{N}_\lambda)$ (induit sur S par \mathcal{N}_λ). L'hypothèse que S est réduit entraîne par suite $u_\lambda^*(\mathcal{N}_\lambda) = 0$; comme \mathcal{N}_0 est supposé de type fini, il en est de même des \mathcal{N}_λ , et la conclusion résulte donc de (8.5.7).

Corollaire (8.7.3). — *Supposons vérifiée l'une des hypothèses suivantes :*

a) S_0 est un préschéma noethérien et les morphismes $u_{\lambda\mu} : S_\mu \rightarrow S_\lambda$ sont des immersions ouvertes.

b) Les morphismes $u_{\lambda\mu} : S_\mu \rightarrow S_\lambda$ sont fidèlement plats.

Alors, pour que S soit intègre, il faut et il suffit qu'il existe λ_0 tel que S_λ soit intègre pour $\lambda \geq \lambda_0$.

Dire qu'un préschéma est intègre signifie qu'il est à la fois réduit et irréductible; le corollaire résulte donc de (8.7.2) et de (8.4.3).

Remarque (8.7.4). — Si l'on ne fait pas d'hypothèse sur les $u_{\lambda\mu}$, il peut se faire que S soit intègre bien que tous les S_λ soient non réduits et non connexes, comme le montre l'exemple (8.4.4), où on prend l'anneau A non réduit.

8.8. Préschémas de présentation finie sur une limite projective de préschémas.

(8.8.1) Conservant toujours les notations et hypothèses de (8.2.2), nous supposons donnés dans cette section deux S_α -préschémas X_α, Y_α , ce qui définit (8.2.5) deux systèmes projectifs de préschémas $(X_\lambda, v_{\lambda\mu})$ et $(Y_\lambda, w_{\lambda\mu})$ en posant $X_\lambda = X_\alpha \times_{S_\alpha} S_\lambda$, $Y_\lambda = Y_\alpha \times_{S_\alpha} S_\lambda$, $v_{\lambda\mu} = I_{X_\alpha} \times u_{\lambda\mu}$, $w_{\lambda\mu} = I_{Y_\alpha} \times u_{\lambda\mu}$ (pour $\alpha \leq \lambda \leq \mu$), dont les limites projectives sont respectivement $X = X_\alpha \times_{S_\alpha} S$, $Y = Y_\alpha \times_{S_\alpha} S$, les morphismes canoniques $v_\lambda : X \rightarrow X_\lambda$ et $w_\lambda : Y \rightarrow Y_\lambda$ étant respectivement égaux à $I_{X_\alpha} \times u_\lambda$ et $I_{Y_\alpha} \times u_\lambda$. Pour $\alpha \leq \lambda \leq \mu$, on a une application canonique $e_{\mu\lambda} : \text{Hom}_{S_\lambda}(X_\lambda, Y_\lambda) \rightarrow \text{Hom}_{S_\mu}(X_\mu, Y_\mu)$, qui à tout S_λ -morphisme $f_\lambda : X_\lambda \rightarrow Y_\lambda$ fait correspondre $f_\mu = f_\lambda \times I_{S_\mu} : X_\lambda \times_{S_\lambda} S_\mu \rightarrow Y_\lambda \times_{S_\lambda} S_\mu$, et il est clair que $(\text{Hom}_{S_\lambda}(X_\lambda, Y_\lambda), e_{\lambda\mu})$ est un système inductif d'ensembles. De même, on a une application canonique $e_\lambda : \text{Hom}_{S_\lambda}(X_\lambda, Y_\lambda) \rightarrow \text{Hom}_S(X, Y)$ qui à f_λ fait correspondre $f = f_\lambda \times I_S : X_\lambda \times_{S_\lambda} S \rightarrow Y_\lambda \times_{S_\lambda} S$ et (e_λ) est un système inductif d'applications; d'où, en passant à la limite inductive, une application canonique, fonctorielle en S_α, X_α et Y_α :

$$(8.8.1.1) \quad e : \varinjlim \text{Hom}_{S_\lambda}(X_\lambda, Y_\lambda) \rightarrow \text{Hom}_S(X, Y).$$

Théorème (8.8.2). — (i) *Supposons X_α quasi-compact (resp. quasi-compact et quasi-séparé), et Y_α localement de type fini (resp. localement de présentation finie) sur S_α . Alors l'application (8.8.1.1) est injective (resp. bijective).*

(ii) *Supposons S_0 quasi-compact et quasi-séparé. Pour tout préschéma X de présentation finie sur S , il existe un $\lambda \in L$, un préschéma X_λ de présentation finie sur S_λ , et un S -isomorphisme $X \xrightarrow{\sim} X_\lambda \times_{S_\lambda} S$.*

(i) Considérons d'abord le cas où $S_0 = \text{Spec}(A_0)$, $X_\alpha = \text{Spec}(B_\alpha)$ et $Y_\alpha = \text{Spec}(C_\alpha)$ sont affines; alors les $S_\lambda = \text{Spec}(A_\lambda)$ et $S = \text{Spec}(A)$ sont aussi affines, avec $A = \varinjlim A_\lambda$, et les assertions de (i) sont équivalentes au

Lemme (8.8.2.1). — Soient A_0 un anneau, $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ un système inductif de A_0 -algèbres, $A = \varinjlim A_\lambda$; soient B_α une A_α -algèbre, C_α une A_α -algèbre de type fini (resp. de présentation finie). Alors l'homomorphisme canonique

(8.8.2.2)

$$\varinjlim_{\lambda} \text{Hom}_{A_\lambda\text{-alg.}}(C_\alpha \otimes_{A_\alpha} A_\lambda, B_\alpha \otimes_{A_\alpha} A_\lambda) \rightarrow \text{Hom}_{A\text{-alg.}}(C_\alpha \otimes_{A_\alpha} A, B_\alpha \otimes_{A_\alpha} A)$$

est injectif (resp. bijectif).

On sait que l'on a des isomorphismes canoniques fonctoriels

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{A_\lambda\text{-alg.}}(C_\alpha \otimes_{A_\alpha} A_\lambda, B_\alpha \otimes_{A_\alpha} A_\lambda) &\xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{A_\alpha\text{-alg.}}(C_\alpha, B_\alpha \otimes_{A_\alpha} A_\lambda) \\ \text{Hom}_{A\text{-alg.}}(C_\alpha \otimes_{A_\alpha} A, B_\alpha \otimes_{A_\alpha} A) &\xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{A_\alpha\text{-alg.}}(C_\alpha, B_\alpha \otimes_{A_\alpha} A) \end{aligned}$$

en vertu de la propriété universelle du produit tensoriel de deux algèbres. Il suffit donc de prouver le

Lemme (8.8.2.3). — Soient E un anneau, G une E -algèbre de type fini (resp. de présentation finie), (F_λ) un système inductif de E -algèbres. Alors l'homomorphisme canonique

$$\varinjlim \text{Hom}_{E\text{-alg.}}(G, F_\lambda) \rightarrow \text{Hom}_{E\text{-alg.}}(G, \varinjlim F_\lambda)$$

qui, à tout système inductif d'homomorphismes $\theta_\lambda : G \rightarrow F_\lambda$ de E -algèbres, fait correspondre sa limite inductive, est injectif (resp. bijectif).

Supposons d'abord la E -algèbre G de type fini, et soit $(t_i)_{1 \leq i \leq n}$ un système de générateurs de cette E -algèbre; montrons que si (θ'_λ) , (θ''_λ) sont deux systèmes inductifs d'homomorphismes $G \rightarrow F_\lambda$ tels que $\varinjlim \theta'_\lambda = \varinjlim \theta''_\lambda$, il existe un $\mu \geq \lambda$ tel que $\theta'_\mu = \theta''_\mu$. En effet, si $\varphi_{\mu\lambda} : F_\lambda \rightarrow F_\mu$ et $\varphi_\lambda : F_\lambda \rightarrow F = \varinjlim F_\lambda$ sont les homomorphismes canoniques du système inductif (F_λ) , par hypothèse, pour chaque indice i , il existe un indice λ_i tel que $\varphi_{\lambda_i}(\theta'_{\lambda_i}(t_i)) = \varphi_{\lambda_i}(\theta''_{\lambda_i}(t_i))$, et l'on peut supposer tous les λ_i égaux à un même λ ; il en résulte de la même manière l'existence d'un $\mu \geq \lambda$ tel que $\varphi_{\mu\lambda}(\theta'_\lambda(t_i)) = \varphi_{\mu\lambda}(\theta''_\lambda(t_i))$ pour $1 \leq i \leq n$, c'est-à-dire $\theta'_\mu(t_i) = \theta''_\mu(t_i)$ pour $1 \leq i \leq n$, d'où $\theta'_\mu = \theta''_\mu$.

Supposons en second lieu G de présentation finie, de sorte que l'on a

$$G = E[T_1, \dots, T_n] / \mathfrak{J},$$

où \mathfrak{J} est un idéal de type fini, t_i étant la classe de T_i mod. \mathfrak{J} . Soit $(P_j)_{1 \leq j \leq m}$ un système de générateurs de \mathfrak{J} . Supposons donné un homomorphisme de E -algèbres $\theta : G \rightarrow F$; posons $b_i = \theta(t_i)$; par définition, on a donc $P_j(b_1, b_2, \dots, b_n) = \theta(P_j(t_1, \dots, t_n)) = 0$ pour $1 \leq j \leq m$. Or, il existe un λ et des éléments x_1, \dots, x_n dans F_λ tels que $b_i = \varphi_\lambda(x_i)$ pour $1 \leq i \leq n$; on a donc $\varphi_\lambda(P_j(x_1, \dots, x_n)) = P_j(b_1, \dots, b_n) = 0$, et par suite il existe $\mu \geq \lambda$ tel que $\varphi_{\mu\lambda}(P_j(x_1, \dots, x_n)) = P_j(\varphi_{\mu\lambda}(x_1), \dots, \varphi_{\mu\lambda}(x_n)) = 0$ pour $1 \leq j \leq m$; on en conclut qu'il existe un homomorphisme de E -algèbres $\theta_\mu : G \rightarrow F_\mu$ tel que $\theta_\mu(t_i) = \varphi_{\mu\lambda}(x_i)$

pour $1 \leq i \leq n$; on en déduit pour tout $\nu \geq \mu$ un homomorphisme de E-algèbres $\theta_\nu = \varphi_{\nu\mu} \circ \theta_\mu$ de G dans F_ν , et il est clair que θ est la limite inductive de ce système inductif d'homomorphismes, ce qui achève de démontrer le lemme.

Passons maintenant au cas où X_α est quasi-compact et Y_α localement de type fini sur S_α . Posons $Z_\alpha = X_\alpha \times_{S_\alpha} Y_\alpha$ et introduisons le système projectif correspondant des $Z_\lambda = Z_\alpha \times_{S_\alpha} S_\lambda = X_\lambda \times_{S_\lambda} Y_\lambda$ et sa limite $Z = Z_\alpha \times_{S_\alpha} S = X \times_S Y$; les bijections canoniques (I, 3.3.14) donnent des diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccccc} \text{Hom}_{S_\lambda}(X_\lambda, Y_\lambda) & \xrightarrow{e_{\mu\lambda}} & \text{Hom}_{S_\mu}(X_\mu, Y_\mu) & \xrightarrow{e_\mu} & \text{Hom}_S(X, Y) \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ \text{Hom}_{X_\lambda}(X_\lambda, Z_\lambda) & \xrightarrow{e_{\mu\lambda}} & \text{Hom}_{X_\mu}(X_\mu, Z_\mu) & \xrightarrow{e_\mu} & \text{Hom}_X(X, Z) \end{array}$$

et par suite on est ramené à prouver que (8.8.1.1) est injective dans le cas particulier où $S_\alpha = X_\alpha$ (compte tenu de (1.3.4)). De plus, comme X_α est quasi-compact, donc réunion finie d'ouverts affines, on peut supposer X_α affine (L étant filtrant). Supposons donc donnés deux X_α -morphisms $f'_\alpha : X_\alpha \rightarrow Y_\alpha$, $f''_\alpha : X_\alpha \rightarrow Y_\alpha$ tels que f' et f'' soient des X-morphismes égaux de X dans Y; il s'agit de prouver que $f'_\mu = f''_\mu$ pour $\mu \geq \alpha$ assez grand. Comme X_α est quasi-compact, il en est de même de $f'_\alpha(X_\alpha) \cup f''_\alpha(X_\alpha)$, et comme Y_α est localement de type fini sur X_α , $f'_\alpha(X_\alpha) \cup f''_\alpha(X_\alpha)$ est contenu dans une réunion finie d'ouverts affines $V_{i\alpha}$ de Y_α , de type fini sur X_α . Posons $U'_{i\alpha} = f'^{-1}_\alpha(V_{i\alpha})$, $U''_{i\alpha} = f''^{-1}_\alpha(V_{i\alpha})$, $U_{i\alpha} = U'_{i\alpha} \cap U''_{i\alpha}$, $U_\alpha = \bigcup_i U_{i\alpha}$. L'hypothèse $f' = f''$ entraîne $v_\alpha^{-1}(U'_{i\alpha}) = v_\alpha^{-1}(U''_{i\alpha})$, ces deux ensembles étant respectivement égaux à $f'^{-1}(w_\alpha^{-1}(V_{i\alpha}))$ et à $f''^{-1}(w_\alpha^{-1}(V_{i\alpha}))$. Comme les $V_{i\alpha}$ recouvrent Y_α , on a $v_\alpha^{-1}(U_\alpha) = f'^{-1}(Y) = X$. Comme X_α est quasi-compact et que toute partie ouverte de X_λ est ind-constructible, il résulte de (8.3.4) qu'il y a un indice $\lambda \geq \alpha$ tel que les $U_{i\mu} = v_{\alpha\mu}^{-1}(U_{i\alpha})$ forment un recouvrement de X_μ . Remplaçant α par μ , on peut donc supposer que les $U_{i\alpha}$ recouvrent X_α ; cela entraîne que pour tout $x \in X_\alpha$, il y a un voisinage ouvert affine $W(x)$ contenu dans un des $U_{i\alpha}$, autrement dit tel que les restrictions de f'_α et f''_α à $W(x)$ appliquent $W(x)$ dans un même ouvert affine $V_{i\alpha}$. Comme X_α est quasi-compact, il est recouvert par un nombre fini d'ouverts affines $W(x_k)$; en vertu du lemme (8.8.2.1) et du fait que L est filtrant, il existe un $\lambda \geq \alpha$ tel que les restrictions de f'_λ et f''_λ à chacun des ouverts $v_{\alpha\lambda}^{-1}(W(x_k))$ soient égales, d'où $f'_\lambda = f''_\lambda$.

Supposons maintenant X_α quasi-compact et quasi-séparé et Y_α localement de présentation finie sur S_α , et prouvons que (8.8.1.1) est surjective. Supposons donc donné un X-morphisme $f : X \rightarrow Y$. Comme X est quasi-compact, il en est de même

de $f(X)$, et par suite il y a un ouvert quasi-compact Y' dans Y qui contient $f(X)$; il existe par suite un $\lambda \geq \alpha$ et un ouvert quasi-compact Y'_λ dans Y_λ tels que $Y' = w_\lambda^{-1}(Y'_\lambda)$ (8.2.11). Remplaçant au besoin α par λ et Y_λ par Y'_λ , on peut donc se borner au cas où Y_α est *quasi-compact*, donc aussi Y et les Y_λ . Comme Y est quasi-compact, il est réunion finie d'ouverts affines V_i , et par suite X est réunion des ouverts $f^{-1}(V_i)$. Comme tout point de X a un voisinage ouvert quasi-compact contenu dans un des $f^{-1}(V_i)$ et que X est quasi-compact, on peut, en tenant compte de (8.2.11) et remplaçant au besoin α par un indice $\lambda \geq \alpha$, supposer que Y est réunion finie d'ouverts $V_i = w_\alpha^{-1}(V_{i\alpha})$, où les $V_{i\alpha}$ sont des ouverts affines de Y_α ; par suite X est réunion des ouverts $f^{-1}(V_i)$. Comme tout point de X a un voisinage ouvert quasi-compact contenu dans l'un des $f^{-1}(V_i)$ et que X est quasi-compact, on peut recouvrir X par un nombre fini de tels voisinages, et (en répétant au besoin certains des V_i) supposer que l'on a un recouvrement (U_i) de X par des ouverts quasi-compacts ayant même ensemble d'indices que (V_i) et tel que $f(U_i) \subset V_i$ pour tout i . En outre, à l'aide de (8.2.11) (et en remplaçant au besoin α par un indice $\lambda \geq \alpha$), on peut supposer que l'on a $U_i = v_\alpha^{-1}(U_{i\alpha})$ où les $U_{i\alpha}$ sont des ouverts quasi-compacts dans X_α ; de plus, utilisant (8.3.4) comme ci-dessus, on peut supposer que $(U_{i\alpha})$ est un *recouvrement* de X_α .

Cela étant, il suffira de montrer qu'il existe un $\lambda \geq \alpha$ et pour chaque i un morphisme $f_{i\lambda} : U_{i\lambda} \rightarrow V_{i\lambda}$ (avec $U_{i\lambda} = v_{\alpha\lambda}^{-1}(U_{i\alpha})$ et $V_{i\lambda} = w_{\alpha\lambda}^{-1}(V_{i\alpha})$) tels que le morphisme correspondant $f_i = e_\lambda(f_{i\lambda}) : U_i \rightarrow V_i$ soit égal à la *restriction de f* à U_i . En effet, s'il en est ainsi, comme X_λ est quasi-séparé (1.2.3), les $U_{i\lambda} \cap U_{j\lambda}$ sont *quasi-compacts* et le résultat d'unicité démontré plus haut (qui s'applique puisque Y_λ est localement de type fini sur S_λ) prouve qu'il existe $\mu \geq \lambda$ tel que $f_{i\mu}$ et $f_{j\mu}$ coïncident dans $U_{i\mu} \cap U_{j\mu}$ pour tout couple (i, j) , et par suite définissent un S_μ -morphisme $f_\mu : X_\mu \rightarrow Y_\mu$ tel que $e_\mu(f_\mu) = f$.

On est ainsi ramené au cas où Y_α est *affine*, et comme en outre on peut supposer que les $V_{i\alpha}$ ont des images dans S_α contenues dans des ouverts affines, on peut aussi supposer que S_α est affine, soient donc $S_\alpha = \text{Spec}(A_\alpha)$, $Y_\alpha = \text{Spec}(C_\alpha)$, C_α étant une A_α -algèbre de présentation finie, $S = \text{Spec}(A)$, $Y = \text{Spec}(C)$, avec $A = \varinjlim A_\lambda$, $C = \varinjlim (C_\alpha \otimes_{A_\lambda} A_\lambda) = C_\alpha \otimes_{A_\alpha} A$. On a alors

$$\text{Hom}_S(X, Y) = \text{Hom}_{A\text{-alg.}}(C, \Gamma(X, \mathcal{O}_X)) = \text{Hom}_{A_\alpha\text{-alg.}}(C_\alpha, \Gamma(X, \mathcal{O}_X))$$

(I, 2.2.4) et de même

$$\text{Hom}_{S_\lambda}(X_\lambda, Y_\lambda) = \text{Hom}_{A_\lambda\text{-alg.}}(C_\alpha \otimes_{A_\alpha} A_\lambda, \Gamma(X_\lambda, \mathcal{O}_{X_\lambda})) = \text{Hom}_{A_\alpha\text{-alg.}}(C_\alpha, \Gamma(X_\lambda, \mathcal{O}_{X_\lambda})).$$

Mais comme X_α est quasi-compact et quasi-séparé, on sait (8.5.4) que l'on a $\varinjlim \Gamma(X_\lambda, \mathcal{O}_{X_\lambda}) = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$; puisque C_α est une A_α -algèbre de présentation finie, le fait que (8.8.1.1) est bijectif résulte alors de (8.8.2.3).

Avant de passer à la démonstration de (ii), notons les corollaires suivants de (i) :

Corollaire (8.8.2.4). — *Supposons S_0 quasi-compact, X_α de présentation finie sur S_α , Y_α de type fini sur S_α et quasi-séparé sur S_α (ce qui sera par exemple le cas si Y_α est également*

de présentation finie sur S_α). Soit $f_\alpha : X_\alpha \rightarrow Y_\alpha$ un S_α -morphisme. Pour que $f : X \rightarrow Y$ soit un isomorphisme, il faut et il suffit qu'il existe $\lambda \geq \alpha$ tel que $f_\lambda : X_\lambda \rightarrow Y_\lambda$ soit un isomorphisme.

La condition est évidemment suffisante. Pour prouver qu'elle est nécessaire, notons d'abord que la question étant locale sur S_0 (puisque L est filtrant), on peut toujours supposer S_0 affine, donc quasi-séparé. Il y a par hypothèse un S -morphisme $g : Y \rightarrow X$ tel que $g \circ f = 1_X$ et $f \circ g = 1_Y$. Comme X_α est de présentation finie sur S_α , et Y_α quasi-compact et quasi-séparé (puisque S_α est quasi-compact et quasi-séparé), il existe un $\mu \geq \alpha$ et un S_μ -morphisme $g_\mu : Y_\mu \rightarrow X_\mu$ tels que $g = g_\mu \times 1_S$ en vertu de (8.8.2, (i)). D'autre part, il résulte aussi de (8.8.2, (i)) et des relations $g \circ f = 1_X$ et $f \circ g = 1_Y$ qu'il existe $\nu \geq \mu$ tel que l'on ait $g_\nu \circ f_\nu = 1_{X_\nu}$ et $f_\nu \circ g_\nu = 1_{Y_\nu}$, puisque X_α et Y_α sont de type fini sur S_α et quasi-compacts. Cela signifie que $f_\nu : X_\nu \rightarrow Y_\nu$ est un isomorphisme, d'où le corollaire.

Corollaire (8.8.2.5). — Supposons S_0 quasi-compact et quasi-séparé, X_α et Y_α de présentation finie sur S_α . Pour que X et Y soient S -isomorphes, il faut et il suffit qu'il existe $\lambda \geq \alpha$ tels que X_λ et Y_λ soient S_λ -isomorphes. De plus, pour tout S -isomorphisme $f : X \xrightarrow{\sim} Y$, il existe $\mu \geq \lambda$ et un S_μ -isomorphisme $f_\mu : X_\mu \rightarrow Y_\mu$ tels que $f = f_\mu \times 1_S$.

La condition est évidemment suffisante; inversement, s'il existe un S -isomorphisme $f : X \rightarrow Y$, il résulte de (8.8.2, (i)) que f est de la forme $f_\mu \times 1_S$ pour un $\mu \geq \alpha$ et un homomorphisme $f_\mu : X_\mu \rightarrow Y_\mu$; mais comme f est un isomorphisme, il résulte de (8.8.2.4) qu'il existe $\nu \geq \mu$ tel que $f_\nu : X_\nu \rightarrow Y_\nu$ soit un isomorphisme.

(ii) Considérons encore en premier lieu le cas où $S_0 = \text{Spec}(A_0)$ et $X = \text{Spec}(B)$ sont affines; alors l'assertion de (ii) équivaut au lemme (1.8.4.2).

Pour démontrer (ii) dans le cas général, notons que S est quasi-compact et quasi-séparé; comme X est de présentation finie sur S et S affine sur S_0 , il existe donc un recouvrement fini (U_i) de S_0 et, si (W_i) est le recouvrement ouvert affine de S formé des images réciproques des U_i par le morphisme $S \rightarrow S_0$, un recouvrement fini (X_r) de X par des ouverts affines tel que l'image par $X \rightarrow S$ de chaque X_r soit contenue dans un $W_{i(r)}$; l'anneau $A(X_r)$ est alors une algèbre de présentation finie sur l'anneau $A(W_{i(r)})$ (1.4.6). En vertu du lemme (1.8.4.2) et du fait que L est filtrant, il existe un indice $\lambda \in L$ et, pour chaque indice r , un schéma affine $Z_{r\lambda}$, de présentation finie sur l'image réciproque $W_{i(r),\lambda}$ de $U_{i(r)}$ dans S_λ , et un S -isomorphisme $g_r : Z_{r\lambda} \times_{S_\lambda} S \xrightarrow{\sim} X_r$. Soit Z_{rs} l'image réciproque par g_r du sous-préschéma induit sur l'ouvert $X_r \cap X_s$ de X_r , qui est quasi-compact puisque X est quasi-séparé, et désignons par g'_s la restriction $Z_{rs} \xrightarrow{\sim} X_r \cap X_s$ de l'isomorphisme g_r . En vertu de (8.8.2.5), il existe un $\mu \geq \lambda$ et, pour tout couple (r, s) , un ouvert quasi-compact $Z_{rs\mu}$ de $Z_{r\mu} = v_{\lambda\mu}^{-1}(Z_{r\lambda})$ tels que Z_{rs} soit l'image réciproque de $Z_{rs\mu}$; d'ailleurs, comme S_μ est quasi-séparé, et $W_{i(r),\mu}$ ouvert quasi-compact dans S_μ , chacun des $Z_{rs\mu}$ est de présentation finie sur S_μ (1.6.2). Considérons alors, pour tout couple (r, s) , l'isomorphisme $h_{sr} = g'_{sr}{}^{-1} \circ g'_s$ de Z_{rs} sur Z_{sr} ; il résulte de (8.8.2.4) qu'il existe un $\nu \geq \mu$ et, pour tout couple (r, s) , un isomorphisme $h_{sr\nu} : Z_{rs\nu} \rightarrow Z_{sr\nu}$ tels que $h_{sr} = h_{sr\nu} \times 1_S$. Enfin, pour tout triplet (r, s, t) désignons par h'_{sr} la restriction de h_{sr} à

$Z_{rs} \cap Z_{rt}$; il résulte aussitôt des définitions que h'_{sr} est un isomorphisme de $Z_{rs} \cap Z_{rt}$ sur $Z_{sr} \cap Z_{st}$, et que l'on a la relation $h'_{is} \circ h'_{sr} = h'_{ir}$. En vertu de (8.8.2, (i)), il existe donc $\rho \geq \nu$ tel que, pour tout triplet (r, s, t) , on ait $h'_{is\rho} \circ h'_{sr\rho} = h'_{ir\rho}$. On en conclut que les isomorphismes $h_{sr\rho}$ vérifient la condition de recollement (0.1.4.7) et définissent donc un préschéma X_ρ tel que X soit isomorphe à $X_\rho \times_{S_\rho} S$. En outre, les $Z_{r\rho}$ sont de présentation finie sur S_ρ et, si on les identifie à des ouverts de X_ρ , les intersections $Z_{r\rho} \cap Z_{s\rho}$, isomorphes aux $Z_{rs\rho}$, sont quasi-compactes, donc (1.6.3) X_ρ est de présentation finie sur S_ρ . C.Q.F.D.

Scholie (8.8.3). — Le contenu essentiel de (8.8.2) s'exprime encore en disant que si S_0 est quasi-compact et quasi-séparé, la catégorie des S-préschémas de présentation finie est déterminée à équivalence près par la donnée des catégories des S_λ -préschémas de présentation finie, des foncteurs $\rho_{\mu\lambda} : X_\lambda \rightarrow X_\lambda \times_{S_\lambda} S_\mu$ (pour $\lambda \leq \mu$) entre ces catégories et des isomorphismes de transitivité $\rho_{\nu\mu} \circ \rho_{\mu\lambda} \xrightarrow{\sim} \rho_{\nu\lambda}$. De façon imagée, on peut dire que la donnée d'un S-préschéma de présentation finie X équivaut « fonctoriellement » à la donnée d'un S_λ -préschéma de présentation finie X'_λ ; si un S_μ -préschéma de présentation finie X''_μ est tel que X soit S-isomorphe à $X''_\mu \times_{S_\mu} S$, il existe un ν tel que $\lambda \leq \nu$, $\mu \leq \nu$ et tel que $X'_\lambda \times_{S_\lambda} S_\nu$ et $X''_\mu \times_{S_\mu} S_\nu$ soient S_ν -isomorphes. Le fait que L est filtrant entraîne en outre que si on se donne une famille finie $(X^{(i)})_{i \in I}$ de S-préschémas de présentation finie, et une famille finie $(f^{(j)})_{j \in J}$ de S-morphismes entre ces préschémas ($f^{(j)}$ étant donc de la forme $X^{(\sigma(j))} \rightarrow X^{(\tau(j))}$ où σ et τ sont deux applications de J dans I), alors il y a un indice $\lambda \in L$, une famille $(X_\lambda^{(i)})_{i \in I}$ de S_λ -préschémas de présentation finie et une famille $(f_\lambda^{(j)})_{j \in J}$ de S_λ -morphismes tels que $X^{(i)}$ s'identifie à $X_\lambda^{(i)} \times_{S_\lambda} S$ et $f^{(j)}$ à $f_\lambda^{(j)} \times_{I_\lambda} S$ quels que soient i et j ; en outre, si on a une relation $f^{(j)} = f^{(k)}$, on peut supposer λ choisi de telle sorte que $f_\lambda^{(j)} = f_\lambda^{(k)}$.

Considérons en particulier trois S-préschémas de présentation finie X, Y, Z et deux S-morphismes $f : X \rightarrow Z, g : Y \rightarrow Z$, de sorte que le produit $X \times_Z Y$ relatif à ces morphismes est encore un S-préschéma de présentation finie (1.6.2). Alors il résulte de ce qui précède et de (1.3.3.11) que l'on peut écrire $X \times_Z Y = (X_\lambda \times_{Z_\lambda} Y_\lambda) \times_{S_\lambda} S$ pour un λ convenable, $X_\lambda, Y_\lambda, Z_\lambda$ étant des S_λ -préschémas de présentation finie; on peut donc dire que la détermination des S-préschémas de présentation finie par la donnée des S_λ -préschémas de présentation finie est « compatible avec les produits fibrés ». On a vu d'autre part (8.6.3) que si g est une immersion, on peut supposer qu'il en est de même de $g_\lambda : Y_\lambda \rightarrow Z_\lambda$; identifiant Y (resp. Y_λ) avec un sous-préschéma de Z (resp. Z_λ), on voit donc que l'on peut écrire, pour un λ convenable, $f^{-1}(Y) = f_\lambda^{-1}(Y_\lambda) \times_{S_\lambda} S$ (1.4.4.1); il y a donc aussi « compatibilité avec la formation des images réciproques de sous-préschémas ». Plus particulièrement, si f_1, f_2 sont deux S-morphismes de X dans Y , on appelle noyau de ce couple de morphismes l'image réciproque N du sous-préschéma diagonal de $Y \times_S Y$ par le S-morphisme $(f_1, f_2)_S$; on déduit de ce qui précède que l'on aura pour λ convenable $N = N_\lambda \times_{S_\lambda} S$, où N_λ est le noyau du couple de S_λ -morphismes $(f_{1\lambda}, f_{2\lambda})$ de X_λ dans Y_λ . Ces remarques s'étendent à des produits finis quelconques et aux « noyaux » de systèmes finis quelconques de S-morphismes d'un S-préschéma de présentation finie

dans un autre; on en conclut que d'une façon générale la formation des S -préschémas de présentation finie par la donnée des S_λ -préschémas de présentation finie est « compatible avec les limites projectives finies », une telle limite étant par définition le noyau d'un système fini de morphismes d'un même S -préschéma dans un produit de S -préschémas (T, 1.8).

Nous nous permettrons couramment par la suite de faire les traductions impliquées par les propriétés précédentes (ainsi que par (8.3.11), (8.5.2) et (8.6.3)) sans toujours nous astreindre à les justifier pas à pas comme ci-dessus. Par exemple, la donnée d'un « préschéma en groupes » G de présentation finie sur S équivaut à la donnée d'un préschéma en groupes G_λ de présentation finie sur un S_λ pour un λ assez grand; écrire en effet la condition d'associativité pour le S -morphisme « loi de composition » $G \times_S G \rightarrow G$ du préschéma en groupes revient à écrire que le noyau de deux S -morphisms de la forme $G \times_S G \times_S G \rightarrow G$ est égal à $G \times_S G \times_S G$ (II, 8.3.9), et les autres conditions intervenant dans la définition d'un préschéma en groupes s'interprètent de même.

8.9. Premières applications à l'élimination des hypothèses noethériennes.

Proposition (8.9.1). — Soient A un anneau, X un A -préschéma.

(i) Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) X est de présentation finie sur A .

b) Il existe un anneau noethérien A_0 , un préschéma X_0 de type fini sur A_0 , un homomorphisme d'anneaux $A_0 \rightarrow A$, et un A -isomorphisme $X_0 \otimes_{A_0} A \xrightarrow{\sim} X$.

c) Il existe un sous-anneau A_0 de A , qui est une \mathbf{Z} -algèbre de type fini, un préschéma X_0 de type fini sur A_0 et un A -isomorphisme $X_0 \otimes_{A_0} A \xrightarrow{\sim} X$.

(ii) Si \mathcal{F} est un \mathcal{O}_X -Module quasi-cohérent de présentation finie, on peut supposer le sous-anneau A_0 tel qu'il existe un \mathcal{O}_{X_0} -Module cohérent \mathcal{F}_0 tel que \mathcal{F} soit isomorphe à $\mathcal{F}_0 \otimes_{A_0} A$; $\text{Supp}(\mathcal{F})$ est constructible et fermé dans X , et il y a un sous-préschéma fermé Z de X , ayant $\text{Supp}(\mathcal{F})$ comme espace sous-jacent, tel que l'immersion canonique $Z \rightarrow X$ soit de présentation finie.

(iii) Si Y est un second A -préschéma de présentation finie, et $f : X \rightarrow Y$ un A -morphisme, on peut supposer le sous-anneau A_0 de A tel qu'il existe un préschéma Y_0 de type fini sur A_0 , un A -isomorphisme $Y_0 \otimes_{A_0} A \xrightarrow{\sim} Y$ et un A_0 -morphisme $f_0 : X_0 \rightarrow Y_0$ (nécessairement de type fini) tels que f s'identifie à $f_0 \otimes_{1_{A_0}}$.

(i) Comme A est limite inductive de ses sous-anneaux qui sont de type fini sur \mathbf{Z} ,

a) implique c) en vertu de (8.8.2, (ii)); c) implique b) car une \mathbf{Z} -algèbre de type fini est un anneau noethérien; enfin, si A_0 est noethérien, un A_0 -préschéma de type fini est de présentation finie (1.6.1), donc b) implique a) en vertu de (1.6.2, (iii)).

L'assertion (ii) se déduit immédiatement de (8.5.2, (ii)), (8.3.11) et (1.8.2) et l'assertion (iii) de (8.8.2, (i)).

(8.9.2) La proposition (8.9.1) et les résultats de (8.5.2) et (8.8.2) permettent d'étendre dans de nombreux cas à des morphismes de présentation finie $X \rightarrow Y$ des résultats prouvés par des techniques noethériennes en supposant Y localement noethérien.

Nous en verrons de nombreux exemples par la suite et nous nous bornerons ici à donner quelques résultats de ce type.

Proposition (8.9.3). — *Soient A un anneau, M un A -module de présentation finie. Alors tout A -endomorphisme surjectif de M est bijectif.*

En effet, considérons A comme limite inductive de ses sous- \mathbf{Z} -algèbres de type fini. Il résulte de (8.5.2.6) qu'il existe une de ces sous-algèbres A_0 et un A_0 -module M_0 de présentation finie tels que M soit A -isomorphe à $M_0 \otimes_{A_0} A$; en outre, si $f : M \rightarrow M$ est un A -endomorphisme surjectif, on peut supposer (8.5.2, (i)) qu'il existe un A_0 -endomorphisme $f_0 : M_0 \rightarrow M_0$ tel que $f = f_0 \otimes 1_A$; enfin (8.5.7) on peut supposer que f_0 est *surjectif*. Mais comme A_0 est noethérien et M_0 un A_0 -module de type fini, M_0 est un A_0 -module noethérien, donc (Bourbaki, *Alg.*, chap. VIII, § 2, n° 2, lemme 3) f_0 est bijectif, et il en est par suite de même de f .

Proposition (8.9.4) (« théorème de platitude générique »). — *Soient Y un préschéma intègre, $u : X \rightarrow Y$ un morphisme de type fini et localement de présentation finie, \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -Module quasi-cohérent de présentation finie. Il existe alors un ouvert non vide U de Y tel que $\mathcal{F}|_{u^{-1}(U)}$ soit plat sur U .*

Le raisonnement du début de (6.9.1) ramène à prouver le

Lemme (8.9.4.1). — *Soient A un anneau intègre, B une A -algèbre de présentation finie, M un B -module de présentation finie. Alors il existe un $f \neq 0$ dans A tel que M_f soit un A_f -module libre.*

En effet, d'après (8.9.1) il y a une sous- \mathbf{Z} -algèbre de type fini A_0 de A , une A_0 -algèbre de type fini B_0 et un B_0 -module de type fini M_0 tels que B soit A -isomorphe à $B_0 \otimes_{A_0} A$ et que M soit B -isomorphe à $M_0 \otimes_{B_0} B$; d'après (6.9.2), il existe $f_0 \neq 0$ dans A_0 tel que $(M_0)_{f_0}$ soit un $(A_0)_{f_0}$ -module libre. Comme $M_{f_0} = (M_0)_{f_0} \otimes_{A_0} A$ et $A_{f_0} = (A_0)_{f_0} \otimes_{A_0} A$, M_{f_0} est un A_{f_0} -module libre.

Corollaire (8.9.5). — *Soient S un préschéma quasi-compact et quasi-séparé, $u : X \rightarrow S$ un morphisme de présentation finie, \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -Module quasi-cohérent de présentation finie. Il existe alors une partition $(S_i)_{1 \leq i \leq n}$ de S en un nombre fini d'ensembles localement fermés dans S telle que, pour $1 \leq i \leq n$, il existe un sous-préschéma S'_i de S , ayant pour espace sous-jacent S_i , de présentation finie sur S , tel que si l'on pose $X_i = X \times_S S'_i$, le \mathcal{O}_{X_i} -Module $\mathcal{F}_i = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S'_i}$ soit plat sur S'_i .*

Considérons un recouvrement fini $(U_j)_{1 \leq j \leq m}$ de S par des ouverts affines et définissons par récurrence $T_1 = U_1$, $T_j = U_j - \bigcup_{h < j} (U_j \cap U_h)$ pour $j \geq 2$; chaque T_j est fermé dans l'ouvert affine U_j , et les T_j sont deux à deux sans point commun; en outre les $U_j \cap U_h$ sont quasi-compacts puisque S est quasi-séparé, et par suite (S étant aussi quasi-compact), sont *constructibles* dans S (1.8.1), donc il en est de même des T_j . Il suffira évidemment de démontrer le corollaire pour un sous-préschéma convenable T'_j de S ayant T_j pour espace sous-jacent, de présentation finie sur S et pour le morphisme et le Module déduits respectivement de u et \mathcal{F} par le changement de base $T'_j \rightarrow S$. Notons pour cela que si l'on prend sur U_j la structure de préschéma induite par celle de S , l'immersion ouverte $U_j \rightarrow S$ est quasi-compacte puisque S est quasi-séparé (1.2.7), donc elle est présen-

tation finie (1.6.2, (i)). Il suffira donc que T'_j soit de présentation finie sur U_j , autrement dit, on peut déjà se borner au cas où $U_j = S$ et $T_j = T$ est fermé constructible dans S . Soit $S = \text{Spec}(A)$, et considérons A comme limite inductive de ses sous- \mathbf{Z} -algèbres de type fini, de sorte que $S = \varprojlim S_\lambda$, où les S_λ sont affines et noethériens. En vertu de (8.3.11), il existe un λ et une partie fermée (nécessairement constructible) T_λ de S_λ tels que $T = u_\lambda^{-1}(T_\lambda)$ ($u_\lambda : S \rightarrow S_\lambda$ étant le morphisme canonique). On munira T_λ d'une structure de sous-préschéma de S_λ et on prendra $T' = T_\lambda \times_{S_\lambda} S$; comme l'immersion canonique $T_\lambda \rightarrow S_\lambda$ est de présentation finie (1.6.1), il en est de même de l'immersion $T' \rightarrow S$. Comme T' est affine, on voit finalement qu'on peut se borner au cas où $T' = S$ est affine. Alors (8.9.1), avec les mêmes notations, il existe un λ , un morphisme de type fini $u_\lambda : X_\lambda \rightarrow S_\lambda$ et un \mathcal{O}_{X_λ} -Module cohérent \mathcal{F}_λ tels que X soit isomorphe à $X_\lambda \times_{S_\lambda} S$, \mathcal{F} à $\mathcal{F}_\lambda \otimes_{\mathcal{O}_{X_\lambda}} \mathcal{O}_X$. On peut alors appliquer à S_λ , X_λ et \mathcal{F}_λ le résultat de (6.9.3) et il y a des sous-préschémas $S'_{\lambda i}$ de S_λ , dont les ensembles sous-jacents forment une partition de S_λ et qui sont tels que si l'on pose $X_{\lambda i} = X_\lambda \times_{S_\lambda} S'_{\lambda i}$, $\mathcal{F}_{\lambda i} = \mathcal{F}_\lambda \otimes_{\mathcal{O}_{S_\lambda}} \mathcal{O}_{S'_{\lambda i}}$ soit *plat* sur $S'_{\lambda i}$. Les $S'_i = S'_{\lambda i} \times_{S_\lambda} S$ sont alors des sous-préschémas de S répondant à la question en vertu de (2.1.4).

8.10. Propriétés de permanence des morphismes par passage à la limite projective.

Dans cette section, nous conservons les hypothèses générales et les notations de (8.8.1).

Proposition (8.10.1). — *S'il existe λ tel que, pour $\mu \geq \lambda$, f_μ soit un morphisme ouvert (resp. universellement ouvert), alors f est un morphisme ouvert (resp. universellement ouvert).*

Comme $X = X_\lambda \times_{Y_\lambda} Y$, l'assertion relative aux morphismes universellement ouverts est un cas particulier de (2.4.3, (iii)). Supposons donc f_μ ouvert pour $\mu \geq \lambda$; il suffit de voir que pour tout ouvert *quasi-compact* U de X , $f(U)$ est ouvert dans Y . Or, il existe $\mu \geq \lambda$ tel que $U = v_\mu^{-1}(U_\mu)$, où U_μ est un ouvert quasi-compact dans X_μ (2.3.11); on a alors $f(v_\mu^{-1}(U_\mu)) = w_\mu^{-1}(f_\mu(U_\mu))$ (I, 3.4.8), donc $f(U)$ est ouvert dans Y .

Corollaire (8.10.2). — *Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme. Pour que f soit universellement ouvert, il suffit que, pour tout entier $n > 0$, si l'on pose $Y_n = Y \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}[T_1, \dots, T_n] (= \mathbf{V}_Y^n)$, et $X_n = X \times_Y Y_n$, la projection canonique $f_n = f \times 1_{Y_n} : X_n \rightarrow Y_n$ soit un morphisme ouvert.*

Pour démontrer que f est universellement ouvert, il suffit de prouver qu'il en est ainsi de la restriction $f^{-1}(U) \rightarrow U$ de f pour tout ouvert affine U de Y ; comme, par hypothèse, si $U_n = U \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}[T_1, \dots, T_n]$ est l'image réciproque de U dans Y_n , le morphisme $f_n^{-1}(U_n) \rightarrow U_n$, restriction de f_n , est ouvert, on voit qu'on peut se borner au cas où $Y = \text{Spec}(A)$ est *affine*. En outre, il suffit aussi évidemment de montrer que pour tout morphisme $Y' \rightarrow Y$, où $Y' = \text{Spec}(A')$ est lui aussi *affine*, $f' = f_{(Y')}$ est ouvert. Supposons d'abord que A' soit une A -algèbre de type fini, donc *quotient* d'une algèbre de polynômes $A[T_1, \dots, T_n]$; alors Y' est un sous-préschéma fermé de Y_n et f' la restric-

tion de f_n à $f_n^{-1}(Y')$; mais pour tout ouvert V de X_n , on a $f_n(V \cap f_n^{-1}(Y')) = f_n(V) \cap Y'$, et comme par hypothèse $f_n(V)$ est ouvert dans Y_n , cela montre que f' est aussi un morphisme ouvert. Lorsque A' est quelconque, il peut être considéré comme limite inductive de ses sous-A-algèbres de type fini A'_λ , et le fait que f' soit un morphisme ouvert résulte de ce qui précède et de (8.10.1).

Proposition (8.10.3). — *Supposons qu'il existe α tel que : 1° S_α soit quasi-compact ; 2° les morphismes $X_\alpha \rightarrow S_\alpha$, $Y_\alpha \rightarrow S_\alpha$ soient quasi-compacts et le morphisme $Y_\alpha \rightarrow S_\alpha$ quasi-séparé ; 3° pour $\alpha \leq \lambda \leq \mu$, les morphismes $u_{\lambda\mu} : S_\mu \rightarrow S_\lambda$ soient plats ; 4° $\overline{f_\alpha(X_\alpha)}$ soit constructible dans Y_α . Alors, pour que f soit dominant, il faut et il suffit qu'il existe $\lambda \geq \alpha$ tel que f_λ soit dominant.*

Les hypothèses entraînent que Y_α est quasi-compact et que le morphisme f_α est quasi-compact (1.2.4); par suite $f_\alpha(X_\alpha) = Z_\alpha$ est pro-constructible (1.9.5, (vii)) dans Y_α . Si l'on pose $Z_\lambda = w_{\alpha\lambda}^{-1}(Z_\alpha)$ pour $\lambda \geq \alpha$ et $Z = w_\alpha^{-1}(Z_\alpha)$, on a donc $Z_\lambda = f_\lambda(X_\lambda)$ et $Z = f(X)$ (I, 3.4.8) et Z_λ est pro-constructible dans Y_λ (1.9.5, (vi)). Il suffit alors d'appliquer (8.3.13) en remplaçant S_λ , Z'_λ et Z''_λ par Y_λ , Y_λ et Z_λ respectivement.

Proposition (8.10.4). — *Supposons qu'il existe α tel que Y_α soit quasi-compact et f_α de type fini et quasi-séparé. Pour que le morphisme f soit séparé, il faut et il suffit qu'il existe $\lambda \geq \alpha$ tel que f_λ soit séparé.*

La question étant locale sur Y_α (puisque Y_α est quasi-compact et L filtrant), on peut se borner au cas où Y_α est affine, donc quasi-séparé, et l'hypothèse entraîne que X_α (donc les X_λ et X) sont quasi-compacts et quasi-séparés. Posons $X'_\lambda = X_\lambda \times_{Y_\lambda} X_\lambda$ pour $\lambda \geq \alpha$ et $X' = X \times_Y X$; on a $X'_\lambda = X'_\alpha \times_{Y_\alpha} Y_\lambda$ et $X' = X'_\alpha \times_{Y_\alpha} Y$; le morphisme première projection $X'_\alpha \rightarrow X_\alpha$ est quasi-compact et quasi-séparé par hypothèse (1.2.3, (iii)), donc X'_λ est quasi-compact et quasi-séparé. Notons maintenant que si l'on désigne par Δ_λ (resp. Δ) la diagonale de $X_\lambda \times_{Y_\lambda} X_\lambda$ (resp. de $X \times_Y X$), il résulte de (I, 5.3.4 et 3.4.8) que Δ_μ (resp. Δ) est l'image réciproque de Δ_λ par l'application $v'_{\lambda\mu} : X'_\mu \rightarrow X'_\lambda$ (resp. $v'_\lambda : X' \rightarrow X'_\lambda$). D'autre part Δ_λ est constructible dans X'_λ : en effet, puisque f_λ est quasi-séparé, l'immersion diagonale $X_\lambda \rightarrow X'_\lambda$ est quasi-compacte, et localement de présentation finie puisque f_λ est de type fini (1.4.3 et 1.5.4, (iii)); il résulte alors de (1.8.4.1) que Δ_λ est localement constructible, donc constructible puisque X'_λ est quasi-compact. On peut maintenant appliquer (8.3.12) en remplaçant S_λ et Z_λ par X'_λ et Δ_λ respectivement.

Théorème (8.10.5). — *Supposons S_0 quasi-compact, X_α et Y_α de présentation finie sur S_α , et soit $f_\alpha : X_\alpha \rightarrow Y_\alpha$ un S_α -morphisme. Considérons, pour un morphisme, la propriété d'être :*

- (i) un isomorphisme ;
- (i bis) un monomorphisme ;
- (ii) une immersion ;
- (iii) une immersion ouverte ;
- (iv) une immersion fermée ;
- (v) séparé ;
- (vi) surjectif ;

- (vii) *radiciel* ;
- (viii) *affine* ;
- (ix) *quasi-affine* ;
- (x) *fini* ;
- (xi) *quasi-fini* ;
- (xii) *propre*.

Alors, si \mathbf{P} désigne une des propriétés précédentes, pour que f possède la propriété \mathbf{P} , il faut et il suffit qu'il existe $\lambda \geq \alpha$ tel que f_λ possède la propriété \mathbf{P} (auquel cas f_μ la possède aussi pour $\mu \geq \lambda$).

Si S_0 est en outre supposé quasi-séparé, la même conclusion est valable lorsque \mathbf{P} est la propriété d'être :

- (xiii) *projectif* ;
- (xiv) *quasi-projectif*.

Le cas où \mathbf{P} est l'une des propriétés (i) ou (v) n'a été inséré dans l'énoncé que pour mémoire; dans ces cas, le théorème découle de ce qui a été démontré respectivement dans (8.8.2.4) et (8.10.4). D'ailleurs, compte tenu de (I, 5.4.1 et 5.3.4), (v) résulte aussi de (iv). Le cas (i bis) se déduit aussitôt de (i), en utilisant (I, 5.3.8) et en notant (comme on l'a déjà utilisé dans (8.10.4)) que la diagonale Δ_f se déduit de Δ_{f_λ} par le changement de base $S \rightarrow S_\lambda$.

On notera d'autre part que (vi), (vii) et (xi) sont en fait des conditions sur les fibres $f^{-1}(y)$ des morphismes envisagés, compte tenu de la transitivité des fibres par changement de base (I, 3.6.4) : la condition (vi) signifie en effet que toutes les fibres doivent être non vides, la condition (vii) qu'elles doivent être radicielles (I, 3.5.8) et la condition (xi) qu'elles doivent être finies (II, 6.2.2 et 6.2.3 et I, 6.4.4, compte tenu de ce que f et les f_λ sont des morphismes de type fini par (I.5.4, (v))). Le théorème dans ces trois cas sera donc encore conséquence d'un résultat général sur ce type de propriétés ne concernant que les fibres, qui sera établi dans (9.3.3); nous repoussons donc jusqu'à ce moment-là la démonstration du théorème dans le cas (xi) (bien entendu, le lecteur pourra vérifier que, sauf aux nos 8.11 et 8.12, nous ne ferons pas usage du théorème dans ce cas jusqu'à (9.3.3) et que (8.11) et (8.12) ne seront pas utilisés avant (9.3.3)).

Pour les cas qui restent à démontrer, on peut se borner à prouver que la condition de l'énoncé est nécessaire, toutes les propriétés \mathbf{P} envisagées étant invariantes par changement de base (voir chap. I^{er} et II dans les numéros concernant chacune de ces propriétés). On peut en outre supposer que $S_\alpha = S_0$ et que $Y_\alpha = S_\alpha$, donc $Y_\lambda = S_\lambda$ pour tout $\lambda \geq \alpha$. Enfin, les propriétés (i) à (xii) sont locales sur S_0 , donc, comme S_0 est réunion finie d'ouverts affines et L filtrant, on peut se borner pour les démontrer au cas où $S_0 = \text{Spec}(A_0)$ est affine (donc quasi-séparé). On désignera par A_λ (resp. A) l'anneau de S_λ (resp. S).

Cas (ii), (iii), (iv) : Supposons que f soit une immersion (resp. une immersion ouverte, resp. une immersion fermée), et soit X' le sous-préschéma (resp. induit sur un ouvert, resp. fermé) de S associé à f , qui est donc un S -préschéma de présentation finie.

En vertu de (8.6.3), il existe donc un $\lambda \geq \alpha$ et un sous-préschéma (resp. induit sur un ouvert, resp. fermé) X'_λ de S_λ , de présentation finie sur S_λ , tels que X' soit isomorphe à $X'_\lambda \times_{S_\lambda} S$. Pour tout $\mu \geq \lambda$, $X'_\mu = X'_\lambda \times_{S_\lambda} S_\mu$ est donc un sous-préschéma (resp. induit sur un ouvert, resp. fermé) de S_μ , de présentation finie sur S_μ , et il résulte donc de (8.8.2.4) et (8.8.2.5) qu'il existe un $\mu \geq \lambda$ et un isomorphisme $g_\mu : X_\mu \rightarrow X'_\mu$ tel que $g = g_\mu \times 1_S$ soit l'isomorphisme $X \rightarrow X'$ associé à f ; d'où la conclusion.

Cas (vi) et (vii) : On sait (1.8.4.1) que $Z_\alpha = f_\alpha(X_\alpha)$ est constructible dans S_α ; si l'on pose $Z_\lambda = u_{\alpha\lambda}^{-1}(Z_\alpha)$ pour $\lambda \geq \alpha$ et $Z = u_\alpha^{-1}(Z_\alpha)$, on a $Z_\lambda = f_\lambda(X_\lambda)$ et $Z = f(X)$ (I, 3.4.8). Comme en vertu de (8.3.11) l'application canonique $\varinjlim \mathcal{C}(S_\lambda) \rightarrow \mathcal{C}(S)$ est injective, la relation $f(X) = S$ implique l'existence d'un $\lambda \geq \alpha$ tel que $f_\lambda(X_\lambda) = S_\lambda$, ce qui prouve le théorème dans le cas (vi). Pour le prouver dans le cas (vii), il suffit de noter que le morphisme structural $X_\alpha \times_{S_\alpha} X_\alpha \rightarrow S_\alpha$ est de présentation finie puisqu'il en est ainsi de la première projection $X_\alpha \times_{S_\alpha} X_\alpha \rightarrow X_\alpha$ (1.6.2); il suffit donc en vertu de (1.8.7.1) d'appliquer le cas (vi) du théorème au morphisme diagonal $\Delta_{f_\alpha} : X_\alpha \rightarrow X_\alpha \times_{S_\alpha} X_\alpha$ en notant que l'on a $\Delta_{f_\lambda} = \Delta_{f_\alpha} \times 1_{S_\lambda}$ et $\Delta_f = \Delta_{f_\alpha} \times 1_S$ (I, 5.3.4 et 3.3.11).

Cas (viii) et (ix) : Comme $S = \text{Spec}(A)$ est affine, dire que $f : X \rightarrow S$ est affine (resp. quasi-affine) signifie qu'il existe un entier r et une immersion fermée (resp. une immersion) $j : X \rightarrow \mathbf{V}_S^r = \text{Spec}(A[T_1, \dots, T_r])$ de S -préschémas, puisque f est de type fini et S quasi-compact (II, 5.1.9). Comme $\mathbf{V}_S^r = \mathbf{V}_{S_0}^r \times_{S_0} S$, et que $\mathbf{V}_{S_0}^r$ est un S_0 -préschéma de présentation finie, il résulte de (8.8.2, (i)) appliqué au S -morphisme j , qu'il existe un λ et un S_λ -morphisme $j_\lambda : X_\lambda \rightarrow \mathbf{V}_{S_\lambda}^r$ tel que $j = j_\lambda \times 1_S$; appliquant alors (iv) (resp. (ii)) à j , on en déduit qu'il existe $\mu \geq \lambda$ tel que j_μ soit une immersion fermée (resp. une immersion); par suite f_μ est affine (resp. quasi-affine).

Cas (x) : Par hypothèse, on a $X = \text{Spec}(B)$, où B est une A -algèbre qui est un A -module de présentation finie (1.4.7); il résulte donc de (8.5.2, (ii)) qu'il y a un λ et un A_λ -module de présentation finie B_λ tels que le A -module B soit isomorphe à $B_\lambda \otimes_{A_\lambda} A$. La structure de A -algèbre de B est définie par un A -homomorphisme $m : B \otimes_A B \rightarrow B$; comme on a $B \otimes_A B = (B_\lambda \otimes_{A_\lambda} B_\lambda) \otimes_A A$, il existe d'après (8.5.2, (i)) un $\mu \geq \lambda$ et un A_μ -homomorphisme $m_\mu : B_\mu \otimes_{A_\mu} B_\mu \rightarrow B_\mu$ tel que $m = m_\mu \otimes 1$. En considérant les diagrammes usuels exprimant l'associativité et la commutativité de m , on voit en appliquant encore (8.5.2, (i)) qu'il existe $\nu \geq \mu$ tel que m_ν définisse sur B_ν une multiplication associative et commutative; de la même manière on voit qu'on peut supposer ν pris assez grand pour que l'anneau B_ν ainsi défini admette un élément unité. Si $X'_\nu = \text{Spec}(B_\nu)$, il est clair alors que X est S -isomorphe à $X'_\nu \times_{S_\nu} S$, donc, en vertu de (i), il existe $\rho \geq \nu$ tel que X_ρ et X'_ρ soient S_ρ -isomorphes, ce qui achève la démonstration dans ce cas.

Pour démontrer le théorème dans le cas (xii), nous démontrerons d'abord la proposition suivante :

Proposition (8.10.5.1) (lemme de Chow pour les morphismes de présentation finie). — Soient A un anneau, X, Y deux A -préschémas de présentation finie, $f : X \rightarrow Y$

un A -morphisme séparé. Alors il existe deux A -pré-schémas X', P de présentation finie, et des A -morphisms $p : P \rightarrow Y, j : X' \rightarrow P, g : X' \rightarrow X$, tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{j} & P \\ g \downarrow & & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{i} & Y \end{array}$$

soit commutatif, et que : 1° p soit projectif; 2° g soit projectif et surjectif; 3° j soit une immersion ouverte.

En effet, soient $A_0 \subset A, X_0, Y_0$ et f_0 déterminés comme dans (8.9.1) de sorte que Y_0 est noethérien et f_0 de type fini; on peut en outre supposer f_0 séparé d'après (8.10.4). Le lemme de Chow (II, 5.6.1) montre alors l'existence de trois morphismes $p_0 : P_0 \rightarrow Y_0, g_0 : X'_0 \rightarrow X_0$ et $j_0 : X'_0 \rightarrow P_0$, de type fini, tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X'_0 & \xrightarrow{j_0} & P_0 \\ g_0 \downarrow & & \downarrow p_0 \\ X_0 & \xrightarrow{i_0} & Y_0 \end{array}$$

soit commutatif, et que p_0 soit projectif, g_0 projectif et surjectif et j_0 une immersion ouverte. Les propriétés de l'énoncé résultent alors de l'invariance des propriétés précédentes par changement de base (II, 5.5.5, (iii) et I, 3.5.2 et 4.3.2).

Cas (xii) : Appliquons au morphisme $f_0 : X_0 \rightarrow S_0$ la prop. (8.10.5.1) : on a donc un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} X'_0 & \xrightarrow{j_0} & P_0 \\ g_0 \downarrow & & \downarrow p_0 \\ X_0 & \xrightarrow{i_0} & S_0 \end{array}$$

où p_0 est projectif, g_0 projectif et surjectif, et j_0 une immersion ouverte; on en déduit pour chaque λ un diagramme analogue où les morphismes $p_\lambda = p_0 \times I_{S_\lambda}, g_\lambda = g_0 \times I_{S_\lambda}$ et $j_\lambda = j_0 \times I_{S_\lambda}$ ont respectivement les mêmes propriétés, et de même pour les morphismes limites projectives $p = p_0 \times I_S, g = g_0 \times I_S, j = j_0 \times I_S$. Comme g est propre (II, 5.5.3), il en est de même de $p \circ j = f \circ g$ (II, 5.4.2) et comme p est séparé, j est propre, donc une immersion fermée; appliquant le cas (iv) au morphisme j (en notant que X'_0 et P_0 sont des S_0 -pré-schémas de présentation finie (8.10.5.1 et 1.6.2)), on voit qu'il existe λ tel que j_λ soit une immersion fermée, donc soit propre (II, 5.4.2). Mais alors $f_\lambda \circ g_\lambda = j_\lambda \circ p_\lambda$ est propre (II, 5.5.3 et 5.4.2) et comme g_λ est surjectif, et qu'on peut supposer f_λ séparé en vertu de l'hypothèse sur f et de (v), il résulte de (II, 5.4.3) que f_λ est propre.

Cas (xiii) et (xiv) : En vertu de (xii) et de (II, 5.5.3) (qui est applicable puisque les S_λ sont quasi-compacts et quasi-séparés, compte tenu de (1.7.19)), il suffit de

considérer le cas où f est quasi-projectif. Supposons donc qu'il existe un \mathcal{O}_X -Module inversible \mathcal{L} qui soit f -ample; comme S_0 est quasi-compact et quasi-séparé il en est de même de X_0 (1.2.3), et il y a donc un λ et un \mathcal{O}_{X_λ} -Module quasi-cohérent \mathcal{L}_λ de présentation finie tel que $\mathcal{L} = v_\lambda^*(\mathcal{L}_\lambda)$ (8.5.2, (ii)); en outre, en vertu de (8.5.5), on peut supposer \mathcal{L}_λ inversible. Le théorème dans ce cas est alors conséquence du lemme plus précis suivant :

Lemme (8.10.5.2). — *Supposons S_0 quasi-compact, et soit \mathcal{L}_λ un \mathcal{O}_{X_λ} -Module inversible. Pour que \mathcal{L} soit un \mathcal{O}_X -Module ample pour f (resp. très ample pour f), il faut et il suffit qu'il existe $\mu \geq \lambda$ tel que \mathcal{L}_μ soit ample pour f_μ (resp. très ample pour f_μ).*

La condition étant évidemment suffisante (II, 4.4.10 et 4.6.13), montrons qu'elle est nécessaire; les S_λ étant quasi-compactes et les f_λ de type fini, on peut, en remplaçant \mathcal{L} par une puissance tensorielle convenable, se borner à considérer le cas où \mathcal{L} est très ample (II, 4.6.11). En outre, la question étant ici locale sur S_0 (vu (II, 4.4.5) et le fait que L est filtrant), on peut se borner au cas où S_0 (et par suite S) est affine. Alors, en vertu de (II, 4.4.1, (ii) et II, 4.1.2), il existe une S -immersion $j : X \rightarrow \mathbf{P}_S^r = P$ telle que \mathcal{L} soit isomorphe à $j^*(\mathcal{O}_P(1))$. Compte tenu de (8.8.2, (i)), de (ii) et de (II, 4.1.3), il existe donc un $\mu \geq \lambda$ et une immersion $j_\mu : X_\mu \rightarrow \mathbf{P}_{S_\mu}^r = P_\mu$ tels que $j = j_\mu \times 1_S$; utilisant ensuite (II, 4.1.3.2) et (8.5.2.5), on voit qu'il existe $\nu \geq \mu$ tel que \mathcal{L}_ν soit isomorphe à $j_\nu^*(\mathcal{O}_{P_\nu}(1))$, ce qui montre que \mathcal{L}_ν est très ample pour f_ν (II, 4.4.2).

8.11. Application aux morphismes quasi-finis.

Nous nous proposons dans cette section de démontrer les deux théorèmes suivants :

Théorème (8.11.1). — *Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme propre, localement de présentation finie, et quasi-fini. Alors le morphisme f est fini.*

Théorème (8.11.2). — *Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme localement de présentation finie, quasi-fini et séparé. Alors le morphisme f est quasi-affine, et a fortiori quasi-projectif.*

Remarque (8.11.3). — On va voir ci-dessous que l'on peut se ramener, pour la démonstration de (8.11.1) et (8.11.2), au cas où Y est localement noethérien; on notera que dans ce cas on obtiendra ainsi une autre démonstration du théorème de Chevalley (III, 4.4.2).

(8.11.4) Les hypothèses et les conclusions de (8.11.1) et (8.11.2) sont toutes locales sur Y (1.6.1, 1.2.6, (II, 5.1.1), (II, 5.4.1) et (II, 6.2.2)), donc on peut supposer $Y = \text{Spec}(A)$ affine. On sait qu'il existe alors un sous-anneau A_0 de A , qui est une \mathbf{Z} -algèbre de type fini, et un morphisme de type fini $f_0 : X_0 \rightarrow \text{Spec}(A_0)$ tels que X s'identifie à $X_0 \otimes_{A_0} A$ et f à $f_0 \times 1$ (8.9.1). En outre, A peut être considéré comme limite inductive de ses sous-anneaux contenant A_0 et qui sont des \mathbf{Z} -algèbres de type fini; utilisant la méthode de (8.1.2, c)) ainsi que (8.10.5, (v), (xi) et (xii)), on voit qu'il suffit de démontrer les théorèmes (8.11.1) et (8.11.2) pour f_0 . Supposons donc désormais Y noethérien; utilisant maintenant la méthode de (8.1.2, a)) ainsi que (8.10.5, (v), (ix), (x), (xi) et (xii)) on peut remplacer Y par $\text{Spec}(\mathcal{O}_y)$, où y est un

point quelconque de Y , donc on voit finalement que l'on peut supposer que $Y = \text{Spec}(A)$, où A est un *anneau local noethérien*. Soient \mathfrak{m} l'idéal maximal de A , \hat{A} le complété de A pour la topologie \mathfrak{m} -préadique; on sait que \hat{A} est un anneau local noethérien et que le morphisme $\text{Spec}(\hat{A}) \rightarrow \text{Spec}(A)$ est fidèlement plat et quasi-compact (**0**_I, 7.3.5); appliquant (2.7.1, (i), (vii), (xiv), (xv) et (xvi)), on voit en outre qu'on peut se borner au cas où A est *complet*. Il résulte alors de (**II**, 6.2.6) que $X = X' \amalg X''$, où X' est un Y -schéma fini et X'' un Y -schéma quasi-fini tel que $X'' \cap f^{-1}(y) = \emptyset$.

Plaçons-nous d'abord dans les hypothèses de (8.11.1); comme f est propre, X'' , qui est fermé dans X , est propre sur Y (**II**, 5.4.10), donc $f(X'')$ est fermé dans Y ; mais y n'est pas contenu dans $f(X'')$, et par ailleurs est adhérent à tout point de Y , donc $f(X'') = \emptyset$, et par suite X'' est vide et f est *fini*.

Plaçons-nous maintenant dans les hypothèses de (8.11.2) et, en nous bornant (comme on peut le faire d'après ce qui précède) au cas où $Y = \text{Spec}(A)$ est affine et noethérien de dimension finie, raisonnons en outre par récurrence sur la dimension de Y . En se ramenant comme ci-dessus au cas où A est en outre local et complet, on a $\dim(\mathcal{O}_y) = \dim(A) = \dim(Y)$ et pour tout $z \neq y$, $\dim(\mathcal{O}_z) < \dim(\mathcal{O}_y)$, donc $\dim(Y - \{y\}) < \dim(Y)$. Or, par hypothèse on a $f(X'') \subset Y - \{y\}$ et la restriction de f à X'' est évidemment un morphisme quasi-fini et séparé; appliquant à $Y - \{y\}$ et à X'' l'hypothèse de récurrence, on voit que X'' est quasi-affine sur $Y - \{y\}$; mais l'ouvert $Y - \{y\}$ étant quasi-affine sur Y puisque Y est noethérien, X'' est aussi quasi-affine sur Y (**II**, 5.1.10, (ii)); comme par ailleurs X' est fini (et *a fortiori* affine) sur Y , X est quasi-affine sur Y (**II**, 4.6.17 et 5.1.2, c').

Proposition (8.11.5). — *Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de présentation finie. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- a) f est une immersion fermée.
- b) f est un monomorphisme propre.
- c) f est propre et pour tout $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ est radiciel et géométriquement réduit sur $\mathbf{k}(y)$ (*c'est-à-dire vide ou $\mathbf{k}(y)$ -isomorphe à $\text{Spec}(\mathbf{k}(y))$*).

Il est clair que a) entraîne b). Pour voir que b) entraîne c), notons (**I**, 3.3.12) que pour tout $y \in Y$, le morphisme $f^{-1}(y) \rightarrow \text{Spec}(\mathbf{k}(y))$ déduit de f par extension de la base est un monomorphisme, donc est injectif, et par suite $f^{-1}(y)$ est vide ou réduit à un point, et en tout cas affine. De plus, si A est l'anneau de $f^{-1}(y)$, l'homomorphisme canonique $A \otimes_{\mathbf{k}} A \rightarrow A$ est bijectif (**I**, 5.3.8). Cela entraîne évidemment que $A = k$, sans quoi il y aurait un élément $a \in A$ non dans k et les images de $a \otimes 1$ et de $1 \otimes a$ dans A seraient toutes deux égales à a , alors que $a \otimes 1 \neq 1 \otimes a$ puisque 1 et a forment un système libre sur k .

Reste à prouver que c) entraîne a). Il résulte tout d'abord de (8.11.1) que f est un morphisme *fini*, donc $X = \text{Spec}(\mathcal{A})$, où \mathcal{A} est une \mathcal{O}_Y -Algèbre *finie*. Il suffit donc de prouver que l'homomorphisme canonique $\mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{A}$ est *surjectif* (**II**, 1.4.10), ou encore que pour tout $y \in Y$, l'homomorphisme $\mathcal{O}_y \rightarrow \mathcal{A}_y$ est surjectif. Mais par hypothèse

$f^{-1}(y) = \text{Spec}(\mathcal{A}_y/\mathfrak{m}_y\mathcal{A}_y)$ (II, 1.5.5) est tel que l'homomorphisme correspondant $\mathfrak{k}(y) = \mathcal{O}_y/\mathfrak{m}_y \rightarrow \mathcal{A}_y/\mathfrak{m}_y\mathcal{A}_y$ soit bijectif; comme \mathcal{A}_y est un \mathcal{O}_y -module de type fini, le lemme de Nakayama montre que $\mathcal{O}_y \rightarrow \mathcal{A}_y$ est surjectif, ce qui achève la démonstration.

Remarque (8.11.5.1). — On notera que le raisonnement précédent prouve que si f est un *monomorphisme*, alors, pour tout $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ est vide ou $\mathfrak{k}(y)$ -isomorphe à $\text{Spec}(\mathfrak{k}(y))$.

Proposition (8.11.6). — Si un morphisme $f: X \rightarrow Y$ de présentation finie est un *homéomorphisme universel*, il est fini, surjectif et radiciel (la réciproque étant vraie d'après (2.4.5, (i))).

En effet, f étant de type fini, universellement fermé, et séparé en vertu de (2.4.4), est propre par définition (II, 5.4.1). Comme il est évidemment quasi-fini (II, 6.2.3), il est fini d'après (8.11.1). On sait par ailleurs qu'il est radiciel (2.4.4), et évidemment surjectif.

8.12. Nouvelle démonstration et généralisation du « Main Theorem » de Zariski.

Lemme (8.12.1). — Soient $f: X \rightarrow Y$ un morphisme quasi-compact et quasi-séparé, \mathcal{C} une \mathcal{O}_Y -Algèbre quasi-cohérente, $Z = \text{Spec}(\mathcal{C})$, qui est un Y -préschéma affine au-dessus de Y . Soient $g: X \rightarrow Z$ un Y -morphisme, $\varphi = \mathcal{A}(g): \mathcal{C} \rightarrow f_*(\mathcal{O}_X)$ le \mathcal{O}_Y -homomorphisme correspondant de \mathcal{O}_Y -Algèbres (II, 1.2.7). Supposons que g soit une immersion. Alors, pour que l'image fermée de X par g (I, 9.5.3) soit égale à Z , il faut et il suffit que φ soit injectif; g est alors une immersion ouverte.

L'hypothèse entraîne que $f_*(\mathcal{O}_X)$ est une \mathcal{O}_Y -Algèbre quasi-cohérente (1.7.5); en outre, comme le morphisme canonique $h: Z \rightarrow Y$ est affine, donc quasi-compact et séparé, g est un morphisme quasi-compact et quasi-séparé (1.2.2 et 1.1.2), donc $g_*(\mathcal{O}_X)$ est une \mathcal{O}_Z -Algèbre quasi-cohérente (1.7.5). Cela étant, dire que l'image fermée de X par g est égale à Z signifie (I, 9.5.2) que l'homomorphisme canonique $\theta: \mathcal{O}_Z \rightarrow g_*(\mathcal{O}_X)$ est injectif. Mais on a $h_*(\mathcal{O}_Z) = \mathcal{C}$ par définition de Z (II, 1.3.1), et $h_*(g_*(\mathcal{O}_X)) = f_*(\mathcal{O}_X)$. Comme Z est affine au-dessus de Y , il revient au même de dire que l'homomorphisme $\theta: \mathcal{O}_Z \rightarrow g_*(\mathcal{O}_X)$ est injectif ou que l'homomorphisme correspondant $\varphi = h_*(\theta): \mathcal{C} \rightarrow f_*(\mathcal{O}_X)$ est injectif (I, 1.3.9). Le fait que g est alors une immersion ouverte résulte de (I, 9.5.10) et de l'hypothèse que g est une immersion.

Lemme (8.12.2). — Soient Y un préschéma quasi-compact et quasi-séparé, $f: X \rightarrow Y$ un morphisme quasi-séparé de type fini, \mathcal{C} une \mathcal{O}_Y -Algèbre quasi-cohérente, $Z = \text{Spec}(\mathcal{C})$. Soient $g: X \rightarrow Z$ un Y -morphisme, $\varphi: \mathcal{C} \rightarrow f_*(\mathcal{O}_X)$ le \mathcal{O}_Y -homomorphisme correspondant de \mathcal{O}_Y -Algèbres. Soit (\mathcal{C}_λ) la famille filtrante croissante des sous- \mathcal{O}_Y -Algèbres quasi-cohérentes de type fini de \mathcal{C} (dont \mathcal{C} est la réunion ((I, 9.6.6) et (1.7.9))); posons $Z_\lambda = \text{Spec}(\mathcal{C}_\lambda)$ et soit g_λ le morphisme composé $X \xrightarrow{g} Z \rightarrow Z_\lambda$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) g est une immersion.
- b) Il existe λ tel que g_λ soit une immersion.

De plus, lorsque g_λ est une immersion, il en est de même de g_μ pour $\mu \geq \lambda$.

Il suffit d'appliquer (II, 3.8.4) en remplaçant \mathcal{L} par \mathcal{O}_X et \mathcal{S} par $\mathcal{C}[T]$, et tenant compte de (II, 3.1.7).

Proposition (8.12.3). — Soient Y un préschéma quasi-compact et quasi-séparé, $f : X \rightarrow Y$ un morphisme séparé de type fini. Soit $\mathcal{B} = f_*(\mathcal{O}_X)$, qui est une \mathcal{O}_Y -Algèbre quasi-cohérente (I, 9.2.2); soit \mathcal{C} la fermeture intégrale de \mathcal{O}_Y dans \mathcal{B} , qui est une \mathcal{O}_Y -Algèbre quasi-cohérente (II, 6.3.4); posons $Z = \text{Spec}(\mathcal{C})$, et soit $g : X \rightarrow Z$ le Y -morphisme correspondant à l'injection canonique $\varphi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B} = f_*(\mathcal{O}_X)$ (II, 1.2.7). Soit (\mathcal{C}_λ) la famille filtrante croissante des sous- \mathcal{O}_Y -Algèbres quasi-cohérentes de type fini de \mathcal{C} (dont \mathcal{C} est la réunion ((I, 9.6.6) et (I.7.9))), et, pour tout λ , soit $g_\lambda : X \rightarrow Z_\lambda = \text{Spec}(\mathcal{C}_\lambda)$ le Y -morphisme correspondant à l'injection $\mathcal{C}_\lambda \rightarrow \mathcal{B} = f_*(\mathcal{O}_X)$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

a) Il existe une factorisation de f en

$$X \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{u} Y$$

où f' est une immersion et u un morphisme fini.

a') Il existe une factorisation $X \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{u} Y$ de f , où f' est une immersion ouverte et u un morphisme fini.

b) Le morphisme $g : X \rightarrow Z$ est une immersion.

c) Il existe λ tel que $g_\lambda : X \rightarrow Z_\lambda$ soit une immersion.

De plus, lorsqu'il en est ainsi, g est une immersion ouverte, $g(X)$ est dense dans Z , et il existe λ tel que, pour $\mu \geq \lambda$, g_μ soit une immersion ouverte.

Comme l'homomorphisme $\varphi : \mathcal{C} \rightarrow f_*(\mathcal{O}_X)$ est injectif, il résulte de (8.12.1) que si g est une immersion, c'est une immersion ouverte et $g(X)$ est dense dans Z , et de même pour g_λ . Le fait que $a)$ entraîne $a')$ résulte aussi de (8.12.1), appliqué en Y remplaçant Z par Y' et g par f' (Y' étant fini, donc affine au-dessus de Y) : en effet si Y'' est l'image fermée de X par f' , Y'' est fini au-dessus de Y et f' se factorise en $X \xrightarrow{f''} Y'' \xrightarrow{j} Y'$, où j est l'injection canonique, et f'' est une immersion (I, 4.1.10); il résulte donc de (8.12.1) que f'' est une immersion ouverte.

L'équivalence de $b)$ et $c)$ résulte de (8.12.2) ainsi que le fait que g_λ est alors une immersion pour λ assez grand. Il est clair que $c)$ implique $a)$, puisque Z_λ est fini au-dessus de Y (II, 6.3.4 et 6.1.2). Montrons enfin que $a)$ implique $c)$. On a vu ci-dessus qu'on peut supposer que Y' est l'image fermée de X par f' , et alors il résulte de (8.12.1) que si l'on pose $\mathcal{B}' = u_*(\mathcal{O}_{Y'})$, de sorte que Y' s'identifie à $\text{Spec}(\mathcal{B}')$, l'homomorphisme $\varphi' : \mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B} = f_*(\mathcal{O}_X)$ est injectif. Mais comme par hypothèse \mathcal{B}' est une \mathcal{O}_Y -Algèbre finie, elle s'identifie par définition de \mathcal{B} à une des sous- \mathcal{O}_Y -Algèbres \mathcal{C}_λ , ce qui démontre $c)$.

Nous dirons qu'un morphisme $f : X \rightarrow Y$, où Y est quasi-compact et quasi-séparé, est *pseudo-fini*, s'il est de type fini et vérifie la condition $a)$ de (8.12.3) (auquel cas il est nécessairement séparé).

Corollaire (8.12.4). — Soient Y un préschéma quasi-compact et quasi-séparé, $f : X \rightarrow Y$ un morphisme.

(i) Supposons f pseudo-fini. Alors, pour tout morphisme $Y' \rightarrow Y$, où Y' est quasi-compact et quasi-séparé, $f_{(Y')} : X' = X_{(Y')} \rightarrow Y'$ est pseudo-fini.

(ii) Soit (U_λ) un recouvrement de Y formé d'ouverts quasi-compacts. Pour que f soit pseudo-fini, il faut et il suffit que pour tout λ , la restriction $f_\lambda : f^{-1}(U_\lambda) \rightarrow U_\lambda$ de f soit un morphisme pseudo-fini.

(iii) Supposons en outre Y noethérien, et f de type fini. Alors, pour que f soit pseudo-fini, il faut et il suffit que, pour tout $y \in Y$, le morphisme $f_y = f \times 1 : X_y = X \times_Y \text{Spec}(\mathcal{O}_y) \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}_y)$ le soit.

(i) Il est clair que $f_{(Y')}$ est de type fini (I.5.4); en outre, une factorisation $X \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{u} Y$ où g est une immersion et u est fini, donne une factorisation $X' \xrightarrow{g'} Z' \xrightarrow{u'} Y'$ de $f_{(Y')}$, où $Z' = Z_{(Y')}$, $g' = g_{(Y')}$ et $u' = u_{(Y')}$; g' est une immersion (I, 4.3.2) et u' est fini (II, 6.1.5); donc $f_{(Y')}$ est pseudo-fini.

(ii) La condition est nécessaire en vertu de (i), les U_λ étant quasi-séparés puisque Y l'est. Pour voir qu'elle est suffisante, observons (avec les notations de (8.12.3)) que si l'on pose $X_\lambda = f^{-1}(U_\lambda)$, on a $\mathcal{B}|_{U_\lambda} = (f_\lambda)_* (\mathcal{O}_{X_\lambda})$, $\mathcal{C}|_{U_\lambda}$ est la fermeture intégrale de \mathcal{O}_{U_λ} dans \mathcal{B}_λ et par suite, si $h : Z \rightarrow Y$ est le morphisme canonique, $Z_\lambda = \text{Spec}(\mathcal{C}_\lambda)$ s'identifie à $h^{-1}(U_\lambda)$. Or, pour que $g : X \rightarrow Z$ soit une immersion, il faut et il suffit que pour tout λ , la restriction $g_\lambda : f^{-1}(U_\lambda) \rightarrow h^{-1}(U_\lambda)$ de g le soit (I, 4.2.4). Cela entraîne la conclusion en vertu de (8.12.3).

(iii) Il suffit, en vertu de (ii), de prouver que y admet un voisinage U tel que la restriction $f^{-1}(U) \rightarrow U$ de f soit un morphisme pseudo-fini. Désignons par (U_λ) le système projectif filtrant décroissant des voisinages ouverts affines de y , et appliquons la méthode de (8.1.2, a)). Puisque Y est noethérien, les restrictions $f_\lambda : f^{-1}(U_\lambda) \rightarrow U_\lambda$ de f sont de présentation finie et il en est de même de f_y . Par hypothèse f_y se factorise en $X_y \xrightarrow{g_y} Z_y \xrightarrow{u_y} \text{Spec}(\mathcal{O}_y)$, où u_y est fini et g_y est une immersion. Comme \mathcal{O}_y est noethérien, il en est de même de Z_y , et comme Z_y est de présentation finie sur $\text{Spec}(\mathcal{O}_y)$, il existe un λ et un morphisme de présentation finie $u_\lambda : Z_\lambda \rightarrow U_\lambda$ tels que Z_y s'identifie à $Z_\lambda \times_{U_\lambda} \text{Spec}(\mathcal{O}_y)$ et u_y à $u_\lambda \times 1$ (8.8.2, (ii)); en outre, il existe un morphisme $g_\lambda : X_\lambda \rightarrow Z_\lambda$ tel que $g_y = g_\lambda \times 1$ et que $f_\lambda = u_\lambda \circ g_\lambda$ (8.8.2, (i)). De plus, on peut supposer λ pris de sorte que g_λ soit une immersion et u_λ un morphisme fini (8.10.5, (ii) et (x)), ce qui prouve que f_λ est pseudo-fini.

(8.12.5) Nous pouvons maintenant donner du « Main theorem » de Zariski (III, 4.4.3), une démonstration n'utilisant pas les résultats cohomologiques de nature « globale » du chap. III, mais faisant appel par contre aux propriétés plus fines des anneaux locaux noethériens; nous généraliserons en outre l'énoncé du théorème en le débarrassant des hypothèses noethériennes :

Théorème (8.12.6) (« Main Theorem » de Zariski). — Soit Y un préschéma quasi-compact et quasi-séparé. Si un morphisme $f : X \rightarrow Y$ est quasi-fini, séparé et de présentation finie, il existe une factorisation de f

$$(8.12.6.1) \quad X \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{u} Y$$

où f' est une immersion ouverte et u un morphisme fini.

En vertu de (8.12.4, (ii)) et du caractère local (sur Y) des notions de morphisme quasi-fini, séparé et de présentation finie, on peut se borner au cas où $Y = \text{Spec}(A)$ est affine. Appliquant (8.9.1), on peut supposer qu'il y a un sous-anneau A_0 de A , qui est une \mathbf{Z} -algèbre de type fini, et un A -isomorphisme $X_0 \otimes_{A_0} A \xrightarrow{\sim} X$, f s'identifiant par cet isomorphisme à $f_0 \times 1$, où $f_0 : X_0 \rightarrow \text{Spec}(A_0)$ est un morphisme *de type fini*; en outre (8.10.5, (v) et (xi)) on peut supposer que f_0 est séparé et quasi-fini; si l'on prouve que f_0 est pseudo-fini, il en sera de même de f d'après (8.12.4, (i)). Comme A_0 est alors noethérien et que les notions de morphisme de type fini, séparé et quasi-fini se conservent par changement de base, il résulte de (8.12.4, (iii)) que l'on peut même supposer que A est un anneau local, *essentiellement de type fini sur \mathbf{Z}* (1.3.8). Posons $n = \dim(A)$, et procédons par récurrence sur n ; pour $n = 0$, le théorème est évident, A étant un corps et le morphisme f étant déjà fini (II, 6.2.2). Posons $B = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$; désignons par C la fermeture intégrale de A dans B , posons $Z = \text{Spec}(C)$ et soit $g : X \rightarrow Z$ le Y -morphisme correspondant au A -homomorphisme canonique injectif $C \rightarrow B$; en vertu de (8.12.3), il s'agit de montrer que g est une immersion ouverte. Soit a le point fermé de Y , et soit $U = Y - \{a\}$; U est noethérien et tous ses anneaux locaux sont essentiellement de type fini sur \mathbf{Z} et de dimension $< n$; compte tenu de l'hypothèse de récurrence, et de (8.12.4, (iii)), on voit que la restriction $f^{-1}(U) \rightarrow U$ de f est un morphisme pseudo-fini. On en conclut (8.12.3) que, si $h : Z \rightarrow Y$ est le morphisme structural, la restriction $f^{-1}(U) \rightarrow h^{-1}(U)$ de g est une immersion ouverte. Posons $A' = \hat{A}$, $Y' = \text{Spec}(A')$, $X' = X_{(Y')}$, $f' = f_{(Y')} : X' \rightarrow Y'$. Comme le morphisme canonique $u : Y' \rightarrow Y$ est plat, il résulte de (2.3.1) que $B' = \Gamma(X', \mathcal{O}_{X'})$ s'identifie à la A' -algèbre $B \otimes_A A'$. D'autre part, comme A est un anneau local *excellent* (7.8.3), le morphisme $u : Y' \rightarrow Y$ est régulier, et *a fortiori* normal, et par suite (6.14.4) *la fermeture intégrale de A' dans B' est égale à $C' = C \otimes_A A'$* . On voit donc que $Z' = \text{Spec}(C')$ est égal à $Z_{(Y')}$ et le morphisme $g' : X' \rightarrow Z'$ provenant de l'injection $C' \rightarrow B'$ est égal à $g_{(Y')}$. Comme $u : Y' \rightarrow Y$ est fidèlement plat et quasi-compact, pour prouver que g est une immersion ouverte, il suffit de prouver que g' est une immersion ouverte (2.7.1, (x)). Notons maintenant que $u^{-1}(a)$ est réduit au point fermé a' de Y' et par suite $U' = Y' - \{a'\} = u^{-1}(U)$. Si $h' : Z' \rightarrow Y'$ est le morphisme canonique, le fait que la restriction $f^{-1}(U) \rightarrow h^{-1}(U)$ de g soit une immersion ouverte entraîne qu'il en est de même de la restriction $f'^{-1}(U') \rightarrow h'^{-1}(U')$ de g' . Notons maintenant que f' est un morphisme séparé et quasi-fini (II, 6.2.4); comme A' est *complet*, on déduit de (II, 6.2.6) que X' est Y' -isomorphe à une somme $X'_1 \amalg X'_2$, où la restriction $f'|_{X'_1} = f'_1 : X'_1 \rightarrow Y'$ est un morphisme *fini*, et $X'_2 \subset f'^{-1}(U')$. Il en résulte que B' est composée directe des deux A' -algèbres $\Gamma(X'_1, \mathcal{O}_{X'_1}) = B'_1$ et $\Gamma(X'_2, \mathcal{O}_{X'_2}) = B'_2$; on en conclut aussitôt que la fermeture intégrale C' de A' dans B' est composée directe des fermetures intégrales C'_1, C'_2 de A' dans B'_1, B'_2 respectivement, d'où $Z' = Z'_1 \amalg Z'_2$, où $Z'_i = \text{Spec}(C'_i)$ ($i = 1, 2$); et le morphisme canonique $g' : X' \rightarrow Z'$ est tel que $g'|_{X'_i}$ soit le morphisme canonique $g'_i : X'_i \rightarrow Z'_i$ ($i = 1, 2$). Mais comme B'_1 est déjà une A' -algèbre finie, on a $C'_1 = B'_1$, et g'_1 est donc un isomorphisme. D'autre part, comme $X'_2 \subset f'^{-1}(U')$ et est ouvert dans $f'^{-1}(U')$, on sait

déjà que g'_2 est une immersion ouverte. On conclut bien que g' est une immersion ouverte, C.Q.F.D.

Remarque (8.12.7). — Lorsque, dans (8.12.6), on suppose que Y est un schéma affine, la démonstration par réduction au cas noethérien montre que, dans la factorisation (8.12.6.1), les morphismes f' et u sont aussi des morphismes de présentation finie (1.6.2).

Corollaire (8.12.8). — Soient Y un schéma quasi-compact tel qu'il existe un \mathcal{O}_Y -Module ample (II, 4.5.3), $f: X \rightarrow Y$ un morphisme quasi-fini et quasi-projectif. Alors il existe une factorisation de f en

$$X \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{u} Y$$

où f' est une immersion ouverte et u un morphisme fini.

L'hypothèse entraîne que X s'identifie à un sous- Y -schéma quasi-compact d'un Y -schéma de la forme $Z = \mathbf{P}_Y^r$ (II, 5.3.3). Il y a par suite un voisinage ouvert quasi-compact U de X dans Z tel que X soit fermé dans U ; comme Z est un schéma, l'injection canonique $U \rightarrow Z$ est un morphisme de présentation finie ((1.2.7) et (1.6.2)), donc le morphisme composé $g: U \rightarrow Z \rightarrow Y$ est aussi un morphisme de présentation finie (le fait que \mathbf{P}_Y^r est de présentation finie sur Y résultant aussitôt de la définition (II, 4.1.1)). Soit \mathcal{I} l'idéal quasi-cohérent de \mathcal{O}_U définissant le sous-préschéma fermé X ; comme U est un schéma quasi-compact, \mathcal{I} est limite inductive filtrante de ses sous-Idéaux quasi-cohérents de type fini \mathcal{I}_λ (I, 9.4.9). Si X_λ est le sous-préschéma fermé de U défini par \mathcal{I}_λ , on a par suite $X = \bigcap_\lambda X_\lambda$. Pour tout $y \in Y$, on a donc $f^{-1}(y) = \bigcap_\lambda (X_\lambda \cap g^{-1}(y))$, et comme les ensembles $X_\lambda \cap g^{-1}(y)$ sont fermés dans l'espace noethérien $g^{-1}(y)$, il existe pour tout y un indice $\lambda(y)$ tel que $f^{-1}(y) = X_{\lambda(y)} \cap g^{-1}(y)$. Désignons par E_λ l'ensemble des $y \in Y$ tels que la fibre $X_\lambda \cap g^{-1}(y)$ de la restriction de g à X_λ soit un $k(y)$ -préschéma fini. L'hypothèse que f est quasi-fini entraîne, en vertu de ce qui précède, que $Y = \bigcup_\lambda E_\lambda$. Or, chacun des X_λ est, par définition, de présentation finie sur Y ; il résulte donc de (9.2.3) et (9.2.6) ⁽¹⁾ que les E_λ sont des ensembles constructibles dans le schéma Y ; comme ils forment un ensemble filtrant croissant, il existe un indice λ tel que $E_\lambda = Y$ (1.9.9), et pour cet indice λ , le morphisme $f_\lambda: X_\lambda \rightarrow Y$, restriction de g à X_λ , est donc quasi-fini. Comme il est de présentation finie et séparé, on peut lui appliquer (8.12.6), et f_λ se factorise donc en

$$X_\lambda \xrightarrow{j_\lambda} Y'_\lambda \xrightarrow{u_\lambda} Y$$

où j_λ est une immersion et u_λ un morphisme fini. Comme X est un sous-préschéma fermé de X_λ , on a ainsi prouvé que f possède la propriété (8.12.3, a), d'où le corollaire en vertu de l'équivalence de (8.12.3, a) et (8.12.3, a').

⁽¹⁾ Le lecteur vérifiera que les corollaires (8.12.8) à (8.12.11) ne sont pas utilisés dans le § 9.

Corollaire (8.12.9). — Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme localement quasi-fini (**Err**_{III}, 20). Pour tout $x \in X$ il existe un voisinage ouvert U de x dans X , un voisinage ouvert V de $y = f(x)$ dans Y , tels que $f(U) \subset V$ et une factorisation

$$U \xrightarrow{f'} V' \xrightarrow{u} V$$

de la restriction de f à U , où f' est une immersion ouverte et u un morphisme fini.

Il suffit évidemment de prendre pour V un voisinage affine de y dans Y , pour U un voisinage affine de x dans X contenu dans $f^{-1}(U)$ et tel que $f|U$ soit quasi-fini. Le morphisme $U \rightarrow V$ restriction de f étant alors affine (donc quasi-projectif), on peut lui appliquer (8.12.8).

Corollaire (8.12.10). — Soient Y un préschéma intègre et normal, X un préschéma intègre, $f : X \rightarrow Y$ un morphisme birationnel et localement quasi-fini (**Err**_{III}, 20). Alors f est un isomorphisme local; pour que f soit une immersion ouverte, il faut et il suffit que f soit en outre séparé.

La seconde assertion résulte aussitôt de la première et de (**I**, 8.2.8). Pour prouver la première assertion, on peut supposer X et Y affines et f quasi-fini; considérons la factorisation $f = u \circ f'$ de (8.12.8), qui permet d'identifier X par f' à un sous-préschéma induit sur un ouvert de Y' . Comme X est intègre, on peut, en vertu de (**I**, 5.2.3), remplacer Y' par le sous-préschéma réduit de Y' ayant pour espace sous-jacent \bar{X} , donc on peut supposer aussi que Y' est intègre. En outre, puisque f est birationnel, u l'est aussi. La conclusion résulte alors du lemme suivant :

Lemme (8.12.10.1). — Soient Y' un préschéma intègre, Y un préschéma intègre et normal; alors un morphisme $u : Y' \rightarrow Y$ fini et birationnel est un isomorphisme.

Posons en effet $\mathcal{A} = u_*(\mathcal{O}_{Y'})$, de sorte que \mathcal{A} est une \mathcal{O}_Y -Algèbre finie, Y' s'identifiant à $\text{Spec}(\mathcal{A})$ (**II**, 1.3.6). Si $R(Y)$ est le corps des fonctions rationnelles de Y , on a donc, pour tout $y \in Y$, $\mathcal{O}_{Y,y} \subset \mathcal{A}_y \subset R(Y)$; mais comme l'anneau $\mathcal{O}_{Y,y}$ est par hypothèse intégralement clos et a $R(Y)$ pour corps des fractions, on a nécessairement $\mathcal{A}_y = \mathcal{O}_{Y,y}$, d'où le lemme.

Corollaire (8.12.11). — Soient Y un préschéma intègre, X un préschéma intègre et normal, $f : X \rightarrow Y$ un morphisme dominant et localement quasi-fini. Soient K et L (extension de K) les corps de fonctions rationnelles de Y et X respectivement; et soit Y' la fermeture intégrale de Y relativement à L (**II**, 6.3.4); alors f se factorise d'une seule manière en $f : X \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{u} Y$, où f' est birationnel, et correspond à l'automorphisme identique de L ; f' est alors un isomorphisme local, et pour que f' soit une immersion ouverte, il faut et il suffit que f soit séparé.

L'existence et l'unicité de la factorisation de f résultent de (**II**, 6.3.9). Il résulte de (**II**, 6.2.4, (v)), en se ramenant au cas affine, que f' est localement quasi-fini; en outre, il résulte de (**I**, 5.5.1) que, pour que f' soit séparé, il faut et il suffit que f le soit, puisque u est affine, donc séparé; les deux dernières assertions sont donc des conséquences de (8.12.10) appliqué à f' .

8.13. Traduction en termes de pro-objets.

La proposition suivante est essentiellement équivalente à (8.8.2, (i)) :

Proposition (8.13.1). — Soient S un préschéma, $(X_\lambda, v_{\lambda\mu})$ un système projectif filtrant de S -préschémas ; on suppose qu'il existe α tel que $v_{\alpha\lambda}$ soit un morphisme affine pour tout $\lambda \geq \alpha$ (ce qui entraîne (II, 1.6.2) que $v_{\lambda\mu}$ est affine pour $\alpha \leq \lambda \leq \mu$), de sorte que la limite projective $X = \varprojlim X_\lambda$ existe dans la catégorie des S -préschémas (8.2.3). Soit Y un S -préschéma, et, pour tout $\lambda \geq \alpha$, soit $e_\lambda : \text{Hom}_S(X_\lambda, Y) \rightarrow \text{Hom}_S(X, Y)$ l'application qui, à tout S -morphisme $f_\lambda : X_\lambda \rightarrow Y$, fait correspondre $f = f_\lambda \circ v_\lambda$, où $v_\lambda : X \rightarrow X_\lambda$ est le morphisme canonique. La famille (e_λ) est un système inductif d'applications, qui définit donc une application canonique

$$(8.13.1.1) \quad \varinjlim \text{Hom}_S(X_\lambda, Y) \rightarrow \text{Hom}_S(X, Y).$$

Supposons X_α quasi-compact (resp. quasi-compact et quasi-séparé), et le morphisme structural $Y \rightarrow S$ localement de type fini (resp. localement de présentation finie). Alors l'application (8.13.1.1) est injective (resp. bijective).

Posons en effet, pour $\lambda \geq \alpha$, $Z_\lambda = Y \times_S X_\lambda$, de sorte que l'on a $Z_\lambda = Z_\alpha \times_{X_\alpha} X_\lambda$. Posons de même $Z = Y \times_S X = Z_\alpha \times_{X_\alpha} X$; on sait alors (8.2.5) que, si l'on pose aussi $w_{\lambda\mu} = 1 \times v_{\lambda\mu} : Z_\mu \rightarrow Z_\lambda$ pour $\alpha \leq \lambda \leq \mu$ et $w_\lambda = 1 \times v_\lambda : Z \rightarrow Z_\lambda$ pour $\alpha \leq \lambda$, Z est limite projective du système projectif $(Z_\lambda, w_{\lambda\mu})$ et les w_λ sont les morphismes canoniques correspondants. Notons d'autre part que le morphisme $Z_\alpha \rightarrow X_\alpha$ est localement de type fini (resp. localement de présentation finie) (1.3.4 et 1.4.3). Enfin, on sait que l'on a

$$\text{Hom}_S(X_\lambda, Y) = \text{Hom}_{X_\lambda}(X_\lambda, Z_\lambda) \quad \text{et} \quad \text{Hom}_S(X, Y) = \text{Hom}_X(X, Z)$$

(I, 3.3.14). Il suffit maintenant d'appliquer (8.8.2, (i)) en y faisant $X_\lambda = S_\lambda$ et en y remplaçant Y_λ par Z_λ .

Corollaire (8.13.2). — Avec les notations de (8.13.1), on suppose X_α quasi-compact et quasi-séparé, et les $v_{\alpha\lambda}$ affines pour $\alpha \leq \lambda$; on suppose en outre que $Y = \varprojlim Y_\rho$, où $(Y_\rho, t_{\rho\sigma})$ est un système projectif filtrant de S -préschémas tel que, pour chaque ρ , le morphisme structural $Y_\rho \rightarrow S$ soit localement de présentation finie. On a alors une bijection canonique

$$(8.13.2.1) \quad \text{Hom}_S(X, Y) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{\rho} \left(\varinjlim_{\lambda} \text{Hom}_S(X_\lambda, Y_\rho) \right).$$

En effet, le fait que Y soit limite projective des Y_ρ entraîne en particulier que l'application canonique $\text{Hom}_S(X, Y) \rightarrow \varprojlim_{\rho} \text{Hom}_S(X, Y_\rho)$ est bijective; et d'autre part, les hypothèses entraînent, pour chaque ρ , l'existence d'une bijection canonique $\text{Hom}_S(X, Y_\rho) \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{\lambda} \text{Hom}_S(S_\lambda, Y_\rho)$ en vertu de (8.13.1); d'où la conclusion.

(8.13.3) Les résultats précédents permettent d'interpréter dans la théorie des préschémas les notions de « pro-variété » ou de « pro-schéma » qui s'introduisent dans certaines applications (par exemple dans la théorie du corps de classes local suivant les idées de Serre [39] ou dans la théorie de Néron sur la réduction des variétés

abéliennes [32]). Rappelons rapidement ici la notion de *pro-objet* d'une catégorie, renvoyant au chap. V pour de plus amples développements (nous n'utiliserons d'ailleurs pas avant le chap. V l'interprétation qui va suivre, et le lecteur peut donc omettre jusque-là la lecture de la fin de ce numéro). Étant donnée une catégorie \mathcal{C} , la catégorie $\mathbf{Pro}(\mathcal{C})$ des *pro-objets* de \mathcal{C} a pour objets les *systèmes projectifs* (dans l'univers où l'on se place) $\mathbf{X} = (X_\mu)_{\mu \in \mathbb{M}}$ d'objets de \mathcal{C} dont les ensembles d'indices (dépendant du système projectif considéré) sont supposés préordonnés filtrants. Étant donnés deux tels pro-objets $\mathbf{X} = (X_\mu)_{\mu \in \mathbb{M}}$, $\mathbf{X}' = (X'_{\mu'})_{\mu' \in \mathbb{M}'}$, les *morphismes* de \mathbf{X} dans \mathbf{X}' sont par définition les éléments de l'ensemble $\lim_{\leftarrow \mu'} (\lim_{\rightarrow \mu} \text{Hom}(X_\mu, X'_{\mu'}))$; la vérification du fait que l'on peut prendre ces ensembles pour ensembles de morphismes est immédiate, la composition de systèmes de morphismes $u_\mu^\mu : X_\mu \rightarrow X'_{\mu'}$, $u_{\mu'}^{\mu''} : X'_{\mu'} \rightarrow X'_{\mu''}$ qui sont inductifs en l'indice supérieur et projectifs en l'indice inférieur, se faisant « argument par argument », autrement dit en considérant le système des $u_{\mu'}^{\mu''} \circ u_\mu^\mu$.

(8.13.4) Considérons alors un préschéma quasi-compact et quasi-séparé S , et désignons par \mathcal{C} la sous-catégorie pleine de la catégorie $(\mathbf{Sch})_S$ des S -préschémas, formée des S -préschémas X ayant la propriété suivante : le morphisme structural $X \rightarrow S$ se factorise en $X \xrightarrow{g} X_0 \xrightarrow{f} S$, où $g : X \rightarrow X_0$ est *affine* et $f : X_0 \rightarrow S$ de *présentation finie*; nous dirons pour abrégé que les préschémas de \mathcal{C} sont *essentiellement affines au-dessus de S* .

Considérons d'autre part la sous-catégorie pleine \mathcal{C}'_0 de $(\mathbf{Sch})_S$ formée des S -préschémas de *présentation finie*, et la catégorie $\mathbf{Pro}(\mathcal{C}'_0)$ des pro-objets de \mathcal{C}'_0 . Nous dirons qu'un objet $\mathbf{X} = (X_\mu)_{\mu \in \mathbb{M}}$ de $\mathbf{Pro}(\mathcal{C}'_0)$ est *essentiellement affine* s'il existe un $\gamma \in \mathbb{M}$ tel que pour tout $\mu \geq \gamma$, le morphisme de transition $v_{\gamma\mu} : X_\mu \rightarrow X_\gamma$ soit *affine* (ce qui entraîne que pour $\gamma \leq \mu \leq \nu$, $v_{\mu\nu} : X_\nu \rightarrow X_\mu$ est affine). On notera qu'un objet de $\mathbf{Pro}(\mathcal{C}'_0)$ *isomorphe* à un objet essentiellement affine *n'est pas* nécessairement essentiellement affine lui-même. Nous désignerons par \mathcal{C}' la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Pro}(\mathcal{C}'_0)$ formée des pro-objets de \mathcal{C}'_0 essentiellement affines.

Cela étant, il résulte de (8.2.2) et (8.2.3) que pour tout objet $\mathbf{X} = (X_\mu)_{\mu \in \mathbb{M}}$ de \mathcal{C}' , le S -préschéma $X = \lim_{\leftarrow \mu} X_\mu$ existe; en outre, comme, pour μ assez grand, le morphisme $X \rightarrow X_\mu$ est affine (8.2.2), X est *essentiellement affine au-dessus de S* par définition. Posons $X = L(\mathbf{X})$; montrons qu'on a ainsi défini un *foncteur canonique*

$$(8.13.4.1) \quad L : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$$

On a en effet, pour deux objets $\mathbf{X} = (X_\mu)$, $\mathbf{X}' = (X'_{\mu'})$ de \mathcal{C}' , une application canonique pour chaque μ'

$$\lim_{\rightarrow \mu'} \text{Hom}_S(X_\mu, X'_{\mu'}) \rightarrow \text{Hom}_S(\lim_{\leftarrow \mu} X_\mu, \lim_{\leftarrow \mu'} X'_{\mu'})$$

définie dans (8.13.1.1), et d'autre part, par définition de la limite projective, une bijection canonique

$$\lim_{\leftarrow \mu'} \text{Hom}_S(\lim_{\leftarrow \mu} X_\mu, \lim_{\leftarrow \mu'} X'_{\mu'}) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_S(\lim_{\leftarrow \mu} X_\mu, \lim_{\leftarrow \mu'} X'_{\mu'})$$

d'où une application canonique

$$(8.13.4.2) \quad \lim_{\leftarrow \mu'} \left(\lim_{\rightarrow \mu} \text{Hom}_S(X_\mu, X_{\mu'}) \right) \rightarrow \text{Hom} \left(\lim_{\leftarrow \mu} X_\mu, \lim_{\leftarrow \mu'} X_{\mu'} \right)$$

évidemment fonctorielle en \mathbf{X} et \mathbf{X}' , et qui complète la définition du foncteur L .

Proposition (8.13.5). — *Les hypothèses et notations étant celles de (8.13.4), le foncteur L est pleinement fidèle. Si de plus S est un préschéma noethérien (ce qui implique déjà que S est quasi-compact et quasi-séparé (1.2.8)), L est une équivalence de catégories.*

Dire que L est pleinement fidèle signifie que l'application (8.13.4.2) est bijective quels que soient \mathbf{X}, \mathbf{X}' dans \mathcal{C}' , ce qui est un cas particulier de (8.13.2) : en effet, les morphismes structuraux $X_\mu \rightarrow S$ étant de présentation finie, sont en particulier quasi-compactes et quasi-séparés, donc les X_μ sont quasi-compactes et quasi-séparés.

Pour montrer que lorsque S est noethérien L est une équivalence de catégories, il suffit, puisque l'on sait déjà que L est pleinement fidèle, de prouver que tout S -préschéma essentiellement affine X est S -isomorphe à un objet de la forme $L(\mathbf{X})$ où $\mathbf{X} \in \mathcal{C}'$ (0_{III} , 8.1.5). Or, il y a par hypothèse une factorisation $X \xrightarrow{g} X_0 \xrightarrow{f} S$ du morphisme structural, f étant de présentation finie et g affine. On peut donc écrire $X = \text{Spec}(\mathcal{A})$, où \mathcal{A} est une \mathcal{O}_{X_0} -Algèbre quasi-cohérente (II , 1.3.1). Or, comme X_0 est noethérien (puisque'il en est ainsi de S et que f est de type fini), \mathcal{A} est limite inductive filtrante de la famille (\mathcal{A}_λ) de ses sous- \mathcal{O}_{X_0} -Algèbres quasi-cohérentes de type fini (I , 9.6.6). Posons $X_\lambda = \text{Spec}(\mathcal{A}_\lambda)$; les morphismes $X_\lambda \rightarrow X_0$ sont de type fini, donc de présentation finie puisque X_0 est noethérien, et par suite il en est de même des morphismes composés $X_\lambda \rightarrow X_0 \rightarrow S$ (1.6.2); autrement dit, les X_λ appartiennent à \mathcal{C}'_0 et comme les morphismes $X_\lambda \rightarrow X_0$ sont affines, $\mathbf{X} = (X_\lambda)$ est un objet de \mathcal{C}' dont la limite projective existe et est S -isomorphe à X en vertu de (8.2.2). Ceci achève la démonstration.

Remarque (8.13.6). — Il résulte de (1.6.2) et de (II , 1.6.2) que si X et Y sont essentiellement affines au-dessus de S , alors il en est de même de $X \times_S Y$. On en conclut par exemple (0_{III} , 8.2.5) qu'un \mathcal{C} -groupe n'est autre qu'un $(Sch)_S$ -groupe qui est un préschéma essentiellement affine au-dessus de S . D'autre part, les produits finis existent dans la catégorie \mathcal{C}' : en effet, si $\mathbf{X} = (X_\mu)_{\mu \in M}$, $\mathbf{Y} = (Y_\rho)_{\rho \in R}$ sont deux objets de \mathcal{C}' , les produits $X_\mu \times_S Y_\rho$ sont des S -préschémas de présentation finie, et en prenant pour morphismes de transition $X_\nu \times_S Y_\sigma \rightarrow X_\mu \times_S Y_\rho$ les produits des morphismes de transition $X_\nu \rightarrow X_\mu$ et $Y_\sigma \rightarrow Y_\rho$, on voit aussitôt que $(X_\mu \times_S Y_\rho)$ est produit de \mathbf{X} et de \mathbf{Y} dans $\text{Pro}(\mathcal{C}'_0)$; en outre (II , 1.6.2) les morphismes de transition ainsi définis sont affines pour μ et ρ assez grands, donc le produit $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ ainsi défini appartient bien à \mathcal{C}' . On conclut alors comme plus haut qu'un \mathcal{C}' -groupe est un $\text{Pro}(\mathcal{C}'_0)$ -groupe qui est essentiellement affine. On déduit donc de (8.13.5) que les catégories des \mathcal{C}' -groupes et des \mathcal{C} -groupes sont équivalentes lorsque S est noethérien. Il semble plausible que lorsque S est le spectre d'un corps k , la catégorie des \mathcal{C} -groupes soit équivalente à celle des \mathbf{K} -groupes, où \mathbf{K} est la catégorie des S -préschémas quasi-compactes; autrement dit, tout préschéma en groupes sur k qui est quasi-compact serait essentiellement affine. D'autre part, si l'on désigne

par $C'_0\text{-gr}$ la catégorie des C'_0 -groupes, il est vraisemblable que la catégorie des C' -groupes est équivalente à la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Pro}(C'_0\text{-gr})$ formée des « groupes proalgébriques essentiellement affines », c'est-à-dire des systèmes projectifs $\mathbf{G} = (G_\mu)_{\mu \in M}$, où les G_μ sont des groupes algébriques sur k et les morphismes de transition $G_\nu \rightarrow G_\mu$ sont affines pour μ assez grand (ce que l'on peut exprimer aussi en disant que \mathbf{G} est extension d'un groupe algébrique par un pro-groupe algébrique affine). La conjonction de ces deux conjectures équivaut d'ailleurs à la suivante : tout préschéma en groupes quasi-compacts sur k est « extension » d'un « groupe algébrique » (i.e. un préschéma en groupes de type fini sur k) par un préschéma en groupes affine sur k .

Les seuls pro-groupes algébriques rencontrés en pratique jusqu'à présent étant en fait essentiellement affines, il y aura donc sans doute avantage à substituer à l'étude des groupes pro-algébriques généraux (introduits et étudiés par Serre [40]) celle des schémas en groupes quasi-compacts sur k , dont la définition est conceptuellement plus simple.

8.14. Caractérisation d'un préschéma localement de présentation finie sur un autre, en termes du foncteur qu'il représente.

(8.14.1) Étant donné un préschéma S , nous dirons encore, comme en (8.13.4), qu'un système projectif filtrant $(X_\lambda, v_{\lambda\mu})$ de S -préschémas est *essentiellement affine* s'il existe α tel que $v_{\alpha\lambda}$ soit un morphisme affine pour $\lambda \geq \alpha$.

L'énoncé suivant, qui sera surtout utile au chap. V, précise (8.8.2, (i)) en lui fournissant une réciproque :

Proposition (8.14.2). — Soient S un préschéma, $f : X \rightarrow S$ un morphisme. Pour tout S -préschéma T , posons

$$h_X(T) = \text{Hom}_S(T, X)$$

de sorte que h_X est un foncteur contravariant de la catégorie $(\mathbf{Sch})_S$ des S -préschémas dans la catégorie \mathbf{Ens} des ensembles (0_{III}, 8.1.1), et X un objet représentant ce foncteur (0_{III}, 8.1.8). Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) f est localement de présentation finie.

b) Pour tout système projectif filtrant (Z_λ) de S -préschémas, essentiellement affine (8.13.4) et formé de préschémas quasi-compacts et quasi-séparés, l'application canonique (8.13.1.1)

$$(8.14.2.1) \quad \lim_{\rightarrow} h_X(Z_\lambda) \rightarrow h_X(\lim_{\leftarrow} Z_\lambda)$$

est bijective.

c) Pour tout système projectif filtrant (Z_λ) de S -préschémas, tel que les Z_λ soient des schémas affines, l'application (8.14.2.1) est bijective.

c') Pour tout ouvert affine U de S et tout système projectif filtrant (Z_λ) de U -préschémas, tel que les Z_λ soient des schémas affines, l'application (8.14.2.1) est bijective.

Le fait que a) implique b) n'est autre que (8.13.1); il est trivial que b) implique c) et que c) implique c'). Reste à voir que c') entraîne a), et comme la propriété a) est locale sur S , on peut se borner au cas où S est affine.

Supposons d'abord que X soit aussi affine; l'assertion à prouver est alors équivalente au

Corollaire (8.14.2.2). — Soient A un anneau, B une A -algèbre. Afin que, pour tout système inductif filtrant (C_λ) de A -algèbres, l'application canonique

$$(8.14.2.3) \quad \lim_{\rightarrow} \text{Hom}_{A\text{-alg.}}(B, C_\lambda) \rightarrow \text{Hom}_{A\text{-alg.}}(B, \lim_{\rightarrow} C_\lambda)$$

soit bijective, il faut et il suffit que B soit une A -algèbre de présentation finie.

Il reste seulement à montrer que la condition est nécessaire. Prenons d'abord pour (C_λ) le système inductif filtrant des sous- A -algèbres de type fini de B , de sorte que $\lim_{\rightarrow} C_\lambda = B$. Le fait que (8.14.2.3) soit bijective entraîne en particulier que l'application identique 1_B se factorise en $B \rightarrow C_\lambda \rightarrow B$ pour un λ convenable, ce qui entraîne $C_\lambda = B$, donc B est une A -algèbre de type fini. Posons alors $B = C/\mathfrak{J}$, où $C = A[T_1, \dots, T_n]$ et \mathfrak{J} est un idéal de C . Alors \mathfrak{J} est limite inductive filtrante des idéaux de type fini $\mathfrak{J}_\lambda \subset \mathfrak{J}$ de C ; posant $C_\lambda = C/\mathfrak{J}_\lambda$, et utilisant l'exactitude du foncteur \lim_{\rightarrow} , on voit que B est encore isomorphe à la limite inductive du système inductif filtrant (C_λ) . Il existe donc un λ et un A -homomorphisme $u : B \rightarrow C_\lambda$ tels que le composé $B \xrightarrow{u} C_\lambda \xrightarrow{p_\lambda} B$ (où p_λ est l'homomorphisme canonique) soit l'identité. Soit $q_\lambda : C \rightarrow C_\lambda$ l'homomorphisme canonique, et posons $t_i = p_\lambda(q_\lambda(T_i))$; on a donc $p_\lambda(u(t_i)) = p_\lambda(q_\lambda(T_i))$, autrement dit $u(t_i) - q_\lambda(T_i) \in \mathfrak{J}/\mathfrak{J}_\lambda$. Il existe donc un $\mu \geq \lambda$ tel que les n éléments $u(t_i) - q_\lambda(T_i)$ appartiennent à $\mathfrak{J}_\mu/\mathfrak{J}_\lambda$ ($1 \leq i \leq n$); si $p_{\mu\lambda} : C_\lambda \rightarrow C_\mu$ est l'homomorphisme canonique, on a par suite $p_{\mu\lambda}(u(t_i)) = p_{\mu\lambda}(q_\lambda(T_i)) = q_\mu(T_i)$. Remplaçant λ par μ et u par $p_{\mu\lambda} \circ u$, on peut donc supposer que $u(t_i) = q_\lambda(T_i)$ pour tout i , et si $r = p_\lambda \circ q_\lambda$ est l'homomorphisme canonique $C \rightarrow C/\mathfrak{J} = B$, on peut donc écrire $u(r(T_i)) = q_\lambda(T_i)$ pour tout i , d'où $q_\lambda = u \circ r$. Mais cela entraîne nécessairement que $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_\lambda$, car si $z \in \mathfrak{J}$, on a $r(z) = 0$; donc on a $B = C_\lambda$.

Passons maintenant au cas où S est affine et X quelconque; tout revient à prouver qu'un ouvert affine V de X est de présentation finie sur S , et en vertu de ce qui vient d'être démontré, il suffit de prouver que pour tout système projectif filtrant (Z_λ) de S -préschémas affines, l'application

$$(8.14.2.4) \quad \lim_{\rightarrow} \text{Hom}_S(Z_\lambda, V) \rightarrow \text{Hom}_S(\lim_{\leftarrow} Z_\lambda, V)$$

est bijective. Il est immédiat que cette application est injective, car si $(v_\lambda), (v'_\lambda)$ sont deux systèmes inductifs de S -homomorphismes $v_\lambda : Z_\lambda \rightarrow V, v'_\lambda : Z_\lambda \rightarrow V$ tels que les morphismes correspondants

$$Z \xrightarrow{u_\lambda} Z_\lambda \xrightarrow{v_\lambda} V, \quad Z \xrightarrow{u_\lambda} Z_\lambda \xrightarrow{v'_\lambda} V$$

soient égaux (u_λ étant le morphisme canonique), alors les morphismes

$$Z \xrightarrow{u_\lambda} Z_\lambda \xrightarrow{v_\lambda} V \xrightarrow{j} X, \quad Z \xrightarrow{u_\lambda} Z_\lambda \xrightarrow{v'_\lambda} V \xrightarrow{j} X$$

(où j est l'injection canonique) sont égaux, ce qui entraîne $j \circ v_\lambda = j \circ v'_\lambda$ par hypothèse pour un λ convenable, donc $v_\lambda = v'_\lambda$.

Reste à prouver que (8.14.2.4) est surjective. Soit donc $v : Z \rightarrow V$ un S -morphisme; par hypothèse il existe un λ et un S -morphisme $w_\lambda : Z_\lambda \rightarrow X$ tels que $j \circ v$ se factorise en $Z \xrightarrow{u_\lambda} Z_\lambda \xrightarrow{w_\lambda} X$, et tout revient à prouver qu'il existe $\mu \geq \lambda$ tel que le morphisme

$$Z_\mu \xrightarrow{u_{\lambda\mu}} Z_\lambda \xrightarrow{w_\lambda} X$$

(où $u_{\lambda\mu}$ est le morphisme de transition) se factorise en $Z_\mu \xrightarrow{v_\mu} V \xrightarrow{j} X$. Posons, pour tout $\mu \geq \lambda$, $U_\mu = u_{\lambda\mu}^{-1}(w_\lambda^{-1}(V))$. On a $u_\mu^{-1}(U_\mu) = u_\lambda^{-1}(U_\lambda) = u_\lambda^{-1}(w_\lambda^{-1}(V)) = v^{-1}(V) = Z$. Comme les Z_λ sont quasi-compacts et que les U_μ , étant ouverts, sont ind-constructibles (1.9.6), on déduit de (8.3.4) qu'il existe $\mu \geq \lambda$ tel que $U_\mu = Z_\mu$. C.Q.F.D.

Remarque (8.14.3). — Le fait que l'application (8.14.2.1) soit injective lorsque f est localement de type fini (8.8.2, (i)) amène naturellement à se demander si ce résultat admet aussi une réciproque. Il n'en est rien, même lorsque S et X sont affines, car il existe des monomorphismes $X \rightarrow S$ qui ne sont pas de type fini (I, 2.4.2), et qui mettent donc en défaut cette conjecture.

§ 9. PROPRIÉTÉS CONSTRUCTIBLES

Soient S un préschéma, $f : X \rightarrow S$ un morphisme de *présentation finie* (1.6.1), \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -Module quasi-cohérent de *présentation finie*. On se propose dans ce paragraphe de donner des critères assurant, par exemple, que l'ensemble des $s \in S$ tels que le $\mathbf{k}(s)$ -préschéma $X_s = f^{-1}(s) = X \times_S \text{Spec}(\mathbf{k}(s))$ a une certaine propriété, ou tels que le \mathcal{O}_{X_s} -Module $\mathcal{F}_s = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathbf{k}(s)$ a une certaine propriété, est *localement constructible*, ou tout au moins *ind-constructible* (1.9.4); on verra que c'est le cas pour la plupart des propriétés qui s'introduisent en Géométrie algébrique. En supposant seulement f *localement de présentation finie*, on donnera aussi (9.9) des critères pour que l'ensemble des points $x \in X$ où la fibre $X_{f(x)}$ (ou le $\mathcal{O}_{X_{f(x)}}$ -Module $\mathcal{F}_{f(x)}$) a une certaine propriété, soit *localement constructible*. On verra au § 12 que ces résultats, joints à l'hypothèse supplémentaire que f est *plat* (resp. *propre et plat*), permettent de prouver que les ensembles considérés dans X (resp. dans S) sont même *ouverts* dans de nombreux cas.

9.1. Le principe de l'extension finie.

Proposition (9.1.1) (Principe de l'extension finie). — Soient k un corps, \mathcal{C} un ensemble d'extensions de k . On suppose vérifiées les conditions suivantes :

- (i) Si $K \in \mathcal{C}$ et s'il existe un k -homomorphisme $K \rightarrow K'$ (où K' appartient à l'univers où l'on se place), alors $K' \in \mathcal{C}$.
- (ii) Si $K \in \mathcal{C}$, il existe une sous-extension K' de K , de type fini sur k , telle que $K' \in \mathcal{C}$.
- (iii) Si $K \in \mathcal{C}$ est le corps de fractions d'une k -algèbre intègre de type fini A , il existe $f \in A - \{0\}$ tel que pour tout idéal maximal \mathfrak{m} de A on ait $A_f/\mathfrak{m} \in \mathcal{C}$.

Soit alors Ω une extension algébriquement close de k (dans l'univers considéré). Les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) \mathcal{C} est non vide.
- b) Il existe $K' \in \mathcal{C}$ qui est une extension finie de k .
- c) On a $\Omega \in \mathcal{C}$.

La condition (i) implique évidemment que b) entraîne c), et c) entraîne trivialement a); prouvons que a) entraîne b). En vertu de (ii) et (iii) il existe une extension $K' \in \mathcal{C}$ qui est de la forme A/\mathfrak{m} , où A est une k -algèbre de type fini sur k et \mathfrak{m} un idéal maximal de A . On sait, par le théorème des zéros de Hilbert (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. V, § 3, n° 1, cor. 2 du th. 1) que K' est une extension finie de k .

Corollaire (9.1.2). — Sous les hypothèses (i), (ii), (iii) de (9.1.1), si k est algébriquement clos et si \mathcal{C} n'est pas vide, \mathcal{C} contient toutes les extensions de k dans l'univers envisagé.

En effet, comme a) entraîne c), on a $k \in \mathcal{C}$, et la conclusion résulte de l'hypothèse (i).

Remarque (9.1.3). — En pratique, on vérifiera la condition (ii) de (9.1.1) en notant que K est limite inductive de ses sous-extensions de type fini K_α , et en appliquant les résultats du § 8, compte tenu éventuellement du fait que pour $K_\alpha \subset K_\beta$, K_β est fidèlement plat sur K_α . Fréquemment l'ensemble \mathcal{C} est formé des corps appartenant à un ensemble \mathcal{C}' de k -algèbres qui vérifie la condition suivante :

(i bis) Si $A \in \mathcal{C}'$ et s'il existe un homomorphisme de k -algèbres $A \rightarrow A'$ (où A' appartient à l'univers où l'on se place), alors $A' \in \mathcal{C}'$.

Lorsqu'il en est ainsi, la condition (i) est trivialement satisfaite, et on vérifiera généralement la condition (iii) de (9.1.1) en notant que le corps des fractions K de A est la limite inductive des algèbres A_f (pour la relation $D(f) \supset D(g)$), et en appliquant les résultats du § 8, compte tenu éventuellement du fait que les morphismes $D(g) \rightarrow D(f)$ sont des immersions ouvertes.

Par contre, lorsque (i bis) n'est pas vérifiée, la démonstration de (iii) est souvent plus délicate, et est liée à des critères de constructibilité qui seront développés plus loin.

Voici des exemples typiques d'application du principe de l'extension finie :

Proposition (9.1.4). — Soient k un corps, Ω une extension algébriquement close de k , X et Y deux préschémas de type fini sur k . Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) Il existe un Ω -morphisme $X_{(\Omega)} \rightarrow Y_{(\Omega)}$ (resp. un Ω -morphisme possédant l'une (déterminée) des propriétés (i) à (xiv) de (8.10.5)).

b) Il existe une extension finie k' de k et un k' -morphisme $X_{(k')} \rightarrow Y_{(k')}$ (resp. un k' -morphisme possédant la propriété considérée).

c) Il existe une extension K de k et un K -morphisme $X_{(K)} \rightarrow Y_{(K)}$ (resp. un K -morphisme possédant la propriété considérée).

On applique la remarque (9.1.3) en prenant pour \mathcal{C}' l'ensemble de toutes les k -algèbres A (de l'univers où on est placé) telles qu'il existe un A -morphisme $X \otimes_k A \rightarrow Y \otimes_k A$ (resp. un morphisme ayant celle des propriétés de (8.10.5) que l'on considère). La condition (i bis) de (9.1.3) est alors vérifiée grâce au fait que les

propriétés envisagées dans (8.10.5) sont toutes stables par changement de base. La condition (iii) de (9.1.1) est donc satisfaite en vertu de (8.8.2, (i)) (resp. (8.10.5)), puisque $\text{Spec}(k)$ est quasi-compact et quasi-séparé. Reste à vérifier la condition (ii) de (9.1.1) qui découle encore de (8.8.2, (i)) et de (8.10.5), en considérant K comme limite inductive de ses sous-extensions de type fini. On conclut donc par (9.1.1).

En particulier, s'il existe une extension K de k et un K -isomorphisme $X_{(K)} \xrightarrow{\sim} Y_{(K)}$, on dit que X et Y sont *géométriquement isomorphes*.

Le corollaire suivant généralise (II, 6.6.5) :

Corollaire (9.1.5). — *Soient k un corps, X un k -préschéma. S'il existe une extension K de k telle que $X_{(K)}$ soit projectif (resp. quasi-projectif) sur K , alors X est projectif (resp. quasi-projectif) sur k .*

Le morphisme $\text{Spec}(K) \rightarrow \text{Spec}(k)$ étant fidèlement plat et quasi-compact, il résulte déjà de (2.7.1, (v)) que X est de type fini sur k . L'hypothèse signifie qu'il existe une immersion fermée (resp. une immersion) $X_{(K)} \rightarrow \mathbf{P}_K^r = \mathbf{P}_k^r \otimes_k K$ (II, 5.5.4, (ii) et 5.5.3); appliquant (9.1.4) pour la propriété (iv) (resp. (ii)) de (8.10.5), on en déduit qu'il y a une extension finie k' de k et une immersion fermée (resp. une immersion) $X_{(k')} \rightarrow \mathbf{P}_{k'}^r$, autrement dit $X_{(k')}$ est projectif (resp. quasi-projectif) sur k' . On conclut alors par (II, 6.6.5).

Proposition (9.1.6). — *Soient k un corps, Ω une extension algébriquement close de k , X un préschéma de type fini sur k , \mathcal{F}, \mathcal{G} deux \mathcal{O}_X -Modules cohérents. Supposons qu'il existe un isomorphisme $\mathcal{F} \otimes_k \Omega \xrightarrow{\sim} \mathcal{G} \otimes_k \Omega$. Alors il existe une extension finie k' de k et un isomorphisme $\mathcal{F} \otimes_k k' \xrightarrow{\sim} \mathcal{G} \otimes_k k'$.*

Le raisonnement est le même que dans (9.1.4), en appliquant (8.5.2, (i)) (on utilise ici, dans la démonstration de la propriété (iii) de (9.1.1), le fait que les morphismes $D(g) \rightarrow D(f)$ (avec les notations de (9.1.3)) sont des immersions ouvertes, et *a fortiori* des morphismes plats).

9.2. Propriétés constructibles et ind-constructibles.

Définition (9.2.1). — *Soit $\mathbf{P}(X, \mathcal{F}, k)$ une relation. On dit que \mathbf{P} est une propriété constructible (resp. ind-constructible) de préschémas algébriques si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

(i) *Si k est un corps, X un préschéma algébrique sur k , \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -Module cohérent, k' une extension de k , alors, pour que $\mathbf{P}(X, \mathcal{F}, k)$ soit vraie, il faut et il suffit que $\mathbf{P}(X_{(k')}, \mathcal{F} \otimes_k k', k')$ soit vraie.*

(ii) *Soient S un préschéma intègre noethérien, de point générique η , $u : X \rightarrow S$ un morphisme de type fini, \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -Module cohérent. Pour tout $s \in S$, posons $X_s = u^{-1}(s) = X \times_S \text{Spec}(\mathbf{k}(s))$, $\mathcal{F}_s = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathbf{k}(s)$. Soit E l'ensemble des $s \in S$ tels que $\mathbf{P}(X_s, \mathcal{F}_s, \mathbf{k}(s))$ soit vraie. Alors l'un des ensembles E , $S - E$ (resp. l'ensemble E) contient un ouvert non vide (et par suite est un voisinage de η) (resp. contient un ouvert non vide s'il contient η).*

Remarques (9.2.2). — (i) Il s'agit là bien entendu d'une convention de langage de nature métamathématique et non d'une définition mathématique proprement dite. On a des « définitions » analogues pour des relations entre k , un ou plusieurs k -préschémas algébriques, des k -morphisms entre ces préschémas, des Modules cohérents sur ces préschémas ou des homomorphismes entre ces Modules.

(ii) Nous aurons aussi à considérer des relations où figurent des *parties constructibles* de préschémas. Par exemple, soit $\mathbf{P}(X, Z, k)$ une relation; nous dirons (par abus de langage) que \mathbf{P} est une propriété constructible (resp. ind-constructible) de la partie constructible Z de X si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1° Si k est un corps, X un préschéma algébrique sur k , Z une *partie constructible* de X , k' une extension de k , alors, pour que $\mathbf{P}(X, Z, k)$ soit vraie, il faut et il suffit que $\mathbf{P}(X_{(k')}, p^{-1}(Z), k')$ soit vraie ($p : X_{(k')} \rightarrow X$ étant la projection canonique).

2° Soient S un préschéma intègre noethérien, de point générique η , $u : X \rightarrow S$ un morphisme de type fini, Z une *partie constructible* de X . Pour tout $s \in S$, posons $X_s = u^{-1}(s)$, $Z_s = Z \cap X_s$. Soit E l'ensemble des $s \in S$ tels que $\mathbf{P}(X_s, Z_s, k(s))$ soit vraie. Alors l'un des ensembles E , $S - E$ (resp. l'ensemble E) contient un ouvert non vide (resp. contient un ouvert non vide s'il contient η).

On notera que dans la condition 2° il faut supposer que Z est une partie constructible de X , et *non seulement* que Z_s est une partie constructible de X_s pour tout s ; la première de ces deux propriétés entraîne la seconde (1.8.2), mais non réciproquement.

(iii) Si \mathbf{P} est une propriété constructible, il est clair qu'il en est de même de « non \mathbf{P} ». Si \mathbf{P} , \mathbf{Q} sont deux propriétés constructibles (resp. ind-constructibles), il en est de même des propriétés « \mathbf{P} ou \mathbf{Q} » et « \mathbf{P} et \mathbf{Q} »; en effet, si, sous les hypothèses de (9.2.1, (ii)), E , E' sont deux parties de S et si E contient un ouvert non vide, il en est de même de $E \cup E'$, et si $S - E$ et $S - E'$ contiennent chacune un ouvert non vide, il en est de même de $S - (E \cup E') = (S - E) \cap (S - E')$.

(iv) Soit $\mathbf{P}(X, \mathcal{F}, k)$ une relation vérifiant la condition (9.2.1, (i)); soient S un préschéma, $u : X \rightarrow S$ un morphisme de type fini; avec les notations de (9.2.1, (ii)), soit E l'ensemble des $s \in S$ tels que $\mathbf{P}(X_s, \mathcal{F}_s, k(s))$ soit vraie. Soit d'autre part $g : S' \rightarrow S$ un morphisme quelconque, et posons $X' = X_{(S')}$, $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S'}$; alors il résulte de la transitivité des fibres (I, 3.6.4) et de la condition (9.2.1, (i)) que l'ensemble des $s' \in S'$ tels que $\mathbf{P}(X'_s, \mathcal{F}'_s, k(s'))$ soit vraie est égal à $g^{-1}(E)$. Cela s'étend aussitôt au cas où il figure dans \mathbf{P} plusieurs préschémas, Modules, morphismes de préschémas ou homomorphismes de Modules, ainsi qu'aux propriétés du type considéré dans (ii).

(v) Comme nous le verrons dans la suite de ce paragraphe et dans le courant du reste du chap. IV, la plupart des propriétés \mathbf{P} vérifiant la condition (9.2.1, (i)) vérifient aussi (9.2.1, (ii)). Comme exceptions possibles, notons la propriété d'être *projectif*, ou *quasi-projectif*, ou *affine*, ou *quasi-affine* sur le corps de base (pour un préschéma algébrique); nous verrons (9.6.2) que ces propriétés sont *ind-constructibles*, mais nous donnerons plus tard un exemple où S est une partie ouverte non vide de $\text{Spec}(\mathbf{Z})$ (ou une partie ouverte d'une courbe elliptique sur un corps fini) et où toutes les fibres X_s

sauf la fibre générique X_η sont projectives sur $\mathbf{k}(s)$ (tous les préschémas X_s étant de dimension 2).

Proposition (9.2.3). — Soient \mathbf{P} une propriété constructible (resp. ind-constructible) de préschémas algébriques, S un préschéma, X un préschéma de présentation finie sur S , \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -Module quasi-cohérent de présentation finie. Alors l'ensemble E des $s \in S$ tels que $\mathbf{P}(X_s, \mathcal{F}_s, \mathbf{k}(s))$ soit vraie est localement constructible (resp. ind-constructible). En outre, si S est irréductible de point générique η , un des deux ensembles E , $S - E$ est un voisinage de η dans S (resp. E est un voisinage de η s'il contient ce point).

Pour démontrer ces assertions, on peut se borner au cas où $S = \text{Spec}(A)$ est affine. On sait alors qu'il existe un sous-anneau A_0 de A qui est une \mathbf{Z} -algèbre de type fini, un A_0 -préschéma de type fini X_0 et un \mathcal{O}_{X_0} -Module cohérent \mathcal{F}_0 tels que X soit isomorphe à $X_0 \otimes_{A_0} A$ et \mathcal{F} à $\mathcal{F}_0 \otimes_{A_0} A$ (8.9.1). Soit $p : S \rightarrow S_0 = \text{Spec}(A_0)$ le morphisme correspondant à l'injection $A_0 \rightarrow A$, et soit E_0 l'ensemble des $s_0 \in S_0$ tels que

$$\mathbf{P}((X_0)_{s_0}, (\mathcal{F}_0)_{s_0}, \mathbf{k}(s_0))$$

soit vraie; alors, en vertu de (9.2.2, (iv)), on a $E = p^{-1}(E_0)$; on peut par suite (1.8.2) se borner au cas où S est le spectre d'une \mathbf{Z} -algèbre de type fini, donc un schéma noethérien. Utilisons le critère de constructibilité ($\mathbf{0}_{\text{III}}$, 9.2.3) (resp. le critère de ind-constructibilité (1.9.10)); on est alors ramené, en utilisant comme ci-dessus (9.2.2, (iv)) et en remplaçant S par un sous-schéma fermé intègre de S , au cas où S est noethérien et intègre, et où il faut prouver que E est rare dans S ou contient un ouvert non vide de S (resp. que E contient un ouvert non vide de S s'il contient le point générique); mais cela est garanti en vertu de la condition (9.2.1, (ii)).

On notera que l'on n'a utilisé (9.2.1, (ii)) que lorsque S est le spectre d'un anneau intègre de type fini sur \mathbf{Z} . Il est clair d'autre part que l'énoncé de (9.2.3) s'applique aussi lorsqu'il figure dans \mathbf{P} plusieurs préschémas, Modules sur ces préschémas, morphismes de préschémas ou homomorphismes de Modules. Il s'applique encore lorsqu'il y figure des parties (en nombre fini) des préschémas considérés, pourvu qu'on impose à ces parties la condition d'être localement constructibles. En effet, la restriction au cas où S est affine montre qu'on peut se borner au cas où ces parties sont constructibles : on applique alors (8.3.11) qui montre (avec les notations précédentes) qu'une partie constructible de X est l'image réciproque d'une partie constructible de X_0 pour un choix convenable de A_0 .

Corollaire (9.2.4). — Soient \mathbf{P} une propriété constructible (resp. ind-constructible) de préschémas algébriques, X, Y deux S -préschémas de présentation finie, $f : X \rightarrow Y$ un S -morphisme. Pour tout $s \in S$, posons $X_s = X \times_S \text{Spec}(\mathbf{k}(s))$, $Y_s = Y \times_S \text{Spec}(\mathbf{k}(s))$, $f_s = f \times 1 : X_s \rightarrow Y_s$. Alors l'ensemble E des $s \in S$ tels que pour tout $y \in Y_s$, la propriété $\mathbf{P}(f_s^{-1}(y), \mathbf{k}(y))$ soit vraie, est localement constructible (resp. ind-constructible).

En effet, soit Z l'ensemble des $y \in Y$ tels que $\mathbf{P}(f^{-1}(y), \mathbf{k}(y))$ soit vraie. Comme les fibres $f^{-1}(y)$ et $f_s^{-1}(y)$ sont isomorphes, on voit que E est l'ensemble des $s \in S$ tels que $Y_s \subset Z$; si $g : Y \rightarrow S$ est le morphisme structural, on a donc $E = S - g(Y - Z)$.

Or, f est de présentation finie (1.6.2, (v)), donc il résulte de (9.2.3) que Z est localement constructible (resp. ind-constructible) dans Y , donc $Y-Z$ est localement constructible (resp. pro-constructible) dans Y . Comme g est de présentation finie, $g(Y-Z)$ est localement constructible (resp. pro-constructible) dans S , en vertu du théorème de Chevalley (1.8.4) (resp. de (1.9.5, (vii))); donc E est localement constructible (resp. ind-constructible) dans S .

Remarque (9.2.5). — On notera que si P est une propriété de préschémas algébriques pour laquelle la prop. (9.2.3) est vraie, alors P satisfait aussi à la condition (9.2.1, (ii)) : cela résulte en effet du fait que dans un espace irréductible noethérien, un ensemble constructible est rare ou contient un ouvert non vide ($\mathbf{0}_{\text{III}}$, 9.2.3).

Proposition (9.2.6). — Désignons par P une des propriétés suivantes d'un k -préschéma algébrique X :

- (i) X est vide.
- (ii) X est fini sur k .
- (iii) X est radiciel sur k .
- (iv) $\dim(X)$ appartient à une partie donnée Φ de l'ensemble $\bar{\mathbf{Z}} = \mathbf{Z} \cup \{-\infty\}$.

Alors P est constructible.

Il est clair que (i) et (ii) sont des cas particuliers de (iv), en prenant respectivement pour Φ l'ensemble $\{-\infty\}$ et l'ensemble $\{-\infty, 0\}$. On n'a donc qu'à démontrer (iii) et (iv). Dans chacun de ces deux cas la condition (i) de (9.2.1) est remplie en vertu de (2.7.1, (xv)) et (4.1.4). D'autre part, dans le cas (iii), la propriété P vérifie la conclusion de (9.2.3) en vertu de (1.8.7); il reste donc à voir qu'il en est de même dans le cas (iv). Cela va résulter de la proposition plus précise suivante :

Proposition (9.2.6.1). — Si $f : X \rightarrow S$ est un morphisme de présentation finie, la fonction $s \mapsto \dim(f^{-1}(s))$ est localement constructible.

La question est locale sur S , donc on peut supposer que $S = \text{Spec}(A)$ est affine et prouver que pour tout n , l'ensemble E des $s \in S$ tels que $\dim(X_s) = n$ est constructible. Le même raisonnement que dans (9.2.3) ramène au cas où A est noethérien et intègre, et il suffit alors de prouver le

Corollaire (9.2.6.2). — Soient S un préschéma intègre noethérien de point générique η , $f : X \rightarrow S$ un morphisme de type fini. Alors il existe un voisinage de η dans S tel que la fonction $s \mapsto \dim(X_s)$ soit constante dans ce voisinage.

Les images par f des composantes irréductibles (en nombre fini) de X qui ne rencontrent pas X_η , sont contenues dans des parties fermées de S ne contenant pas η (puisque S est intègre ($\mathbf{0}_I$, 2.1.5)), donc (en remplaçant S par un voisinage ouvert de η) on peut se borner au cas où toutes les composantes irréductibles X_i de X rencontrent X_η ; désignons encore par X_i le sous-préschéma fermé réduit de X ayant X_i pour espace sous-jacent; comme $\dim(X_s) = \sup_i (\dim((X_i)_s))$ (4.1.1), on peut se borner au cas où X est irréductible. Il existe alors un recouvrement fini (U_j) de X par des

ouverts affines partout denses, et les nombres $\dim((U_j)_\eta)$ sont tous égaux à $n = \dim(X_\eta)$ (4.1.1.3); on peut par suite se borner au cas où X est affine, donc aussi X_η . Il existe alors, en vertu de (4.1.2), un ouvert non vide W de X tel que $W \supset X_\eta$, et un $\mathbf{k}(\eta)$ -morphisme fini surjectif $h : W_\eta \rightarrow \mathbf{V}_{\mathbf{k}(\eta)}^n (= \text{Spec}(\mathbf{k}(\eta)[T_1, \dots, T_n]))$; en appliquant (8.8.2, (i)) et la méthode de (8.1.2, a)), on en déduit (en remplaçant au besoin S par un voisinage de η) que l'on a $h = g_\eta$, où $g : W \rightarrow \mathbf{V}_A^n (= \text{Spec}(A[T_1, \dots, T_n]))$ est un S -morphisme, et on peut supposer ce morphisme fini et surjectif en vertu de (8.10.5, (vi)) et (x)). On en conclut que pour tout $s \in S$, le morphisme $g_s : W_s \rightarrow \mathbf{V}_{\mathbf{k}(s)}^n$ est fini et surjectif, donc que $\dim(W_s) = n$ (4.1.2).

9.3. Propriétés constructibles de morphismes de préschémas algébriques.

Proposition (9.3.1). — Soit $\mathbf{P}(X, k)$ une propriété constructible (resp. ind-constructible) de préschémas algébriques. Désignons par $\mathbf{P}'(f, X, Y, k)$ la relation suivante : $f : X \rightarrow Y$ est un k -morphisme de k -préschémas algébriques tel que pour tout $y \in Y$, on ait la propriété $\mathbf{P}(f^{-1}(y), \mathbf{k}(y))$. Alors \mathbf{P}' est une propriété constructible (resp. ind-constructible).

En effet, comme \mathbf{P} vérifie la condition (9.2.1, (i)), il en est de même de \mathbf{P}' en vertu de la transitivité des fibres (I, 3.6.4); par ailleurs le fait que \mathbf{P}' vérifie la condition (9.2.1, (ii)) résulte de (9.2.4), en raison de la remarque (9.2.5).

Proposition (9.3.2). — Désignons par \mathbf{P} une des propriétés suivantes d'un k -morphisme $f : X \rightarrow Y$ de k -préschémas algébriques :

- (i) f est surjectif.
- (ii) f est quasi-fini.
- (iii) f est radiciel.
- (iv) Pour tout $y \in Y$, $\dim(f^{-1}(y))$ appartient à Φ (notation de (9.2.6)).

Alors \mathbf{P} est constructible.

Cela résulte aussitôt de (9.3.1) et (9.2.6) si l'on tient compte de ce que f est de type fini (1.5.4, (v)) de la caractérisation des morphismes radiciels (I, 3.5.8), et de celle des morphismes quasi-finis (II, 6.2.2).

Proposition (9.3.3). — Supposons vérifiées les hypothèses de (8.8.1) dont nous gardons les notations; supposons en outre que S_α soit quasi-compact, X_α et Y_α de présentation finie sur S_α , et soit $f_\alpha : X_\alpha \rightarrow Y_\alpha$ un S_α -morphisme. Soit \mathbf{P} une propriété ind-constructible de morphismes de préschémas algébriques. Pour tout $s \in S$ (resp. $s_\lambda \in S_\lambda$) posons $X_s = X \times_S \text{Spec}(\mathbf{k}(s))$, $Y_s = Y \times_S (\text{Spec}(\mathbf{k}(s)))$, $f_s = f \times 1 : X_s \rightarrow Y_s$ (resp. $X_{\lambda, s_\lambda} = X_\lambda \times_{S_\lambda} \text{Spec}(\mathbf{k}(s_\lambda))$, $Y_{\lambda, s_\lambda} = Y_\lambda \times_{S_\lambda} \text{Spec}(\mathbf{k}(s_\lambda))$, $f_{\lambda, s_\lambda} = f_\lambda \times 1 : X_{\lambda, s_\lambda} \rightarrow Y_{\lambda, s_\lambda}$). Alors, afin que pour tout $s \in S$ on ait la propriété $\mathbf{P}(f_s)$, il faut et il suffit qu'il existe $\lambda \geq \alpha$ tel que pour tout $s_\lambda \in S_\lambda$, on ait $\mathbf{P}(f_{\lambda, s_\lambda})$.

En effet, soit E (resp. E_λ) l'ensemble des $s \in S$ (resp. $s_\lambda \in S_\lambda$) tels que la propriété $\mathbf{P}(f_s)$ (resp. $\mathbf{P}(f_{\lambda, s_\lambda})$) soit vraie; il résulte de (9.2.2, (iv)) que l'on a $E_\mu = u_{\lambda\mu}^{-1}(E_\lambda)$ pour $\lambda \leq \mu$, et $E = u_{\lambda}^{-1}(E_\lambda)$; en outre, en vertu de (9.2.3), E (resp. E_λ) est ind-constructible dans S (resp. S_λ); la proposition résulte donc de (8.3.4) appliqué à la partie ind-constructible E de S .

On généralise sans peine ce résultat à des propriétés \mathbf{P} du type considéré dans (9.2.3, (i) et (ii)).

Remarque (9.3.4). — La conjonction de (9.3.3) et de (9.3.2, (ii)) démontre l'assertion (8.10.5, (xi)).

Proposition (9.3.5). — Soit $\mathbf{P}(X, Y, k)$ la propriété : « X et Y sont deux préschémas de type fini sur le corps k , et il existe une extension k' de k et un k' -morphisme $g : X_{(k')} \rightarrow Y_{(k')}$ vérifiant $\mathcal{Q}(g)$ », ou \mathcal{Q} est une des propriétés (i) à (xiv) de (8.10.5). Alors \mathbf{P} est une propriété ind-constructible.

La définition de \mathbf{P} montre en effet que la condition (9.2.1, (i)) est satisfaite, compte tenu de ce que la propriété $\mathcal{Q}(g)$ est stable par changement du corps de base, et de ce que deux extensions de k peuvent toujours être considérées comme des sous-extensions d'une troisième extension de k . Pour vérifier (9.2.1, (ii)), on peut se borner au cas où $S = \text{Spec}(A)$ est affine; si $K = k(\eta)$, corps des fractions de A , il existe par hypothèse et en vertu de (9.1.4) une extension finie K' de K et un K' -morphisme $g' : (X_\eta)_{(K')} \rightarrow (Y_\eta)_{(K')}$, vérifiant $\mathcal{Q}(g')$, et K' est évidemment le corps des fractions d'une A -algèbre intègre finie A' . Si l'on pose $S' = \text{Spec}(A')$, il résulte alors de (8.10.5) qu'il y a un voisinage U' du point générique η' de S' tel que, si l'on pose $X' = X \otimes_A A'$, $Y' = Y \otimes_A A'$, il existe, pour tout $s' \in U'$, un morphisme $X'_{s'} \rightarrow Y'_{s'}$ ayant la propriété \mathcal{Q} . Mais le morphisme $h : S' \rightarrow S$ est fini, donc fermé, et comme $h^{-1}(\eta) = \{\eta'\}$, $h(U')$ contient un voisinage ouvert U de η dans S ; pour tout $s \in U$, il y a donc un $s' \in U'$ tel que $h(s') = s$, et comme $X'_{s'} = X_s \otimes_{k(s)} k(s')$, $Y'_{s'} = Y_s \otimes_{k(s)} k(s')$, la propriété $\mathbf{P}(X_s, Y_s, k(s))$, est vraie pour tout $s \in U$.

Exemple (9.3.6). — Prenons par exemple pour \mathcal{Q} la propriété d'être un isomorphisme. Alors, en conjuguant (9.3.5) et (9.3.3), on a la propriété suivante : les notations et hypothèses étant celles de (8.8.1), S_α étant quasi-compact, X_α et Y_α de présentation finie sur S_α , afin que, pour tout $s \in S$, X_s et Y_s soient géométriquement isomorphes (9.1.4), il faut et il suffit qu'il existe $\lambda \geq \alpha$ tel que, pour tout $s_\lambda \in S_\lambda$, X_{λ, s_λ} et Y_{λ, s_λ} soient géométriquement isomorphes.

On a un résultat analogue lorsque les préschémas que l'on considère sont munis de « lois de composition » d'une certaine espèce ($\mathbf{0}_{\text{III}}$, 8.2.1), par exemple des « préschémas en groupes », « préschémas en anneaux », etc. ($\mathbf{0}_{\text{III}}$, 8.2.3). Alors l'énoncé précédent est encore valable lorsque par « isomorphisme » on entend des isomorphismes de préschémas qui sont des *homomorphismes* pour les lois de composition considérées ($\mathbf{0}_{\text{III}}$, 8.2.2); il suffit ici d'utiliser non seulement (8.10.5) mais aussi (8.8.2, (i)) en remarquant que la notion d'homomorphisme pour une loi de composition s'exprime en écrivant que des diagrammes de morphismes de préschémas sont commutatifs (il faut bien entendu que les morphismes de transition $X_\mu \rightarrow X_\lambda$ et $Y_\mu \rightarrow Y_\lambda$ pour $\lambda \leq \mu$ soient des homomorphismes pour les lois de composition envisagées).

On peut aussi, au lieu de considérer des morphismes de préschémas comme dans (9.3.5), considérer des homomorphismes de Modules, en utilisant (9.1.6) au lieu de (9.1.5).

9.4. Constructibilité de certaines propriétés des modules.

Notations (9.4.1). — Dans ce numéro et les suivants jusqu'à la fin du § 9, nous utiliserons systématiquement les notations suivantes : étant donné un morphisme $f : X \rightarrow S$, nous poserons, pour tout $s \in S$, $X_s = f^{-1}(s) = X \times_S \text{Spec}(k(s))$; pour tout \mathcal{O}_X -Module quasi-cohérent \mathcal{F} , \mathcal{F}_s désignera le \mathcal{O}_{X_s} -Module $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_s} k(s)$, et pour tout homomorphisme $u : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ de \mathcal{F} dans un \mathcal{O}_X -Module quasi-cohérent \mathcal{G} , $u_s : \mathcal{F}_s \rightarrow \mathcal{G}_s$ sera le morphisme $p^*(u)$, en désignant par p la projection canonique $X_s \rightarrow X$. Pour toute section g de \mathcal{F} au-dessus de X , on désignera par g_s l'image de g par l'homomorphisme canonique $\Gamma(X, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(X_s, \mathcal{F}_s)$. Pour toute partie Z de X , on notera Z_s l'image réciproque $p^{-1}(Z) = Z \cap X_s$ (I, 3.6.1). Enfin, si Y est un second S -préschéma et $h : X \rightarrow Y$ un S -morphisme, on notera h_s le morphisme $h \times 1 : X_s \rightarrow Y_s$.

Proposition (9.4.2). — Soient S un préschéma intègre de point générique η , $f : X \rightarrow S$ un morphisme de présentation finie, $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ trois \mathcal{O}_X -Modules quasi-cohérents de présentation finie. Soient $u : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$, $v : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ deux homomorphismes de \mathcal{O}_X -Modules, et supposons que la suite $\mathcal{F} \xrightarrow{u_\eta} \mathcal{G} \xrightarrow{v_\eta} \mathcal{H}$ soit exacte. Alors il existe un voisinage ouvert U de η dans S tel que, pour tout $s \in U$, la suite $\mathcal{F}_s \xrightarrow{u_s} \mathcal{G}_s \xrightarrow{v_s} \mathcal{H}_s$ soit exacte.

Avec les notations générales de (9.2.1), il s'agit ici de la relation $P(X, \mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}, u, v, k) : \ll X \text{ est un préschéma algébrique sur le corps } k, \mathcal{F} \xrightarrow{u} \mathcal{G} \xrightarrow{v} \mathcal{H} \text{ une suite exacte de } \mathcal{O}_X\text{-Modules quasi-cohérents} \gg$. Comme, pour toute extension k' de k , la projection canonique $X_{(k')} \rightarrow X$ est un morphisme fidèlement plat (2.2.13), la condition (9.2.1, (i)) est satisfaite (2.2.7). En vertu de (9.2.3), on peut se borner au cas où S est intègre et *noethérien*, auquel cas X est *noethérien*, et $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ sont des \mathcal{O}_X -Modules cohérents. L'hypothèse implique qu'il existe un voisinage ouvert U de η dans S tel que la suite $\mathcal{F}|_{f^{-1}(U)} \rightarrow \mathcal{G}|_{f^{-1}(U)} \rightarrow \mathcal{H}|_{f^{-1}(U)}$ soit exacte, en vertu de (8.5.8, (i)) appliqué suivant la méthode générale de (8.1.2, a)), et l'on peut donc déjà supposer que la suite $\mathcal{F} \xrightarrow{u} \mathcal{G} \xrightarrow{v} \mathcal{H}$ est exacte; il suffit évidemment de prouver que l'on a $\text{Ker}(v_s) = (\text{Ker } v)_s$ et $\text{Im}(u_s) = (\text{Im } u)_s$ pour tout s voisin de η dans S ; par suite (tenant compte de ce que les \mathcal{O}_X -Modules $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ sont *cohérents* et de (0_I, 5.3.4)) on est ramené à prouver la proposition dans le cas particulier où la suite $0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{u} \mathcal{G} \xrightarrow{v} \mathcal{H} \rightarrow 0$ est exacte. Or, il y a alors un ouvert U dans S contenant η et tel que $\mathcal{H}|_{f^{-1}(U)}$ soit *plat* sur U (6.9.1); il résulte donc de (2.1.8) que pour tout $s \in U$, la suite $0 \rightarrow \mathcal{F}_s \rightarrow \mathcal{G}_s \rightarrow \mathcal{H}_s \rightarrow 0$ est exacte, ce qui achève la démonstration.

Corollaire (9.4.3). — Soient S un préschéma intègre, de point générique η , $f : X \rightarrow S$ un morphisme de présentation finie. Soit $\mathcal{L}^* = (\mathcal{L}^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ un complexe de \mathcal{O}_X -Modules quasi-cohérents de présentation finie. Pour tout i , il existe un voisinage ouvert U de η dans S tel que les homomorphismes canoniques

$$(9.4.3.1) \quad (\mathcal{H}^i(\mathcal{L}^*))_s \rightarrow \mathcal{H}^i(\mathcal{L}^*_s)$$

soient bijectifs pour tout $s \in U$.

On peut évidemment se borner à un complexe à trois termes de degrés $-1, 0, +1$: $\mathcal{M} \xrightarrow{u} \mathcal{N} \xrightarrow{v} \mathcal{P}$ et à $i=0$; l'homomorphisme à considérer est alors l'homomorphisme canonique $(\text{Ker } v/\text{Im } u)_s \rightarrow \text{Ker}(v_s)/\text{Im}(u_s)$. Utilisant (8.9.1) et (8.5.2, (i)), on voit qu'on peut se ramener au cas où S (donc aussi X) est *noethérien*, et par suite $\mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathcal{P}$ des \mathcal{O}_X -Modules *cohérents*; alors $\text{Im}(u)$ et $\text{Ker}(v)$ sont aussi cohérents ($\mathbf{0}_I, 5.3.4$) et en outre il existe un voisinage U de η tel que pour $s \in U$, on ait $\text{Ker}(v_s) = (\text{Ker}(v))_s$ et $\text{Im}(u_s) = (\text{Im}(u))_s$ (9.4.2); la conclusion résulte alors de (9.4.2) appliqué à la suite exacte $0 \rightarrow \text{Im}(u) \rightarrow \text{Ker}(v) \rightarrow \text{Ker}(v)/\text{Im}(u) \rightarrow 0$, compte tenu de ce que $\mathcal{O}_\eta = \mathbf{k}(\eta)$ (puisque S est intègre) et par conséquent la suite

$$0 \rightarrow (\text{Im } u)_\eta \rightarrow (\text{Ker } v)_\eta \rightarrow (\text{Ker } v/\text{Im } u)_\eta \rightarrow 0$$

est exacte.

Proposition (9.4.4). — Soient $f : X \rightarrow S$ un morphisme de présentation finie, $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ trois \mathcal{O}_X -Modules quasi-cohérents de présentation finie. Soient $u : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}, v : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ deux homomorphismes de \mathcal{O}_X -Modules. Alors l'ensemble E des $s \in S$ tels que la suite $\mathcal{F}_s \xrightarrow{u_s} \mathcal{G}_s \xrightarrow{v_s} \mathcal{H}_s$ soit exacte est localement constructible.

Compte tenu de (9.2.3), il faut établir que la propriété \mathbf{P} considérée dans (9.4.2) est constructible. On a déjà remarqué dans la démonstration de (9.4.2) que la condition (9.2.1, (i)) est satisfaite pour cette propriété, et il reste à vérifier la condition (9.2.1, (ii)). Supposons donc S intègre *noethérien*, de point générique η , et prouvons que E ou $S-E$ est un voisinage de η . Si $\eta \in E$, notre assertion résulte de (9.4.2), et l'on peut donc se borner au cas où $\eta \notin E$, autrement dit, la suite $\mathcal{F}_\eta \xrightarrow{u_\eta} \mathcal{G}_\eta \xrightarrow{v_\eta} \mathcal{H}_\eta$ n'est pas exacte. Distinguons alors deux cas :

1° Posons $w = v \circ u$, et supposons d'abord que $w_\eta = v_\eta \circ u_\eta \neq 0$. Comme $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ sont cohérents, il en est de même de $\mathcal{N} = \text{Ker}(w)$ ($\mathbf{0}_I, 5.3.4$); il résulte donc de (9.4.2) appliqué à la suite exacte $0 \rightarrow \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{w} \mathcal{H}$ qu'il y a un voisinage U de η dans S tel que, pour $s \in U$, $\text{Ker}(w_s) = \mathcal{N}_s$; en restreignant S , on peut donc supposer cette relation vérifiée pour tout $s \in S$. Soit j l'injection canonique $\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{F}$, et posons $\mathcal{M} = \text{Coker}(j)$; l'exactitude à droite du foncteur $\mathcal{F} \rightsquigarrow \mathcal{F}_s$ entraîne que $\mathcal{M}_s = \text{Coker}(j_s)$ pour tout $s \in S$. L'hypothèse $w_\eta \neq 0$ signifie que $\mathcal{M}_\eta \neq 0$; comme \mathcal{M} est cohérent ($\mathbf{0}_I, 5.3.4$), il résulte de (1.8.6) qu'il y a un voisinage ouvert U de η dans S tel que $\mathcal{M}_s \neq 0$ pour $s \in U$, donc $w_s \neq 0$ pour $s \in U$, et *a fortiori* $S-E$ est un voisinage de η .

2° Supposons que $w_\eta = 0$; en vertu de (8.5.2, (i)), appliqué suivant la méthode générale de (8.1.2, a)), il existe un voisinage ouvert U de η tel que $w|_{f^{-1}(U)} = 0$; remplaçant S par U , on peut déjà supposer $w = 0$ dans X . Alors $\mathcal{F} \xrightarrow{u} \mathcal{G} \xrightarrow{v} \mathcal{H}$ est un complexe à trois termes \mathcal{L}^\bullet , auquel on peut appliquer (9.4.3); par hypothèse on a $(\mathcal{H}^0(\mathcal{L}^\bullet))_\eta = \mathcal{H}^0(\mathcal{L}^\bullet_\eta) \neq 0$, et $\mathcal{H}^0(\mathcal{L}^\bullet)$ est cohérent ($\mathbf{0}_I, 5.3.4$ et 5.3.3), donc il résulte de (1.8.6) qu'il y a un voisinage ouvert U de η tel que $(\mathcal{H}^0(\mathcal{L}^\bullet))_s \neq 0$ pour tout $s \in U$; mais comme on peut supposer que $\mathcal{H}^0(\mathcal{L}^\bullet_s) = (\mathcal{H}^0(\mathcal{L}^\bullet))_s$ pour $s \in U$ par (9.4.3), on voit de nouveau que $S-E$ est un voisinage de η dans S .

Corollaire (9.4.5). — Soient $f : X \rightarrow S$ un morphisme de présentation finie, \mathcal{F}, \mathcal{G} deux \mathcal{O}_X -Modules quasi-cohérents de présentation finie, $u : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un homomorphisme de \mathcal{O}_X -Modules. Alors l'ensemble des $s \in S$ tels que u_s soit injectif (resp. surjectif, bijectif, nul) est localement constructible.

Il suffit d'appliquer (9.4.4) aux suites $0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{u} \mathcal{G}, \mathcal{F} \xrightarrow{u} \mathcal{G} \rightarrow 0, 0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{u} \mathcal{G} \rightarrow 0,$
 $\mathcal{F} \xrightarrow{u} \mathcal{G} \xrightarrow{1_{\mathcal{G}}} \mathcal{G}.$

Corollaire (9.4.6). — Soient $f : X \rightarrow S$ un morphisme de présentation finie, \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -Module quasi-cohérent de présentation finie. Soit h une section de \mathcal{F} au-dessus de X ; pour tout $s \in S$, soit h_s la section correspondante de \mathcal{F}_s au-dessus de X_s (pour le morphisme projection $X_s \rightarrow X$). Alors, l'ensemble des $s \in S$ tels que $h_s = 0$ est localement constructible.

Il suffit de remarquer que h correspond à un homomorphisme $u : \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{F}$ ($0_1, 5.1.1$) et h_s à l'homomorphisme u_s .

Proposition (9.4.7). — Soient $f : X \rightarrow S$ un morphisme de présentation finie, \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -Module quasi-cohérent de présentation finie. L'ensemble E (resp. E') des $s \in S$ tels que \mathcal{F}_s soit un \mathcal{O}_{X_s} -Module localement libre (resp. localement libre de rang n) est localement constructible.

Si X est un préschéma algébrique sur un corps k , \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -Module cohérent, k' une extension de k , alors, pour que \mathcal{F} soit localement libre (resp. localement libre de rang n), il faut et il suffit qu'il en soit de même de $\mathcal{F} \otimes_k k'$, puisque la projection $X_{(k')} \rightarrow X$ est un morphisme fidèlement plat (2.2.7). Autrement dit, la condition (9.2.1, (i)) est vérifiée pour les propriétés dont on veut démontrer la constructibilité, et il reste à vérifier (9.2.1, (ii)); on peut donc encore supposer que S est affine, noethérien et intègre. Il y a de nouveau quatre cas à envisager :

1° $\eta \in E$. Il résulte de (8.5.5), appliqué suivant la méthode générale de (8.1.2, a)) qu'il existe un voisinage ouvert U de η dans S tel que $\mathcal{F}|_{f^{-1}(U)}$ soit localement libre; *a fortiori* \mathcal{F}_s est localement libre pour tout $s \in U$.

2° $\eta \in E'$. Même raisonnement que dans le 1°.

3° $\eta \in S - E$. Comme \mathcal{F}_η est un \mathcal{O}_{X_η} -Module cohérent, dire qu'il n'est pas localement libre équivaut à dire qu'il n'est pas plat sur \mathcal{O}_{X_η} (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 5, n° 2, cor. 2 du th. 1). Le fait que $S - E$ est un voisinage de η résultera donc du lemme plus général suivant (appliqué au cas où g est l'identité) :

Lemme (9.4.7.1). — Soient S un préschéma intègre noethérien, de point générique η , X, Y deux S -préschémas de type fini sur S , $g : X \rightarrow Y$ un S -morphisme, \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -Module cohérent. Si \mathcal{F}_η n'est pas g_η -plat, alors il existe un voisinage ouvert U de η dans S tel que pour tout $s \in U$, \mathcal{F}_s ne soit pas g_s -plat.

Compte tenu de (2.1.2) et de Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. I^{er}, § 2, n° 3, *Remarque 1*, l'hypothèse signifie qu'il existe un ouvert non vide V de Y_η , et un homomorphisme injectif $v : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ de \mathcal{O}_V -Modules cohérents, tel que l'homomorphisme $1 \otimes v : \mathcal{F}_\eta \otimes_{\mathcal{O}_V} \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{F}_\eta \otimes_{\mathcal{O}_V} \mathcal{N}$ ne soit pas injectif. On a $V = Y_\eta \cap W$, où W est ouvert dans Y (**I**, 3.6.1), et il résulte de (8.5.2, (i) et (ii)), appliqué suivant la méthode de (8.1.2, a)), qu'il existe un voisinage ouvert U_0 de η dans S , deux \mathcal{O}_Z -Modules

cohérents \mathcal{G} , \mathcal{H} (où $Z = W \cap h^{-1}(U_0)$, $h : Y \rightarrow S$ étant le morphisme structural) et un \mathcal{O}_Z -homomorphisme $u : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ tel que $\mathcal{M} = \mathcal{G}_\eta$, $\mathcal{N} = \mathcal{H}_\eta$ et $v = u_\eta$; on peut donc supposer U_0 pris tel que pour $s \in U_0$, $u_s : \mathcal{G}_s \rightarrow \mathcal{H}_s$ soit injectif (9.4.5). Mais pour tout $s \in U_0$, l'homomorphisme $1 \otimes u_s : \mathcal{F}_s \otimes_{\mathcal{O}_{Z_s}} \mathcal{G}_s \rightarrow \mathcal{F}_s \otimes_{\mathcal{O}_{Z_s}} \mathcal{H}_s$ n'est autre que $(1 \otimes u)_s$; l'hypothèse que $(1 \otimes u)_\eta$ est non injectif entraîne donc (9.4.5) l'existence d'un ouvert non vide $U \subset U_0$ tel que pour tout $s \in U$, $(1 \otimes u)_s$ soit non injectif, et par suite \mathcal{F}_s n'est pas g_s -plat pour tout $s \in U$.

4° $\eta \in S - E'$. Il est clair que $S - E \subset S - E'$, et si $\eta \in S - E$, $S - E'$ est *a fortiori* un voisinage de η d'après le 3°. Supposons donc $\eta \in E$, donc \mathcal{F}_η localement libre; ces hypothèses entraînent que X_η est non connexe, et que les rangs du \mathcal{O}_{X_η} -Module localement libre \mathcal{F}_η ne sont pas les mêmes sur les diverses composantes connexes de X_η . Or, il résulte de (8.4.2), appliqué suivant la méthode de (8.1.2, a)), que l'on peut supposer (en remplaçant S par un voisinage ouvert de η) que X et X_η ont le même nombre de composantes connexes, les composantes connexes de X_η étant les intersections de X_η et des composantes connexes de X . La conclusion résulte alors du raisonnement fait dans le 2°, appliqué à chacune des composantes connexes de X (qui sont en nombre fini).

Remarque (9.4.7.2). — Le lemme (9.4.7.1) sera plus tard généralisé et débarrassé d'hypothèses noethériennes (11.2.8).

Proposition (9.4.8). — Soient S un préschéma localement noethérien, $f : X \rightarrow S$ un morphisme de type fini, \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -Module cohérent. On suppose que pour tout $s \in S$, X_s soit un préschéma localement intègre. Alors l'ensemble E (resp. E') des $s \in S$ tels que \mathcal{F}_s soit un \mathcal{O}_{X_s} -Module de torsion (resp. un \mathcal{O}_{X_s} -Module sans torsion) est localement constructible.

On peut évidemment supposer $S = \text{Spec}(A)$ affine et noethérien et prouver que E (resp. E') est alors constructible en utilisant le critère ($\mathbf{0}_{III}$, 9.2.3); remplaçant S par le sous-préschéma fermé réduit de S ayant pour espace sous-jacent une partie fermée irréductible Y de S , et notant (\mathbf{I} , 3.6.4) que pour $s \in Y$, la fibre $(X_{(Y)})_s$ s'identifie canoniquement à X_s et le faisceau $(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_Y)_s$ à \mathcal{F}_s , on voit qu'on est ramené au cas où S est intègre de point générique η , et à prouver que E ou $S - E$ (resp. E' ou $S - E'$) est un voisinage de η dans S . Notons en outre que X est réunion finie d'ouverts affines U_i , de type fini sur S , et chacun des $(U_i)_s$ est induit sur un ouvert de X_s , donc localement intègre; en outre, si $(U_i)_\eta$ est vide (resp. non vide), on sait que $(U_i)_s$ est aussi vide (resp. non vide) dans un voisinage de η (9.2.6). On peut donc supposer tous les $(U_i)_\eta$ non vides et intègres, et dire que \mathcal{F}_s est de torsion (resp. sans torsion) équivaut à dire que chacun des $\mathcal{F}_s|_{(U_i)_s}$ est de torsion (resp. sans torsion). On est donc ramené au cas où $X = \text{Spec}(B)$ est affine, et $\mathcal{F} = \widetilde{M}$, où M est un B -module de type fini; on posera $B_s = B \otimes_A k(s)$, $M_s = M \otimes_A k(s)$ et l'on peut supposer B_η intègre. Nous avons quatre cas à envisager :

1° $\eta \in E$; M_η est donc un B_η -module de torsion de type fini, et il y a par suite un $h \neq 0$ dans B_η tel que $hM_\eta = 0$; en vertu de (8.5.2, (i)), appliqué suivant la méthode

de (8.1.2, a)), on peut (en remplaçant au besoin S par un voisinage de η) supposer que $h \in \Gamma(X_\eta, \mathcal{O}_{X_\eta})$ est de la forme g_η , où $g \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$; soit $u : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ l'endomorphisme de \mathcal{F} défini par la multiplication par g ; par hypothèse, on a $u_\eta = 0$, donc (9.4.5) l'endomorphisme $u_s : \mathcal{F}_s \rightarrow \mathcal{F}_s$, défini par la multiplication par g_s , est nul dans un voisinage de η . D'autre part, soit $v : \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X$ l'endomorphisme défini par la multiplication par g ; comme B_η est intègre et $h = g_\eta \neq 0$, v_η est injectif, et il résulte donc de (9.4.5) que v_s est un endomorphisme injectif de \mathcal{O}_{X_s} pour s voisin de η , autrement dit, g_s est un élément \mathcal{O}_{X_s} -régulier pour ces valeurs de s ; donc \mathcal{F}_s est de torsion dans un voisinage de η .

2° $\eta \in S$ — E. Dire qu'un B_η -module de type fini M_η n'est pas un module de torsion signifie que son quotient M_η/T par son sous-module de torsion est $\neq 0$, et comme c'est un B_η -module sans torsion de type fini, il est isomorphe à un sous-module d'un B_η -module B_η^n ; il existe par suite un homomorphisme $w : M_\eta \rightarrow B_\eta^n$ qui est $\neq 0$. Appliquant (8.5.2, (i)) suivant la méthode de (8.1.2, a)), on en déduit (en remplaçant au besoin S par un voisinage de η) qu'il existe un homomorphisme $v : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{O}_X$ tel que $v_\eta = \tilde{w}$. L'hypothèse $v_\eta \neq 0$ entraîne donc (9.4.5) que $v_s \neq 0$ dans un voisinage de η , et comme X_s est localement intègre, \mathcal{F}_s n'est pas de torsion pour ces valeurs de s .

3° $\eta \in E'$. Comme M_η est un B_η -module de type fini sans torsion, il existe un homomorphisme injectif $w : M_\eta \rightarrow B_\eta^n$. Utilisant (8.5.2, (i)) et (9.4.5) comme dans le 2° (en restreignant au besoin S), on en déduit qu'il existe un homomorphisme $v : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{O}_X^n$ tel que $v_\eta = \tilde{w}$, et que pour s voisin de η , $v_s : \mathcal{F}_s \rightarrow \mathcal{O}_{X_s}^n$ est injectif; pour ces valeurs de s , \mathcal{F}_s est donc sans torsion.

4° $\eta \in S - E'$. Soit T le sous-module de torsion de M_η ; par hypothèse $T \neq 0$, et T est de type fini puisque M_η est noethérien. Utilisant cette fois (8.5.2, (i) et (ii)) on voit (en restreignant au besoin S) qu'il existe un \mathcal{O}_X -Module cohérent \mathcal{G} et un homomorphisme injectif $u : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}$ tels que $\mathcal{G}_\eta = \tilde{T}$ et que u_η soit l'injection canonique $\tilde{T} \rightarrow \mathcal{F}_\eta$. Il résulte alors du 1° et de (1.8.6) que dans un voisinage de η , \mathcal{G}_s est un \mathcal{O}_{X_s} -Module de torsion $\neq 0$, et d'autre part il résulte de (9.4.5) que dans un voisinage de η , u_s est injectif. On en conclut que dans un voisinage de η , le sous-Module de torsion de \mathcal{F}_s n'est pas nul. C.Q.F.D.

Remarque (9.4.9). — La propriété « X est un k -préschéma algébrique localement intègre » ne vérifie pas la condition (9.2.1, (i)), et il n'est donc pas certain que l'énoncé (9.4.8) soit encore valable quand on ne fait aucune hypothèse sur S et qu'on suppose seulement que f est un morphisme de présentation finie et \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -Module de présentation finie. Considérons toutefois le cas particulier suivant : S_0 étant un préschéma localement noethérien, soient $f_0 : X_0 \rightarrow S_0$ un morphisme de type fini, tel que les fibres $(X_0)_{s_0}$ soient localement intègres (pour tout $s_0 \in S_0$), et \mathcal{F}_0 un \mathcal{O}_{X_0} -Module cohérent; soit $g : S \rightarrow S_0$ un morphisme quelconque, posons $X = X_0 \times_{S_0} S$, $F = \mathcal{F}_0 \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} \mathcal{O}_S$, $f = f_0 \times 1_S : X \rightarrow S$, et supposons que pour tout $s \in S$, la fibre X_s soit encore localement intègre. Alors l'ensemble E (resp. E') des $s \in S$ tels que \mathcal{F}_s soit de torsion (resp. sans

torsion) est encore *localement constructible*. En effet, soit $s \in S$ et soit $s_0 = g(s)$; il suffira (compte tenu de (1.8.2)) de prouver que, pour que \mathcal{F}_s soit de torsion (resp. sans torsion), il faut et il suffit que $(\mathcal{F}_0)_{s_0}$ le soit. Or, $\text{Supp}(\mathcal{F}_s)$ est l'image réciproque de $\text{Supp}((\mathcal{F}_0)_{s_0})$ par la projection $p: X_s \rightarrow (X_0)_{s_0}$ (I, 9.1.13); comme p est fidèlement plat et quasi-compact, dire que $\text{Supp}(\mathcal{F}_s)$ contient un point maximal de X_s équivaut à dire que $\text{Supp}((\mathcal{F}_0)_{s_0})$ contient un point maximal de $(X_0)_{s_0}$ (1.1.5 et 2.3.4); d'où notre assertion en ce qui concerne l'ensemble E (I, 7.4.6). Si le sous-Module de torsion \mathcal{T} de $(\mathcal{F}_0)_{s_0}$ n'est pas nul, $\mathcal{T} \otimes_{\kappa(s_0)} k(s)$ (qui est de torsion d'après ce qui précède) n'est pas nul et s'identifie à un sous-Module de \mathcal{F}_s (2.2.7), donc le sous-Module de torsion de \mathcal{F}_s n'est pas nul. Enfin, si $(\mathcal{F}_0)_{s_0}$ est sans torsion, on peut supposer (en considérant un ouvert affine de $(X_0)_{s_0}$) que $(\mathcal{F}_0)_{s_0}$ est isomorphe à un sous-Module d'un $\mathcal{O}_{(X_0)_{s_0}}^n$, donc \mathcal{F}_s est isomorphe à un sous-Module d'un $\mathcal{O}_{X_s}^n$ (2.2.7), et ceci établit notre assertion concernant E' .

9.5. Constructibilité de propriétés topologiques.

Proposition (9.5.1). — Soient $f: X \rightarrow S$ un morphisme de présentation finie, Z une partie localement constructible de X . Alors l'ensemble E des $s \in S$ tels que $Z_s \neq \emptyset$ est localement constructible.

En effet, on a $E = f(Z)$, et il suffit d'appliquer le th. de Chevalley (1.8.4).

Corollaire (9.5.2). — Si Z', Z'' sont deux parties localement constructibles de X , l'ensemble des $s \in S$ tels que $Z'_s \subset Z''_s$ (resp. $Z'_s = Z''_s$) est localement constructible.

En effet, la relation $Z'_s \subset Z''_s$ équivaut à $(Z' \cap \overline{(Z'')})_s = \emptyset$ et $Z' \cap \overline{(Z'')}$ est localement constructible.

Proposition (9.5.3). — Soient $f: X \rightarrow S$ un morphisme de présentation finie, Z, Z' deux parties localement constructibles de X telles que $Z \subset Z'$. Alors l'ensemble E des $s \in S$ tels que Z_s soit dense dans Z'_s est localement constructible dans S .

Il faut vérifier les deux conditions de (9.2.2, (ii)). En ce qui concerne la première, considérons un préschéma X algébrique sur un corps k , deux parties constructibles Z, Z' de X telles que $Z \subset Z'$, et une extension k' de k . Alors la projection canonique $p: X_{(k')} \rightarrow X$ est un morphisme fidèlement plat et quasi-compact, et l'on a donc $p^{-1}(\overline{Z}) = \overline{p^{-1}(Z)}$ et $p^{-1}(\overline{Z'}) = \overline{p^{-1}(Z')}$ en vertu de (2.3.10); comme p est surjectif, la relation $\overline{Z} = \overline{Z'}$ est équivalente à $\overline{p^{-1}(Z)} = \overline{p^{-1}(Z')}$.

Vérifions maintenant la seconde condition, et supposons donc S affine, noethérien et intègre, de point générique η . Distinguons deux cas :

1° $\eta \in S - E$, autrement dit, Z_η n'est pas dense dans Z'_η ; il existe donc dans X un ouvert V tel que $V \cap Z_\eta = \emptyset$ et $V \cap Z'_\eta \neq \emptyset$. Comme X est noethérien, V est localement constructible, donc il en est de même de $V \cap Z$, et en vertu de (9.5.1), il y a un voisinage U de η dans S tel que pour tout $s \in U$, on ait $(V \cap Z)_s = \emptyset$ et $(V \cap Z')_s \neq \emptyset$; cela entraîne que Z_s n'est pas dense dans Z'_s pour $s \in U$, autrement dit $U \subset S - E$.

2° $\eta \in E$, donc Z_{η} est dense dans Z'_{η} . Montrons d'abord que l'on peut supposer Z' fermé. En effet, Z_{η} est dense dans $\overline{Z'_{\eta}}$ (adhérence prise dans X_{η}); posons $V_{\eta} = X_{\eta} - \overline{Z'_{\eta}}$ qui est ouvert dans X_{η} et ne rencontre pas Z'_{η} ; on peut supposer V_{η} de la forme $V \cap X_{\eta}$, où V est ouvert (donc constructible) dans X , et l'hypothèse $V_{\eta} \cap Z'_{\eta} = \emptyset$ entraîne alors $V_s \cap Z'_s = \emptyset$ pour tout s voisin de η en vertu de (9.5.1). Remplaçant S par un voisinage ouvert de η , on peut donc supposer que $V \cap Z' = \emptyset$, donc $V \cap \overline{Z'} = \emptyset$ (adhérence prise dans X), et par suite $(\overline{Z'})_{\eta} = \overline{Z'_{\eta}}$, d'où notre assertion. L'ensemble Z' est alors réunion de ses composantes irréductibles en nombre fini, et en restreignant encore S à un voisinage de η , on peut supposer que toutes les composantes irréductibles Z'_i de Z' rencontrent X_{η} , d'où résulte que X_{η} contient les points génériques des Z'_i ($0_{I, 2.1.8}$). Dire que Z_s est dense dans Z'_s équivaut alors à dire que chacun des $(Z \cap Z'_i)_s$ est dense dans $(Z'_i)_s$, et l'on est ainsi ramené au cas où Z' est irréductible. Remplaçant alors au besoin X par le sous-préschéma réduit ayant Z' pour espace sous-jacent, on voit qu'on peut supposer que $Z' = X$ et que X est intègre et domine S . Enfin, en recouvrant X par un nombre fini d'ouverts affines W_j et remplaçant Z par $Z \cap W_j$, on peut supposer que $X = \text{Spec}(A)$, où A est un anneau noethérien intègre. Comme X_{η} est noethérien intègre et que Z_{η} est constructible dans X_{η} et dense dans X_{η} , Z_{η} contient un ouvert non vide de X_{η} ($0_{III, 9.2.2}$), que l'on peut supposer de la forme $(D(t))_{\eta}$, où t est un élément $\neq 0$ de A . En remplaçant au besoin S par un voisinage de η , on peut en outre, en vertu de la relation $(D(t))_{\eta} \subset Z_{\eta}$, supposer que $D(t) \subset Z$ (9.5.2). Enfin, comme l'homothétie de rapport t_{η} dans $\mathcal{O}_{X_{\eta}}$ est injective, il résulte de (9.4.5) que pour s voisin de η , t_s est \mathcal{O}_{X_s} -régulier, donc $(X_s)_{t_s}$ est dense dans X_s , et *a fortiori* il en est de même de Z_s qui contient $(X_s)_{t_s}$.

Corollaire (9.5.4). — Soient $f : X \rightarrow S$ un morphisme de présentation finie, Z une partie localement constructible de X . L'ensemble E des $s \in S$ tels que Z_s soit fermé (resp. ouvert, resp. localement fermé) dans X_s est localement constructible dans S .

Dire que Z_s est ouvert dans X_s signifie que $(X - Z)_s = X_s - Z_s$ est fermé dans X_s , et comme $X - Z$ est localement constructible, on peut se borner à considérer l'ensemble des $s \in S$ tels que Z_s soit fermé et l'ensemble des $s \in S$ tels que Z_s soit localement fermé.

Vérifions encore dans chaque cas les deux conditions de (9.2.2, (ii)). La première résulte du fait que $p : X_{(k)} \rightarrow X$ est fidèlement plat et quasi-compact, et de (2.3.12) et (2.3.14). Vérifions donc la seconde condition, S étant supposé affine, noethérien et intègre, de point générique η . Posons $Z' = \overline{Z}$; le même raisonnement que dans (9.5.3) montre que Z'_{η} est égal à l'adhérence de Z_{η} dans X_{η} ; en vertu de (9.5.3), il y a donc un voisinage U de η tel que pour $s \in U$, Z_s soit dense dans Z'_s , ce dernier étant fermé dans X_s . Dire que Z_s est fermé dans X_s signifie alors que $Z''_s = \emptyset$, où $Z'' = Z' - Z$; il résulte donc de (9.5.1) que l'ensemble E des $s \in S$ où $Z''_s = \emptyset$ est tel que E ou $S - E$ contienne un voisinage de η . Dire que Z_s est localement fermé dans X_s signifie que Z''_s est fermé dans X_s ; il suffit donc d'appliquer le résultat précédent en remplaçant Z par Z'' , qui est localement constructible dans X .

Proposition (9.5.5). — Soient $f : X \rightarrow S$ un morphisme de présentation finie, Z une partie localement constructible de X telle que, pour tout $s \in S$, Z_s soit localement fermé dans X_s . Pour tout $s \in S$, soit $D(s) \subset \mathbf{Z} \cup \{-\infty\}$ l'ensemble des dimensions des composantes irréductibles de Z_s . Alors la fonction $s \mapsto D(s)$ est localement constructible dans S .

Soit Φ une partie finie de $\mathbf{Z} \cup \{-\infty\}$; il s'agit de montrer que l'ensemble des $s \in S$ tels que $D(s) = \Phi$ est localement constructible; compte tenu de (9.2.3), nous avons encore à vérifier les deux conditions de (9.2.2, (ii)).

En ce qui concerne la première, il s'agit de voir que si X est un préschéma algébrique sur un corps k , Z une partie localement fermée de X , k' une extension de k , $p : X_{(k')} \rightarrow X$ la projection canonique, alors l'ensemble des dimensions des composantes irréductibles de Z est le même que celui des dimensions des composantes irréductibles de $p^{-1}(Z)$; compte tenu de l'existence d'un sous-préschéma de X ayant Z pour espace sous-jacent (I, 5.2.1), cela résulte de (4.2.8).

Pour la seconde condition de (9.2.2, (ii)), on est dans le cas où S est noethérien et intègre de point générique η , et $f : X \rightarrow S$ est un morphisme de type fini, de sorte que X est noethérien. Le sous-espace Z_η de l'espace noethérien X_η est par hypothèse localement fermé, donc a un nombre fini de composantes irréductibles $Z_{i\eta}$, qui sont localement fermées dans X . Il existe par suite pour chaque indice i une partie localement fermée Z_i de X telle que $(Z_i)_\eta = Z_{i\eta}$, donc si $Z' = \bigcup_i Z_i$, on a $Z'_\eta = Z_\eta$. Mais comme Z et Z' sont localement constructibles, on peut, en remplaçant S par un voisinage de η , supposer que $Z' = Z$ (9.5.1). En outre, pour $i \neq j$, $Z_{i\eta} \cap Z_{j\eta}$ est rare et fermé dans $Z_{i\eta}$; donc (9.5.3 et 9.5.4), on peut encore supposer, en restreignant S , que pour $j \neq i$, $(Z_i)_s \cap (Z_j)_s$ est rare et fermé dans $(Z_i)_s$. Comme Z_i est localement fermé dans X , il y a un sous-préschéma de X ayant Z_i pour espace sous-jacent Z_i (et encore noté Z_i), qui est de type fini sur S (I, 6.3.5). Posons $U_i = Z_i - \bigcup_{j \neq i} (Z_i \cap Z_j)$, qui est ouvert dans Z et tel que, pour tout $s \in S$, $(U_i)_s$ soit ouvert partout dense dans $(Z_i)_s$; en outre, par construction, les U_i sont deux à deux sans point commun. Comme $(Z_i)_s$ est un $k(s)$ -préschéma algébrique, l'ensemble des dimensions des composantes irréductibles de $Z_s = \bigcup_i (Z_i)_s$ est le même que l'ensemble des dimensions des composantes irréductibles de la réunion des $(U_i)_s$ (4.1.1.3), chacune de ces composantes étant déjà une composante irréductible de l'un des $(U_i)_s$. On peut donc se borner au cas où $Z = U_i$; en outre, comme Z_η est alors irréductible, il n'y a qu'une seule composante irréductible de Z qui rencontre X_η (0_I, 2.1.8), et l'on peut évidemment, en restreignant Z , supposer Z irréductible. On est finalement ramené à prouver le cas particulier suivant de (9.5.5) :

Corollaire (9.5.6). — Soient S un préschéma noethérien et irréductible de point générique η , X un préschéma irréductible, $f : X \rightarrow S$ un morphisme dominant de type fini. Alors il existe un voisinage U de η dans S tel que, pour tout $s \in U$, toutes les composantes irréductibles de X_s soient de dimension $n = \dim(X_\eta)$.

On peut évidemment se borner au cas où $S = \text{Spec}(A)$ est affine, A étant donc noethérien; remplaçant f par f_{red} , qui est de type fini (1.5.4, (vi)), on peut

supposer A intègre et X réduit, donc intègre puisqu'il est irréductible. On sait (4.1.2) qu'il existe un ouvert W dense dans X_η et un $k(\eta)$ -morphisme fini et surjectif $h : W \rightarrow \mathbf{V}((k(\eta))^n) = \text{Spec}(B')$, où $B' = k(\eta)[T_1, \dots, T_n]$ (T_i indéterminées). Si V est un ouvert de X tel que $V \cap X_\eta = W$, on sait (9.5.3) que pour s voisin de η dans S , V_s est un ouvert dense dans X_s , et l'on peut par suite (4.1.1.3) se borner au cas où $V = X$, $W = X_\eta$. Posons $B = A[T_1, \dots, T_n]$ et $Y = \text{Spec}(B) = \mathbf{V}_A^n$, de sorte que $\text{Spec}(B') = Y_\eta$; il résulte de (8.8.2, (i)) et (8.10.5, (vi) et (x)), appliqués suivant la méthode de (8.1.2, a)), qu'en remplaçant au besoin S par un voisinage de η , on peut supposer que $h = g_\eta$, où $g : X \rightarrow Y$ est un morphisme fini surjectif; autrement dit, on a $X = \text{Spec}(C)$, où C est une B -algèbre finie et l'homomorphisme $B \rightarrow C$ correspondant à g est injectif; comme C est un anneau intègre, C est donc un B -module de type fini sans torsion, et $C_\eta = C \otimes_A k(\eta)$ est donc un module de type fini sans torsion sur $B_\eta = B' = B \otimes_A k(\eta) = k(\eta)[T_1, \dots, T_n]$ (étant un module de fractions dont les dénominateurs sont dans $A - \{0\} \subset B - \{0\}$). Il résulte donc de (9.4.8) qu'il y a un voisinage U de η dans S tel que pour $s \in U$, $C_s = C \otimes_A k(s)$ soit un module de type fini sans torsion sur $B_s = B \otimes_A k(s) = k(s)[T_1, \dots, T_n]$, et en particulier l'homomorphisme $g_s : B_s \rightarrow C_s$ est injectif. Comme aucun élément de B_s n'est diviseur de 0 dans C_s , pour tout idéal premier minimal \mathfrak{p}_i de C_s (dont les éléments sont diviseurs de 0 dans C_s), on a nécessairement $\mathfrak{p}_i \cap B_s = 0$, donc l'homomorphisme canonique $B_s \rightarrow C_s/\mathfrak{p}_i$ est injectif. On en déduit que pour chaque composante irréductible $Z_i = \text{Spec}(C_s/\mathfrak{p}_i)$ de X_s , la restriction à Z_i de g est un morphisme fini et dominant $Z_i \rightarrow Y_s$, donc surjectif (II, 6.1.10). On conclut par suite de (4.1.2) que $\dim Z_i = n$, ce qui achève la démonstration.

Remarque (9.5.7). — On aura soin de noter que sous les hypothèses de (9.5.6) il peut se faire que X_s ne soit irréductible pour aucun $s \neq \eta$ dans un voisinage de η , autrement dit, la propriété « X est un k -préschéma algébrique irréductible » n'est pas constructible. Prenons par exemple $S = \text{Spec}(k[T])$, où k est un corps algébriquement clos, T une indéterminée; on a donc $k(\eta) = K = k(T)$. Soit L une extension finie séparable de K de degré > 1 , et soit X la fermeture intégrale de S dans L (II, 6.3.4); on a donc $X = \text{Spec}(B)$, où B est la fermeture intégrale de $k[T]$ dans L . On sait que B est un anneau de Dedekind, et que tous les idéaux maximaux de $k[T]$, sauf un nombre fini, sont non ramifiés dans B ; comme en outre le corps résiduel de tout idéal maximal de B est nécessairement k (puisque c'est une extension finie de k), on voit que pour presque tous les idéaux maximaux \mathfrak{j}_s de $k[T]$, $B_s = B/\mathfrak{j}_s B$ est composée directe de $[L : K]$ corps isomorphes à k , autrement dit X_s n'est pas irréductible, bien que $X_\eta = \text{Spec}(L)$ le soit. Le même exemple montre que la propriété « X est un k -préschéma algébrique intègre » n'est pas constructible. Enfin il en est de même de la propriété « X est un k -préschéma algébrique réduit ». Il suffit pour le voir de prendre encore $S = \text{Spec}(k[T])$, où cette fois k est un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$, et pour X la fermeture intégrale de S dans $L = K^{1/p}$ (où $K = k(T)$), de sorte que $X = \text{Spec}(B)$ avec $B = k[T^{1/p}]$ (k étant parfait); tout idéal maximal de $k[T]$ est de la forme $(T - \alpha)$ avec $\alpha \in k$; l'unique idéal de B au-dessus de l'idéal $(T - \alpha)$ est l'idéal principal $(T^{1/p} - \alpha^{1/p})$ et il est immédiat

que l'anneau quotient $B/(T-\alpha)B$ admet par suite des éléments nilpotents; autrement dit, X_s n'est réduit pour aucun $s \neq \eta$, tandis que $X_\eta = \text{Spec}(L)$ est intègre.

Nous verrons un peu plus loin (9.7) que l'on obtient par contre des propriétés constructibles lorsqu'on considère les notions « géométriques » correspondantes aux notions de préschéma irréductible, réduit ou intègre (4.5 et 4.6).

9.6. Constructibilité de certaines propriétés des morphismes.

Proposition (9.6.1). — Soient X, Y deux S -préschémas de présentation finie, $f: X \rightarrow Y$ un S -morphisme. Soit E l'ensemble des $s \in S$ pour lesquels f_s a l'une des propriétés suivantes : être :

- (i) surjectif;
- (ii) dominant;
- (iii) séparé;
- (iv) propre;
- (v) radiciel;
- (vi) fini;
- (vii) quasi-fini;
- (viii) une immersion;
- (ix) une immersion fermée;
- (x) une immersion ouverte;
- (xi) un isomorphisme;
- (xii) un monomorphisme.

Alors E est localement constructible dans S .

Les assertions de (i), (v) et (vii) ne sont insérées que pour mémoire, ayant déjà été établies dans (9.3.2).

(ii) : Notons d'abord que f est de présentation finie (1.6.2, (v)), donc, en vertu du théorème de Chevalley (1.8.4), $f(X)$ est localement constructible dans Y . Par ailleurs, on a $f_s(X_s) = (f(X))_s$ (1.3.6.1); l'ensemble des s tels que f_s soit dominant est l'ensemble des s tels que $(f(X))_s$ soit dense dans Y_s ; la conclusion résulte donc dans ce cas de (9.5.3).

(iii) : Comme $f: X \rightarrow Y$ est de présentation finie, l'immersion diagonale $\Delta_f: X \rightarrow X \times_Y X$ est de présentation finie (1.6.2, (iv) et (v)); il résulte donc de (1.8.4.1) que $\Delta_f(X) = \Delta_X$ est une partie localement constructible de $X \times_Y X$. Dire que f_s est séparé signifie (compte tenu de (1.5.3.4)) que $(\Delta_X)_s$ est fermé dans $X_s \times_{Y_s} X_s = (X \times_Y X)_s$; la conclusion résulte donc ici de (9.5.4).

(iv) : Montrons que la propriété « X et Y sont des préschémas algébriques sur un corps k , et $f: X \rightarrow Y$ un k -morphisme propre » est constructible. La condition (9.2.1, (i)) est vérifiée en vertu de (2.7.1, (vii)). On peut donc se borner au cas où S est affine, noethérien et intègre, de point générique η , et on doit prouver que E ou $S - E$ est un voisinage de η . Supposons d'abord que $\eta \in E$; il résulte de (8.10.5, (xii)) appliqué suivant la méthode de (8.1.2, a)) qu'en remplaçant S par un voisinage de η , on peut

supposer que f est lui-même un morphisme propre; on sait alors qu'il en est de même de f_s pour tout $s \in S$ (II, 5.4.2, (iii)). Supposons au contraire que $\eta \in S - E$, et distinguons deux cas :

1° Supposons que f_η soit non séparé; alors il résulte de (iii) que f_s est non séparé (et *a fortiori* non propre) dans un voisinage de η .

2° Supposons f_η séparé; Y est réunion finie d'ouverts affines V_i , et pour que f_s soit propre, il faut et il suffit que chacune de ses restrictions $f_s^{-1}((V_i)_s) \rightarrow (V_i)_s$ le soit (II, 5.4.1); on peut donc se borner au cas où Y est affine, donc un schéma. Dire que f_η n'est pas propre signifie (II, 5.6.3) qu'il existe un morphisme de type fini $h : Z \rightarrow Y_\eta$ tel que le morphisme $(f_\eta)_{(Z)} : X_\eta \times_{Y_\eta} Z \rightarrow Z$ ne soit pas fermé. Comme Y est un schéma, on déduit de (8.8.2, (i) et (ii)) (en restreignant au besoin S à un voisinage de η) qu'il existe un morphisme de type fini $g : Y' \rightarrow Y$ tel que Z soit isomorphe à Y'_η et que $g_\eta = h$; si l'on pose $X' = X \times_Y Y'$, $f' = f_{(Y')}$: $X' \rightarrow Y'$, on a $(f_\eta)_{(Z)} = f'_\eta$, et par hypothèse il existe donc une partie fermée M' de X'_η telle que $f'_\eta(M')$ ne soit pas fermé dans Y'_η . Or M' est la trace sur X'_η d'une partie fermée N' de X' ; comme X' est noethérien et f' de type fini, $f'(N')$ est constructible dans Y' (1.8.4) et par hypothèse $(f'(N'))_\eta = f'_\eta(N'_\eta) = f'_\eta(M')$ n'est pas fermé dans Y'_η . On conclut alors de (9.5.4) qu'il existe un voisinage U de η dans S tel que pour $s \in U$, $(f'(N'))_s = f'_s(N'_s)$ ne soit pas fermé dans Y'_s ; autrement dit, le morphisme f'_s n'est pas fermé, et *a fortiori* le morphisme f_s n'est pas propre.

(vi) La propriété est conjonction des propriétés (iv) et (vii) (8.11.1), donc la proposition résulte dans ce cas de ce qui a déjà été prouvé.

(ix) La vérification de la condition (9.2.1, (i)) résulte de (2.7.1, (xi)). On peut donc se borner au cas où S est affine, noethérien et intègre de point générique η , et à prouver que E ou $S - E$ est un voisinage de η . Si $\eta \in E$, on peut (en remplaçant S par un voisinage de η) supposer que f est une immersion fermée en vertu de (8.10.5, (iv)), et alors il est clair que f_s est une immersion fermée pour tout $s \in S$ (I, 4.3.2). Supposons donc que $\eta \in S - E$ et distinguons deux cas :

1° f_η n'est pas un morphisme fini. Alors il résulte de (vi) que dans un voisinage de η , f_s n'est pas fini, ni *a fortiori* une immersion fermée.

2° f_η est fini; alors, en vertu de (8.10.5, (x)), on peut supposer (en restreignant au besoin S) que f lui-même est un morphisme fini. Dans ce cas $\mathcal{A} = \mathcal{A}(X) = f_*(\mathcal{O}_X)$ est un \mathcal{O}_Y -Module cohérent (II, 6.1.3) et $f = \mathcal{A}(u)$, où $u : \mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{A}$ est un homomorphisme de \mathcal{O}_Y -Algèbres (II, 1.1.2); comme f_η n'est pas une immersion fermée par hypothèse, u_η n'est pas surjectif (II, 1.4.10), donc (9.4.5) il existe un voisinage de η dans lequel u_s n'est pas surjectif, et par suite (I, 4.2.3) f_s n'est pas une immersion fermée.

(viii) La vérification de la condition (9.2.1, (i)) se fait comme dans (ix), en utilisant cette fois (2.7.1, (x)) et le fait que toute immersion d'un préschéma noethérien dans un autre est quasi-compacte. On est donc ramené au cas où S est affine, noethérien et intègre de point générique η , et à prouver que E ou $S - E$ est un voisinage de η . Si $\eta \in E$, on conclut comme dans (ix) à l'aide de (8.10.5, (ii)). Si $\eta \in S - E$, on distingue de nouveau deux cas :

$1^{\circ} f_{\eta}(X_{\eta})$ n'est pas une partie localement fermée de Y_{η} . Comme $f(X)$ est constructible dans Y (1.8.4) et que $f_s(X_s) = (f(X))_s$, on déduit de (9.5.4) que pour s voisin de η , $f_s(X_s)$ n'est pas localement fermé dans Y_s , et *a fortiori* f_s n'est pas une immersion.

$2^{\circ} f_{\eta}(X_{\eta})$ est localement fermé dans Y_{η} . Comme $f(X)$ est constructible dans Y (1.8.4) et qu'il en est de même de $\overline{f(X)}$ puisque Y est noethérien, il résulte de (8.3.11) qu'en restreignant au besoin S , on peut supposer que $f(X)$ est localement fermé dans Y . Il y a alors un ouvert V de Y contenant $f(X)$ et dans lequel $f(X)$ est fermé. Comme Y est noethérien, V est de type fini sur S , et en remplaçant Y par V , on peut donc se ramener au cas où $f(X)$ est fermé dans Y . Mais alors $f_s(X_s) = (f(X))_s$ est fermé dans Y_s pour tout $s \in S$, et dire que f_s est une immersion équivaut à dire que f_s est une immersion fermée; on est donc ramené à ce qui a été démontré dans (ix).

(x) Utilisant cette fois (2.7.1, (ix)) et (8.10.5, (iii)), on est ramené au cas où S est affine, noethérien, intègre de point générique η , et où $\eta \in S - E$. Distinguons trois cas :

$1^{\circ} f_{\eta}(X_{\eta})$ n'est pas ouvert dans Y_{η} . Comme $f(X)$ est constructible dans Y (1.8.4), on déduit de (9.5.4) que $f_s(X_s)$ n'est pas ouvert dans Y_s pour s voisin de η , et *a fortiori* f_s n'est pas une immersion ouverte.

$2^{\circ} f_{\eta}(X_{\eta})$ est ouvert dans Y_{η} mais f_{η} n'est pas une immersion. Il résulte alors de (viii) que pour s voisin de η dans S , f_s n'est pas une immersion, ni *a fortiori* une immersion ouverte.

$3^{\circ} f_{\eta}(X_{\eta})$ est ouvert dans Y_{η} et f_{η} est une immersion. Comme $f(X)$ est constructible dans Y , il résulte de (8.3.11) qu'en restreignant au besoin S , on peut déjà supposer que $f(X)$ est ouvert dans Y . Comme Y est noethérien, le sous-préschéma induit sur $f(X)$ est de type fini sur S , donc on peut se ramener au cas où f est *surjectif* en remplaçant Y par $f(X)$. Par hypothèse, f_{η} est une immersion fermée, donc on peut, comme dans (ix), supposer que f est une *immersion fermée*, et par suite que X est un sous-préschéma fermé de Y défini par un idéal cohérent \mathcal{I} de \mathcal{O}_Y . Par hypothèse f_{η} n'est pas un isomorphisme, donc $\mathcal{I}_{\eta} \neq 0$; on en conclut (9.4.5) que dans un voisinage de η , on a $\mathcal{I}_s \neq 0$, et par suite l'immersion fermée surjective f_s n'est pas ouverte.

(xi) La propriété est conjonction des propriétés (i) et (x) et résulte donc de ce qui a été démontré.

(xii) En vertu de (I, 5.3.8), dire que f_s est un monomorphisme signifie que $\Delta_s = (\Delta)_s : X_s \rightarrow X_s \times_{Y_s} X_s = (X \times_Y X)_s$ est un isomorphisme, et comme $X \times_Y X$ est un S -préschéma de présentation finie (1.6.2, (iv)), la conclusion résulte de (xi).

Proposition (9.6.2). — Soient X, Y deux S -préschémas de présentation finie, $f : X \rightarrow Y$ un S -morphisme.

I) Soit E l'ensemble des $s \in S$ pour lesquels f_s a l'une des propriétés suivantes : être :

- (i) affine ;
- (ii) quasi-affine ;
- (iii) projectif ;
- (iv) quasi-projectif.

Alors E est ind-constructible dans S .

II) Soit \mathcal{L} un \mathcal{O}_X -Module inversible. Alors l'ensemble E' des $s \in S$ tels que \mathcal{L}_s soit un \mathcal{O}_{X_s} -Module ample (resp. très ample) relativement à f_s , est ind-constructible dans S .

I) Vérifions les conditions (i) et (ii) de (9.2.1). En ce qui concerne la condition (9.2.1, (i)), elle résulte, pour les propriétés (i) et (ii), de (2.7.1, (xiii) et (xiv)); pour les propriétés (iii) et (iv), elle résulte de (9.1.5). Vérifions ensuite la condition (9.2.1, (ii)), en supposant donc S noethérien, intègre et de point générique η , et que $f_\eta : X_\eta \rightarrow Y_\eta$ ait l'une des propriétés (i) à (iv) de l'énoncé. Appliquant (8.10.5, (viii), (ix), (xiii) et (xiv)) suivant la méthode de (8.1.2, a)), on voit d'abord qu'il existe un voisinage ouvert U de η tel que, si V et W sont les images réciproques de U dans X et Y respectivement par les morphismes structuraux, la restriction $V \rightarrow W$ de f a celle des propriétés (i) à (iv) que l'on considère. La conclusion résulte alors de ce que ces propriétés sont toutes stables par changement de base.

II) On procède de la même façon. La condition (9.2.1, (i)) résulte cette fois de (2.7.2). Pour la condition (9.2.1, (ii)), avec les mêmes notations que dans I), il résulte de (8.10.5.2) que pour un voisinage U de η dans S , la restriction $\mathcal{L}|_V$ est ample (resp. très ample) relativement à la restriction $V \rightarrow W$ de f . La conclusion résulte encore de la stabilité des propriétés considérées par changement de base (II, 4.6.13 et 4.4.10).

On peut améliorer (9.6.2, II)) sous certaines conditions :

Proposition (9.6.3). — Soient X, Y deux S -préschémas de présentation finie, $f : X \rightarrow Y$ un S -morphisme propre, \mathcal{L} un \mathcal{O}_X -Module inversible. Alors l'ensemble E (resp. E') des $s \in S$ tels que \mathcal{L}_s soit un \mathcal{O}_{X_s} -Module ample (resp. très ample) relativement à $f_s : X_s \rightarrow Y_s$ est localement constructible dans S .

Soient k un corps, Z, T deux préschémas algébriques sur k , \mathcal{M} un \mathcal{O}_Z -Module inversible, $g : Z \rightarrow T$ un k -morphisme de type fini; alors, si $\mathbf{P}(Z, T, \mathcal{M}, g, k)$ désigne la relation : « \mathcal{M} est ample (resp. très ample) relativement à g », on a déjà remarqué dans (9.6.2) que $\mathbf{P}(Z, T, \mathcal{M}, g, k)$ vérifie la condition (9.2.1, (i)) en vertu de (2.7.2). On sait déjà d'autre part que E et E' sont ind-constructibles. Il reste donc à voir que si S est noethérien, intègre, de point générique η et si $\eta \in S - E$ (resp. $\eta \in S - E'$), alors $S - E$ (resp. $S - E'$) contient un voisinage de η . Nous considérerons séparément le cas de E' et celui de E .

I) *Cas de E' .* — Notons que puisque f est séparé et Y quasi-compact, il existe un entier h tel que, pour $q > h$, on ait $R^q f_*(\mathcal{L}) = 0$ (III, 1.4.12); d'autre part, puisque f est propre et Y noethérien, les $R^q f_*(\mathcal{L})$ sont tous des \mathcal{O}_Y -Modules cohérents (III, 3.2.1); comme ils sont nuls sauf pour un nombre fini de valeurs de q , le théorème de platitude générique (6.9.1) montre qu'en restreignant S à un voisinage de η , on peut supposer que \mathcal{L} et les $R^q f_*(\mathcal{L})$ sont tous S -plats. On conclut alors de (III, 6.9.9) que l'homomorphisme canonique

$$(9.6.3.1) \quad f_*(\mathcal{L}) \otimes_{\mathcal{O}_S} k(s) \rightarrow (f_s)_*(\mathcal{L}_s)$$

est un isomorphisme.

Cela étant, il résulte de (II, 4.4.4) que dire que \mathcal{L}_s n'est pas très ample relativement à f_s signifie que : *ou bien* l'homomorphisme canonique $(f_s)^*((f_s)_*(\mathcal{L}_s)) \rightarrow \mathcal{L}_s$ n'est pas surjectif; *ou bien* l'homomorphisme précédent est surjectif et le morphisme canonique $r : X_s \rightarrow \mathbf{P}((f_s)_*(\mathcal{L}_s))$ n'est pas une immersion. Compte tenu de l'isomorphisme (9.6.3.1), ces conditions s'écrivent respectivement sous la forme : 1° l'homomorphisme canonique $(f^*(f_*(\mathcal{L})))_s \rightarrow \mathcal{L}_s$ n'est pas surjectif; 2° l'homomorphisme précédent est surjectif et le morphisme canonique $X_s \rightarrow \mathbf{P}((f_*(\mathcal{L}))_s)$ n'est pas une immersion.

Supposons d'abord que l'homomorphisme canonique $(f^*(f_*(\mathcal{L})))_\eta \rightarrow \mathcal{L}_\eta$ ne soit pas surjectif. Comme $f_*(\mathcal{L})$ est cohérent, il en est de même de $f^*(f_*(\mathcal{L}))$, et alors il résulte de (9.4.5) que pour tout s dans un voisinage de η , l'homomorphisme $(f^*(f_*(\mathcal{L})))_s \rightarrow \mathcal{L}_s$ n'est pas surjectif, ce qui prouve dans ce cas que $S - E'$ est un voisinage de η .

Supposons en second lieu que l'homomorphisme canonique $(f^*(f_*(\mathcal{L})))_\eta \rightarrow \mathcal{L}_\eta$ soit surjectif mais que le morphisme $X \rightarrow \mathbf{P}((f_*(\mathcal{L}))_\eta)$ ne soit pas une immersion. Alors le même raisonnement que ci-dessus montre d'abord que pour tout s assez voisin de η , l'homomorphisme $(f^*(f_*(\mathcal{L})))_s \rightarrow \mathcal{L}_s$ est surjectif; d'autre part, en vertu de (9.6.1, (viii)), pour s assez voisin de η , le morphisme $X_s \rightarrow \mathbf{P}((f_*(\mathcal{L}))_s)$ n'est pas une immersion ce qui achève la démonstration dans le cas de E' .

II) *Cas de E.* — Considérons d'abord le cas particulier où $Y = S$:

Corollaire (9.6.4). — Soient $f : X \rightarrow S$ un morphisme propre de présentation finie, \mathcal{L} un \mathcal{O}_X -Module inversible. Alors, l'ensemble E des $s \in S$ tels que \mathcal{L}_s soit ample (relativement à f_s) est ouvert dans S , et $\mathcal{L}|_{f^{-1}(E)}$ est ample relativement à la restriction $f^{-1}(E) \rightarrow E$ de f .

Comme la condition (9.2.1, (i)) est vérifiée par la propriété \mathbf{P} définie plus haut, le résultat de (9.2.2, (iv)) et le raisonnement de (9.2.3) montrent qu'on peut se borner au cas où S est noethérien; mais alors le résultat découle de (III, 4.7.1) et de la stabilité de l'amplitude par changement de base (II, 4.6.13).

Corollaire (9.6.5). — Sous les hypothèses de (9.6.4), pour que \mathcal{L} soit ample relativement à f , il faut et il suffit que, pour tout $s \in S$, \mathcal{L}_s soit ample relativement à f_s .

(9.6.6) *Fin de la démonstration de (9.6.3).* — Revenons au cas général, S étant noethérien, intègre et de point générique $\eta \in S - E$. Comme f est propre, il résulte de (9.6.4) que l'ensemble V des $y \in Y$ tels que \mathcal{L}_y soit un \mathcal{O}_{X_y} -Module ample, relativement au morphisme $f_y : X_y \rightarrow \text{Spec}(\mathbf{k}(y))$ est ouvert, donc $F = Y - V$ est fermé dans Y . Cela étant, comme f_s est propre et que, pour tout $y \in Y$ au-dessus de $s \in S$, on a $\mathcal{L}_y = (\mathcal{L}_s)_y$, il résulte de (9.6.5) que pour que s appartienne à $S - E$, il faut et il suffit que l'on ait $F_s \neq \emptyset$. Mais comme F est fermé dans Y et que $F_\eta \neq \emptyset$, il résulte de (9.5.1) que l'ensemble des $s \in S$ tels que $F_s \neq \emptyset$ est un voisinage de η dans S . C.Q.F.D.

Remarques (9.6.7). — (i) Pour chacune des propriétés \mathbf{P} considérées dans (9.6.1) la proposition (9.3.3) est applicable, et ces propriétés (pour les morphismes f_s) sont donc « stables » par passage d'une limite projective d'un système projectif essentiellement affine (8.13.4) de préschémas X_λ à l'un convenable d'entre eux.

(ii) Soit Z une partie localement constructible de X telle que, pour tout $s \in S$, $Z \cap X_s$ soit ouvert dans X_s , et désignons par Z_s le sous-préschéma de X_s induit sur l'ouvert $Z \cap X_s$.

Alors, dans les propositions (9.6.1) et (9.6.2, (I)), on peut partout remplacer f_s par sa restriction $f_s|_{Z_s} : Z_s \rightarrow Y_s$ sans changer les conclusions. En effet, la vérification de (9.2.1, (i)) se fait comme dans (9.6.1) et (9.6.2). D'autre part, dans la réduction au cas où S est noethérien, faite dans (9.2.3), si $Z = q^{-1}(Z_0)$, où $q : X \rightarrow X_0$ est la projection canonique et Z_0 une partie constructible de X_0 (8.3.11), le fait que $(Z_0)_s$ soit ouvert dans $(X_0)_s$, pour $s_n = p(s)$, découle de (2.4.10) et de ce que la projection $X_s \rightarrow (X_0)_s$ est surjective. On est donc ramené à vérifier (9.2.1, (ii)) sous les nouvelles hypothèses. Or, comme Z_η est ouvert dans X_η , il existe un ouvert $Z' \subset X$ tel que $Z_\eta = Z' \cap X_\eta$; comme X est alors noethérien, Z' est constructible, et il en est de même de Z par hypothèse; on conclut donc de (9.5.2) et de (0_{III}, 9.2.2) qu'il y a un voisinage U de η dans S tel que $Z_s = Z'_s$ pour $s \in U$. Remplaçant S par U , on peut donc se borner au cas où Z est ouvert dans X , et alors on est ramené à ce qui a été prouvé dans (9.6.1) et (9.6.2).

9.7. Constructibilité des propriétés de séparabilité, d'irréductibilité géométrique et de connexité géométrique.

Lemme (9.7.1). — Soient S un préschéma irréductible de point générique η , $f : X \rightarrow S$ un morphisme de présentation finie. Si X_η a n composantes irréductibles (resp. n' composantes connexes), il existe un voisinage ouvert U de η dans S tel que pour tout $s \in U$, X_s ait au moins n composantes irréductibles (resp. n' composantes connexes).

On peut se borner au cas où S est affine, donc X quasi-compact et quasi-séparé.

Soient V_i ($1 \leq i \leq n$) les intérieurs des composantes irréductibles de X_η , qui sont deux à deux disjoints et quasi-compacts, et dont la réunion est dense dans X_η ; en vertu de (8.2.11), appliqué suivant la méthode de (8.1.2, a)), il existe pour chaque i un ouvert quasi-compact W_i dans X tel que $W_i \cap X_\eta = V_i$; comme X est quasi-séparé, les intersections $W_i \cap W_j$ sont quasi-compactes (1.2.7), donc, en remplaçant S par un voisinage de η , on peut supposer que $W_i \cap W_j = \emptyset$ pour $i \neq j$ en vertu de (8.3.3). En outre, comme les W_i sont constructibles, il y a un voisinage U de η dans S tel que pour tout $s \in U$ les $(W_i)_s$ soient non vides (9.5.1 et 9.2.3) et que la réunion des $(W_i)_s$ soit dense dans X_s (9.5.3 et 9.2.3). Cela étant, les composantes irréductibles (en nombre fini) des $(W_i)_s$ sont aussi les composantes irréductibles de la réunion des $(W_i)_s$ (0_I, 2.1.7), donc les adhérences dans X_s de ces composantes sont les composantes irréductibles de X_s (0_I, 2.1.6) et leur nombre est évidemment $\geq n$.

Soient maintenant C_j ($1 \leq j \leq n'$) les composantes connexes de X_η , qui sont des ouverts quasi-compacts de X_η , deux à deux disjoints. Si on remplace les V_i par les C_j dans le raisonnement précédent, on voit (utilisant deux fois (8.3.3)) qu'on peut supposer X réunion de n' ouverts quasi-compacts M_j ($1 \leq j \leq n'$) deux à deux disjoints et que, dans un voisinage de η , les $(M_j)_s$ soient non vides. Comme la réunion des $(M_j)_s$ est X_s , les composantes connexes des $(M_j)_s$ sont les composantes connexes de X_s , donc leur nombre est $\geq n'$.

Lemme (9.7.2). — Soient S un préschéma irréductible de point générique η , $f: X \rightarrow S$ un morphisme de présentation finie. Si X_η n'est pas réduit, il existe un voisinage ouvert U de η dans S tel que, pour tout $s \in U$, X_s ne soit pas réduit.

En effet, soit \mathcal{N} le Nilradical de \mathcal{O}_X ; il résulte de (8.2.13), appliqué suivant la méthode de (8.1.2, a)) que \mathcal{N}_η est le nilradical de \mathcal{O}_{X_η} , et l'hypothèse est que $\mathcal{N}_\eta \neq 0$. On conclut de (9.4.5) et (9.2.3) qu'il y a un voisinage U de η tel que, pour tout $s \in U$, \mathcal{N}_s s'identifie à un idéal de \mathcal{O}_{X_s} et $\mathcal{N}_s \neq 0$; comme \mathcal{N}_s est évidemment contenu dans le Nilradical de \mathcal{O}_{X_s} , on voit que X_s n'est pas réduit pour $s \in U$.

(9.7.3) Étant donné un polynôme $F \in A[T_1, \dots, T_n]$, où A est un anneau et les T_i des indéterminées, pour tout homomorphisme d'anneaux $\rho: A \rightarrow B$, nous désignerons par $F_{(\rho)}$ ou $F_{(B)}$ le polynôme de $B[T_1, \dots, T_n]$ obtenu en remplaçant chaque coefficient de F par son image par ρ . Si k est un corps, $F \in k[T_1, \dots, T_n]$ un polynôme non constant et $X = \text{Spec}(k[T_1, \dots, T_n]/(F))$, dire que X est intègre (ou que l'idéal (F) est premier) signifie que F est *irréductible* (c'est-à-dire que dans toute factorisation $F = F_1 F_2$ en polynômes de $k[T_1, \dots, T_n]$, F_1 ou F_2 est de degré 0); cela résulte de ce que l'anneau $k[T_1, \dots, T_n]$ est factoriel. On en déduit aussitôt ((4.6.2) et (4.5.2)) :

Lemme (9.7.4). — Soient k un corps, Ω une extension algébriquement close de k , F un polynôme non constant de $k[T_1, \dots, T_n]$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) $X = \text{Spec}(k[T_1, \dots, T_n]/(F))$ est géométriquement intègre.
- b) $F_{(K)}$ est irréductible pour toute extension K de k .
- c) $F_{(\Omega)}$ est irréductible.

Nous dirons dans ce cas que F est *géométriquement irréductible*.

Lemme (9.7.5). — Soient A un anneau intègre, K son corps des fractions, F un polynôme non constant de $A[T_1, \dots, T_n]$ de degré d tel que $F_{(K)}$ soit géométriquement irréductible. Alors il existe $f \neq 0$ dans A tel que pour tout $x \in D(f)$, $F_{(K(x)')}$ soit géométriquement irréductible.

Posons $F = \sum_{\alpha} c_{\alpha} T^{\alpha}$ avec comme d'ordinaire $c_{\alpha} = c_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}$, $T^{\alpha} = T_1^{\alpha_1} T_2^{\alpha_2} \dots T_n^{\alpha_n}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \leq d$ (un au moins des c_{α} tels que $|\alpha| = d$ n'étant pas nul). Comme les c_{α} non nuls sont inversibles dans K , on peut supposer, en remplaçant au besoin A par un anneau A_g ($g \neq 0$ dans A) que les c_{α} non nuls sont inversibles dans A . Il en résulte que pour tout $x \in \text{Spec}(A)$, $F_{(K(x)')}$ est de degré d .

Nous démontrerons d'abord un lemme préliminaire.

Lemme (9.7.5.1). — Soient A un anneau intègre, $S = \text{Spec}(A)$, η le point générique de S , B l'anneau de polynômes $A[T_1, \dots, T_m]$, $(P_i)_{i \in I}$ une famille finie d'éléments de B , \mathfrak{a} l'idéal de B engendré par les P_i . Pour tout $s \in S$, soit \mathfrak{a}_s l'idéal de $k(s)[T_1, \dots, T_m]$ engendré par les polynômes $(P_i)_{(k(s))}$ ($i \in I$). Alors, si $V(\mathfrak{a}_\eta) = \emptyset$, il existe un voisinage U de η dans S tel que $V(\mathfrak{a}_s) = \emptyset$ pour tout $s \in U$.

En effet, soit $Y = \text{Spec}(B)$, et soit Z la partie fermée $V(\mathfrak{a})$ de Y ; comme \mathfrak{a} est un idéal de type fini, Z est constructible dans Y (0_{III} , 9.1.5) et avec les notations introduites en (9.4.1), on a $V(\mathfrak{a}_s) = Z_s$ pour tout $s \in S$; comme le morphisme structural $Y \rightarrow S$ est de présentation finie, la conclusion du lemme résulte de (9.5.1) et (9.2.3).

Soit (p, q) un couple d'entiers > 0 tels que $p + q = d$; introduisons des indéterminées T'_β, T''_γ pour tous les systèmes d'entiers β, γ tels que $|\beta| \leq p$ et $|\gamma| \leq q$; pour tout système d'entiers α tel que $|\alpha| \leq d$, considérons le polynôme de $B = A[T'_\beta, T''_\gamma]_{|\beta| \leq p, |\gamma| \leq q} : P_\alpha(T'_\beta, T''_\gamma) = \sum_{\beta + \gamma = \alpha} T'_\beta T''_\gamma - c_\alpha$. Soit Ω une clôture algébrique de K ; dire qu'il existe deux polynômes F_1, F_2 de $\Omega[T_1, \dots, T_n]$, de degrés respectifs p et q , tels que $F_1 F_2 = F_{(\Omega)}$ signifie que le système d'équations $P_\alpha(t'_\beta, t''_\gamma) = 0$ ($|\alpha| \leq d$) admet une solution (t'_β, t''_γ) ($|\beta| \leq p, |\gamma| \leq q$) formée d'éléments de Ω . Soit \mathfrak{a} l'idéal de B engendré par les P_α ; l'interprétation précédente, et le théorème des zéros de Hilbert, montrent que l'hypothèse sur $F_{(K)}$ implique que $V(\mathfrak{a}_\eta) = \emptyset$, en désignant par η le point générique de $\text{Spec}(A)$; le lemme (9.7.5.1) prouve donc que dans un voisinage de η , on a $V(\mathfrak{a}_x) = \emptyset$, et par suite pour ces valeurs de x , $F_{(k(x))}$ n'admet pas de factorisation $F_{(k(x))} = G_1 G_2$, où G_1, G_2 sont des polynômes de degrés respectifs p et q , dont les coefficients sont dans une clôture algébrique de $k(x)$. Il suffit d'appliquer ce résultat à tous les couples d'entiers (p, q) tels que $p > 0, q > 0$ et $p + q = d$, pour obtenir la conclusion du lemme (9.7.5).

Proposition (9.7.6). — Soient S un préschéma noethérien intègre de point générique η , $f : X \rightarrow S$ un morphisme de type fini, \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -Module cohérent. Si \mathcal{F}_η est sans cycle premier associé immergé, il existe un voisinage U de η dans S tel que, pour tout $s \in U$, \mathcal{F}_s soit sans cycle premier associé immergé.

Comme X_η est noethérien, il existe un homomorphisme injectif $v : \mathcal{F}_\eta \rightarrow \bigoplus_{i=1}^m \mathcal{G}_i$, où chacun des \mathcal{G}_i est irredondant et $\text{Ass}(\mathcal{F}_\eta)$ est l'ensemble des x_i , où $\{x_i\} = \text{Ass}(\mathcal{G}_i)$ (3.2.6); si Z_i est l'adhérence de $\{x_i\}$ dans X_η , on a $Z_i = \text{Supp}(\mathcal{G}_i)$ (3.1.4), et par hypothèse les Z_i sont les composantes irréductibles de $Z = \text{Supp}(\mathcal{F}_\eta)$. Il résulte de (8.5.2, (i) et (ii)) (en restreignant au besoin S à un voisinage de η) et (8.5.8) qu'il existe des \mathcal{O}_X -Modules cohérents \mathcal{F}_i et un homomorphisme injectif $u : \mathcal{F} \rightarrow \bigoplus_{i=1}^m \mathcal{F}_i$ tels que $(\mathcal{F}_i)_\eta = \mathcal{G}_i$ pour tout i et $v = u_\eta$. Si $Y_i = \text{Supp}(\mathcal{F}_i)$, on a $(Y_i)_s = \text{Supp}((\mathcal{F}_i)_s)$ pour tout $s \in S$ (I, 9.1.13) et en particulier $(Y_i)_\eta = Z_i$ pour tout i . L'hypothèse entraîne que pour $i \neq j$, $Z_i - (Z_i \cap Z_j)$ est ouvert dense dans Z_i ; on déduit donc de (9.5.3) et (9.5.4) que dans un voisinage de η , $(Y_i)_s - ((Y_i)_s \cap (Y_j)_s)$ est ouvert et dense dans $(Y_i)_s$. Supposons que l'on ait prouvé que chacun des $(\mathcal{F}_i)_s$ est sans cycle premier associé pour $s \in U$. Alors les éléments de $\text{Ass}((\mathcal{F}_i)_s)$ sont les points maximaux de $(Y_i)_s$; aucun d'eux ne peut donc appartenir à un $(Y_j)_s$ pour $i \neq j$, et la proposition sera démontrée. On peut donc supposer que \mathcal{F}_η est *irredondant*; en outre, on peut se borner au cas où $S = \text{Spec}(A)$ est affine; X est alors réunion d'un nombre fini d'ouverts affines V_j et si $V_j \cap \text{Supp}(\mathcal{F}_\eta) = \emptyset$, on aura aussi $V_j \cap \text{Supp}(\mathcal{F}_s) = \emptyset$ pour s voisin de η (9.5.1), donc on peut se borner au cas où $X = \text{Spec}(B)$ est aussi affine et où le morphisme $f : X \rightarrow S$ est dominant; A est donc un anneau noethérien intègre, sous-anneau d'une A -algèbre de type fini B , et $\mathcal{F} = \widetilde{M}$, où M est un B -module de type fini; par hypothèse, si K est le corps des fractions de A , le $B_{(K)}$ -module $M_{(K)}$ est irredondant. Soit \mathfrak{q} l'unique

élément de $\text{Ass}(M_{(K)})$, et soit \mathfrak{p} l'idéal premier de B image réciproque de \mathfrak{q} par l'application canonique $B \rightarrow B_{(K)}$. On sait (5.11.1.1) qu'il existe une filtration finie $(N_h)_{0 \leq h \leq m}$ de $M_{(K)}$ telle que $N_0 = M_{(K)}$, $N_m = 0$, et que N_h/N_{h+1} soit isomorphe à un sous- $B_{(K)}$ -module $\neq 0$ de $B_{(K)}/\mathfrak{q}$. Soit M_h l'image réciproque de N_h par l'application canonique $M \rightarrow M_{(K)}$. Il résulte de (9.4.4) que pour s assez voisin de η , $(M_h)_{(k(s))}$ s'identifie à un sous- $B_{(k(s))}$ -module de $M_{(k(s))}$, et le quotient $(M_h)_{(k(s))}/(M_{h+1})_{(k(s))}$ à un sous- $B_{(k(s))}$ -module $\neq 0$ de $B_{(k(s))}/\mathfrak{p}_{(k(s))} = (B/\mathfrak{p})_{(k(s))}$. Compte tenu de (3.1.7), on voit qu'on est ramené à prouver, avec les mêmes notations, que si B est *intégrale*, alors $B_{(k(s))}$ n'a pas d'idéaux premiers associés immergés pour s voisin de η . Or, en remplaçant au besoin A par A_g et B par B_g (où g est un élément $\neq 0$ de A), on peut supposer que B contient une A -algèbre de polynômes $C = A[T_1, \dots, T_n]$ telle que B soit un C -module de type fini (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. V, § 3, n° 1, cor. 1 du th. 1). Comme $B_{(K)}$ est un $C_{(K)}$ -module sans torsion, on peut appliquer de nouveau le raisonnement fait plus haut en remplaçant B , M et \mathfrak{q} par C , B et (0) respectivement, et il suffit donc de voir que pour s voisin de η , $C_{(k(s))}$ n'a pas d'idéaux premiers associés immergés. Mais cela est évident puisque $C_{(k(s))} = k(s)[T_1, \dots, T_n]$ est un anneau intègre. C.Q.F.D.

Théorème (9.7.7). — Soit $f : X \rightarrow S$ un morphisme de présentation finie, et soit E l'ensemble des $s \in S$ pour lesquels X_s a l'une des propriétés suivantes : être :

- (i) géométriquement irréductible ;
- (ii) géométriquement connexe ;
- (iii) géométriquement réduit ;
- (iv) géométriquement intègre.

Alors E est localement constructible dans S .

Pour voir que les propriétés envisagées sont constructibles, remarquons d'abord qu'elles vérifient trivialement la condition (9.2.1, (i)), en vertu de (4.5.6, (i)) et (4.6.5, (i)). Il reste donc à vérifier (9.2.1, (ii)), donc on peut supposer $S = \text{Spec}(A)$ affine noethérien et intègre de point générique η . En vertu de (4.6.8), il existe une extension finie K' de $K = k(\eta)$ telle que $(X_\eta)_{(K')}$ soit tel que ses composantes irréductibles (resp. connexes) soient géométriquement irréductibles (resp. géométriquement connexes) et que $((X_\eta)_{(K')})_{\text{red}}$ soit géométriquement réduit. Comme il existe une base de K' sur K formée d'éléments entiers sur A , l'anneau intègre A' engendré par ces éléments est fini sur A et a K' pour corps des fractions. Posons $S' = \text{Spec}(A')$; le morphisme $g : S' \rightarrow S$ est fini et dominant, donc surjectif (II, 6.1.10). Posons $X' = X_{(S')}$, de sorte que si η' est le point générique de S' , on a $X'_{\eta'} = (X_\eta)_{(K')}$; l'ensemble E' des $s' \in S'$ tels que $X'_{s'}$ ait l'une des propriétés (i), (ii), (iii) ou (iv) est égal à $g^{-1}(E)$ (9.2.2, (iv)) (E correspondant bien entendu à la même propriété) ; g étant surjectif, on a $E = g(E')$ et $S - E = g(S' - E')$; en outre, g est fermé et $g^{-1}(\eta) = \{\eta'\}$ puisque A' est intègre et fini sur A (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. V, § 2, n° 1, cor. 1 de la prop. 1), donc l'image par g de tout voisinage de η' est un voisinage de η . Le théorème sera donc démontré si l'on prouve que E' ou $S' - E'$ est un voisinage de η' . Autrement dit, on peut désormais supposer que les composantes irréductibles (resp. connexes) de X_η sont géométriquement

irréductibles (resp. géométriquement connexes) et que $(X_\eta)_{\text{red}}$ est géométriquement réduit.

Supposons d'abord que $\eta \in S - E$ pour une des propriétés (i) à (iv). Si X_η n'est pas géométriquement irréductible (resp. géométriquement connexe), il n'est pas irréductible (resp. connexe) en vertu de l'hypothèse précédente, donc il en est de même de X_s pour s dans un voisinage de η (9.7.1), et *a fortiori* dans ce voisinage X_s n'est pas géométriquement irréductible (resp. géométriquement connexe). D'autre part, si X_η n'est pas géométriquement réduit, il n'est pas réduit (sans quoi il serait égal à $(X_\eta)_{\text{red}}$ qui est géométriquement réduit par hypothèse); donc, dans un voisinage de η , X_s n'est pas réduit (9.7.2) et *a fortiori* n'est pas géométriquement réduit. Enfin, si X_η n'est pas géométriquement intègre, ou bien il n'est pas réduit, et alors on vient de voir que X_s n'est pas réduit (ni *a fortiori* intègre) dans un voisinage de η ; ou bien X_η est réduit (donc géométriquement réduit par hypothèse), et alors il n'est pas géométriquement irréductible, et on a vu ci-dessus qu'il en est alors de même de X_s pour s voisin de η ; *a fortiori* X_s n'est pas géométriquement intègre pour ces valeurs de s .

Nous allons donc désormais supposer que $\eta \in E$ et examiner séparément chacune des propriétés considérées.

1° Supposons que X_η soit géométriquement intègre. Soit L le corps des fonctions rationnelles sur X_η ; l'hypothèse sur X_η implique que L est extension séparable de K (4.6.3), donc extension séparable finie d'une extension pure $K(T_1, \dots, T_n)$ (T_i indéterminées); il y a par suite un élément $x \in L$, entier sur l'anneau $K[T_1, \dots, T_n]$, et tel que $L = K(T_1, \dots, T_n)(x)$; soit $G \in K[T_1, \dots, T_n, T_{n+1}]$ son polynôme minimal. Il existe un élément $g \neq 0$ de A tel que tous les coefficients $\neq 0$ de G (qui appartiennent à K) soient dans l'anneau A_g ; remplaçant A par A_g (ce qui revient à remplacer S par un voisinage de η), on peut donc supposer que G a ses coefficients dans A ; désignant par F le polynôme G considéré comme élément de $A[T_1, \dots, T_n, T_{n+1}]$, on a donc $G = F_{(K(\eta))}$. Posons $Y = \text{Spec}(A[T_1, \dots, T_{n+1}]/(F))$, de sorte que $Y_\eta = \text{Spec}(K[T_1, \dots, T_{n+1}]/(G))$; Y_η est un schéma intègre ayant L pour corps des fonctions rationnelles. Comme X_η et Y_η sont noethériens, il existe un ouvert non vide $V \subset Y_\eta$ et une immersion ouverte $v : V \rightarrow X_\eta$ (nécessairement dominante) (I, 6.5.1, (ii) et 6.5.4, (ii)). Soit W un ouvert de Y tel que $W \cap Y_\eta = V$; appliquant (8.8.2, (i)) et (8.10.5, (iii)) suivant la méthode de (8.1.2, a)), on voit qu'en remplaçant au besoin S par un voisinage de η , on peut supposer que $v = w_\eta$ où $w : W \rightarrow X$ est une immersion ouverte.

Cela étant, on a vu (4.6.3) que le critère pour qu'un préschéma algébrique intègre soit géométriquement intègre ne dépend que de son corps de fonctions rationnelles; comme X_η est géométriquement intègre par hypothèse, il en est de même de Y_η , et la définition de G entraîne donc que ce polynôme est géométriquement irréductible (9.7.4). Appliquant (9.7.5), on voit qu'il y a un voisinage U de η dans S tel que $F_{(K(s))}$ soit géométriquement irréductible pour tout $s \in U$, donc Y_s est géométriquement intègre pour $s \in U$ (9.7.4); en outre on peut supposer que pour $s \in U$, W_s n'est pas vide (9.5.1), et par suite est géométriquement intègre (4.6.3); enfin, on peut supposer aussi que

pour $s \in U$, $w_s : W_s \rightarrow X_s$ est une immersion ouverte (9.6.1, (x)), et que son image dans X_s est partout dense (9.5.3). Autrement dit, pour $s \in U$, il y a dans X_s un ouvert partout dense W'_s qui est géométriquement intègre; le critère (4.5.9, c)) montre donc déjà que X_s est géométriquement irréductible pour $s \in U$. Enfin, comme X_η est réduit et par suite n'a pas de cycle premier associé immergé (3.2.1), on peut aussi supposer que pour $s \in U$, X_s n'a pas de cycle premier associé immergé (9.7.6); soit alors (pour un $s \in U$ fixé) Ω une extension algébriquement close de $k(s)$, et soit $p : (X_s)_{(\Omega)} \rightarrow X_s$ la projection canonique; $p^{-1}(W'_s)$ est un ouvert dense dans $(X_s)_{(\Omega)}$ (2.3.10) et est intègre par hypothèse; en outre $(X_s)_{(\Omega)}$ n'a pas de cycle premier associé immergé (4.2.7), donc on conclut de (3.2.1) que $(X_s)_{(\Omega)}$ est réduit; cela achève de prouver que X_s est géométriquement intègre (4.6.1).

2° Supposons que X_η soit géométriquement irréductible; comme X_{red} est aussi de type fini sur S (1.5.4, (vi)) on peut, en tenant compte de (I, 5.1.8), remplacer X par X_{red} ; alors X_η est aussi intègre, et comme par hypothèse X_η est géométriquement réduit, il est géométriquement intègre. On est alors dans les conditions de 1° et on en conclut (revenant aux hypothèses initiales) que X_s est géométriquement irréductible pour s voisin de η .

3° Supposons X_η géométriquement connexe, et soient Z_i ($1 \leq i \leq n$) les composantes irréductibles de X_η ; il existe (en vertu de (5.10.8.1) appliqué à $\mathfrak{F} = \{\emptyset\}$) une application *surjective* $j \rightarrow v(j)$ d'un intervalle $[1, m]$ de \mathbf{N} sur $[1, n]$ telle que $Z_{v(j)} \cap Z_{v(j+1)} \neq \emptyset$ pour $1 \leq j \leq m$. Pour tout i , soit X_i l'adhérence de Z_i dans X , et soit Y la réunion des X_i ; comme $Y_\eta = X_\eta$ par définition, on peut supposer, en vertu de (9.5.1), que $Y_s = X_s$ pour tout $s \in S$, donc que X_s est réunion des $(X_i)_s$. Or, en considérant les sous-préschémas fermés réduits de X ayant les X_i pour espaces sous-jacents, on voit par 2° qu'il existe un voisinage U de η dans S tel que pour $s \in U$ les $(X_i)_s$ soient *géométriquement irréductibles* (puisque les $(X_i)_\eta$ peuvent être supposés géométriquement irréductibles, comme on l'a vu au début). En outre, on peut aussi supposer que pour $s \in U$, on a $(X_{v(j)})_s \cap (X_{v(j+1)})_s \neq \emptyset$ (9.5.1) pour $1 \leq j \leq m$; on en conclut aussitôt que X_s est connexe, donc (4.5.13.1) géométriquement connexe pour $s \in U$.

4° Supposons X_η géométriquement réduit; soient Z_i les composantes irréductibles de X_η , W_i l'intérieur de Z_i dans X_η ; il y a pour chaque i un ouvert V_i de X tel que $W_i = V_i \cap X_\eta$ pour tout i ; comme les W_i sont ouverts et deux à deux disjoints et que leur réunion est dense dans X_η , on peut (9.5.1, 9.5.3 et 9.5.4) supposer que pour s voisin de η , les $(V_i)_s$ sont des ouverts deux à deux disjoints dans X_s et que leur réunion est dense dans X_s . En outre, comme les W_i sont géométriquement réduits et ont été supposés au début géométriquement irréductibles, il résulte du 1° que pour s voisin de η , les $(V_i)_s$ sont géométriquement intègres, et *a fortiori* réduits. D'autre part, on tire de (9.7.6) que pour s voisin de η , X_s n'a pas de cycle premier associé immergé, puisqu'il en est ainsi de X_η qui est réduit (3.2.1); on conclut donc de (3.2.1) que X_s est réduit, et de (4.6.1) qu'il est géométriquement réduit.

Les parties de l'énoncé (9.7.7) concernant les propriétés (i) et (ii) se généralisent comme suit :

Proposition (9.7.8). — Soient S un préschéma irréductible de point générique η , et $f : X \rightarrow S$ un morphisme de présentation finie. Soit n (resp. n') le nombre géométrique de composantes irréductibles (resp. connexes) de X_η (4.5.2). Alors il existe un voisinage U de η dans S tel que pour tout $s \in U$ le nombre géométrique de composantes irréductibles (resp. connexes) de X_s soit égal à n (resp. n').

Compte tenu de ce que le nombre géométrique de composantes irréductibles (resp. connexes) d'un préschéma algébrique est invariant par extension du corps de base (4.5.6), on voit par la méthode de (9.2.3) que l'on peut se ramener au cas où S est affine, noethérien et intègre. En outre, en raisonnant comme au début de la démonstration de (9.7.7), on voit qu'on peut supposer que les composantes irréductibles (resp. connexes) de X_η soient géométriquement irréductibles (resp. géométriquement connexes). On sait déjà (9.7.1) que pour tout s voisin de η , X_s a au moins n composantes irréductibles et n' composantes connexes. D'autre part, si Z_i (resp. Z'_j) sont les composantes irréductibles (resp. connexes) de X_η , X_i (resp. X'_j) le sous-préschéma fermé réduit de X ayant pour espace sous-jacent l'adhérence de Z_i (resp. Z'_j) dans X , il résulte de (9.5.1) que dans un voisinage de η , les $(X_i)_s$ (resp. $(X'_j)_s$) forment un recouvrement de X_s et que les $(X'_j)_s$ sont deux à deux disjoints; comme les $(X_i)_s$ (resp. $(X'_j)_s$) sont géométriquement irréductibles (resp. géométriquement connexes) en vertu de (9.7.7) pour s voisin de η , on voit que X_s a au plus n composantes irréductibles et au plus n' composantes connexes, d'où la proposition.

Corollaire (9.7.9). — Soit $f : X \rightarrow S$ un morphisme de présentation finie. Pour tout $s \in S$, soit $n(s)$ (resp. $n'(s)$) le nombre géométrique de composantes irréductibles (resp. connexes) de $f^{-1}(s)$ (4.5.2). Alors la fonction $s \mapsto n(s)$ (resp. $s \mapsto n'(s)$) est localement constructible dans S .

Il s'agit de montrer que la propriété « X est un préschéma algébrique sur un corps k et le nombre géométrique des composantes irréductibles (resp. connexes) de X est égal à n (resp. n') » est constructible. Il résulte de (4.5.6) que cette propriété vérifie la condition (9.2.1, (i)), et on est donc ramené au cas où S est affine, noethérien et intègre de point générique η ; la conclusion résulte alors de (9.7.8).

Corollaire (9.7.10). — Soit X un préschéma localement noethérien tel que, si X' est le normalisé de X_{red} , le morphisme canonique $f : X' \rightarrow X$ soit fini. Alors l'ensemble des points $x \in X$ tels que X soit géométriquement unibranche au point x est localement constructible dans X .

En effet, cet ensemble est par définition l'ensemble des points $x \in X$ tels que le nombre de points géométriques de $f^{-1}(x)$ soit égal à 1. Mais comme f est fini, ce nombre est aussi le nombre géométrique des composantes irréductibles de l'espace discret $f^{-1}(x)$ (compte tenu de la définition du normalisé (II, 6.3.8) et de (4.5.11)); la conclusion résulte donc de (9.7.9).

Remarque (9.7.11). — Soit Z une partie localement constructible de X telle que, pour tout $s \in S$, $Z \cap X_s$ soit ouvert dans X_s , et désignons par Z_s le sous-préschéma de X_s induit

sur l'ouvert $Z \cap X_s$. Alors, dans le théorème (9.7.7), on peut remplacer X_s par Z_s sans changer la conclusion : on le voit en répétant le raisonnement fait dans (9.6.7, (ii)).

Proposition (9.7.12). — Soient $f : X \rightarrow S$ un morphisme de présentation finie, et $g : S \rightarrow X$ une S -section de X (I, 2.5.5). Pour tout $s \in S$, soit X_s^0 la composante connexe de $f^{-1}(s)$ qui contient $g(s)$; alors, la réunion X^0 des X_s^0 pour $s \in S$ est une partie localement constructible de X .

Montrons d'abord qu'on peut se ramener au cas où S est affine et noethérien. On peut toujours supposer $S = \text{Spec}(A)$ affine; avec les notations de (9.2.3), on a $f = (f_0)_{(S)}$, où $f_0 : X_0 \rightarrow S_0$ est un morphisme de type fini, et on peut en outre supposer qu'il existe une S_0 -section $g_0 : S_0 \rightarrow X_0$ telle que $g = (g_0)_{(S)}$ (8.9.1). Remarquons maintenant que si p est le morphisme $S \rightarrow S_0$, alors, pour tout $s_0 \in S_0$, la composante connexe $(X_0)_{s_0}^0$ de $f_0^{-1}(s_0)$ qui contient $g_0(s_0)$ est géométriquement connexe (4.5.13), et par suite, si $s_0 = p(s)$, on a $X_s^0 = q^{-1}((X_0)_{s_0}^0)$ où $q : X_s \rightarrow (X_0)_{s_0}$ est la projection canonique ((4.5.8) et (4.4.1)); notre assertion résulte donc de (1.8.2).

Utilisons alors le critère de constructibilité (0_{III} , 9.2.3) : soient x un point de X , Z le sous-préschéma réduit de X ayant $\{\overline{x}\}$ comme espace sous-jacent, Y le sous-préschéma réduit de S ayant $\overline{f(Z)}$ comme espace sous-jacent; comme la restriction de f à Z se factorise en $Z \rightarrow Y \rightarrow S$ (I, 5.2.2), on peut remplacer S par Y , autrement dit supposer que $f(x) = \eta$, point générique du préschéma intègre S . Par hypothèse, X_η est somme de deux sous-préschémas X_η^0, X_η^1 , induits sur des ouverts complémentaires de X_η . En vertu de (9.5.4) et (9.5.1), on peut donc, en remplaçant au besoin S par un voisinage de η , supposer que X est réunion de deux ouverts disjoints X^0, X^1 tels que $(X^0)_\eta = X_\eta^0$ et $(X^1)_\eta = X_\eta^1$. Comme $g : S \rightarrow X$ est continu et injectif, S est réunion des deux ouverts disjoints $g^{-1}(X^0)$ et $g^{-1}(X^1)$; mais comme S est irréductible, et *a fortiori* connexe, un de ces deux ouverts est vide, et comme $g(\eta) \in X_\eta^0$ par définition, on a $g^{-1}(X^1) = \emptyset$. En d'autres termes, g est une S -section de X^0 ; d'autre part, comme $(X^0)_\eta$ est géométriquement connexe (4.5.13), il en est de même de $(X^0)_s$ pour tout s voisin de η (9.7.7); comme $g(s) \in (X^0)_s$, on a bien $(X^0)_s = X_s^0$. C.Q.F.D.

9.8. Décomposition primaire au voisinage d'une fibre générique.

Proposition (9.8.1). — Soient $f : X \rightarrow S$ un morphisme de présentation finie, \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -Module quasi-cohérent de présentation finie. Alors l'ensemble E des $s \in S$ tels que \mathcal{F}_s soit un \mathcal{O}_{X_s} -Module sans cycle premier associé immergé est localement constructible.

On sait que pour les Modules quasi-cohérents sur les préschémas algébriques, la propriété d'être sans cycle premier associé immergé est invariante par changement du corps de base (4.2.7); on peut donc se borner au cas où S est affine, noethérien et intègre de point générique η , et à prouver que dans ce cas E ou $S - E$ est un voisinage de η . On a vu dans (9.7.6) que si $\eta \in E$, E est un voisinage de η ; reste donc à considérer le cas où \mathcal{F}_η a des cycles premiers associés immergés. On peut se borner au cas où X est affine, et où il y a un sous- \mathcal{O}_{X_η} -Module cohérent \mathcal{H} de \mathcal{F}_η dont le support Z' est non vide et rare par rapport au support Z de \mathcal{F} (3.1.3); alors, en vertu de (8.5.2, (i) et (ii))

et (8.5.8), appliqués suivant la méthode de (8.1.2, a)), il existe un sous- \mathcal{O}_X -Module cohérent \mathcal{G} de \mathcal{F} tel que $\mathcal{G}_\eta = \mathcal{H}$; si $Y = \text{Supp}(\mathcal{F})$, $Y' = \text{Supp}(\mathcal{G})$, on a par suite $Y_s = \text{Supp}(\mathcal{F}_s)$, $Y'_s = \text{Supp}(\mathcal{G}_s)$ pour tout $s \in S$ (I, 9.1.13) et en particulier $Z = Y_\eta$, $Z' = Y'_\eta$; comme $Z - Z'$ est dense dans Z et $Z' \neq \emptyset$, il y a un voisinage U de η tel que pour $s \in U$, $Y_s - Y'_s$ soit dense dans Y_s , et $Y'_s \neq \emptyset$ (9.5.1 et 9.5.3); en considérant un point générique d'une composante irréductible de Y'_s et un voisinage assez petit de ce point dans X_s , on déduit aussitôt de (3.1.3) que \mathcal{F}_s admet des cycles premiers associés immergés.

(9.8.2) Soient S un préschéma noethérien intègre, de point générique η , $f : X \rightarrow S$ un morphisme de type fini, \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -Module cohérent. Considérons une décomposition irrédundante réduite $(\mathcal{G}_i)_{i \in I}$ de \mathcal{F}_η (3.2.6); les \mathcal{G}_i sont donc des quotients de \mathcal{F}_η et il y a un homomorphisme injectif $h : \mathcal{F}_\eta \rightarrow \bigoplus_i \mathcal{G}_i$; en outre $\text{Ass}(\mathcal{G}_i)$ est réduit à un point x_i . Soit Z_i l'adhérence de $\{x_i\}$ dans X , de sorte que $(Z_i)_\eta = \text{Supp}(\mathcal{G}_i)$. Désignons par \mathcal{I}_i l'Idéal cohérent de \mathcal{O}_X définissant le sous-préschéma fermé réduit de X d'espace sous-jacent Z_i (sous-préschéma encore noté Z_i). En vertu de (8.5.2) et (8.5.8), appliqués suivant la méthode de (8.1.2, a)), on peut (en restreignant au besoin S à un voisinage de η) supposer qu'il existe des quotients \mathcal{F}_i de \mathcal{F} ($i \in I$) tels que $\mathcal{G}_i = (\mathcal{F}_i)_\eta$ pour tout i , et un homomorphisme $g : \mathcal{F} \rightarrow \bigoplus_i \mathcal{F}_i$ tel que $h = g_\eta$. En outre (I, 9.3.5), il existe un entier m tel que $(\mathcal{I}_i^m \mathcal{F}_i)_\eta = (\mathcal{I}_i)_\eta^m \mathcal{G}_i = 0$ et en restreignant de nouveau S , on peut donc supposer que l'on a aussi $\mathcal{I}_i^m \mathcal{F}_i = 0$ (8.5.2.5), donc que le support de \mathcal{F}_i est contenu dans Z_i ; mais comme il est fermé et contient x_i , il est nécessairement égal à Z_i .

Proposition (9.8.3). — *Sous les conditions de (9.8.2), pour tout $s \in S$, et tout $i \in I$, désignons par $x_{i\alpha}$ ($\alpha \in J_{s,i}$) les points maximaux de $(Z_i)_s$. Il existe un voisinage U de η dans S tel que, pour tout $s \in U$, les $x_{i\alpha}$ (pour $i \in I$ et, pour chaque i , $\alpha \in J_{s,i}$) soient deux à deux distincts et que $\text{Ass}(\mathcal{F}_s)$ soit l'ensemble des $x_{i\alpha}$ (autrement dit, les cycles premiers associés à \mathcal{F}_s sont les composantes irréductibles des $(Z_i)_s$). En outre, on peut prendre U tel que, pour que l'adhérence de $\{x_{i\alpha}\}$ dans X_s soit un cycle premier associé maximal de \mathcal{F}_s , il faut et il suffit que $(Z_i)_\eta$ (adhérence de $\{x_i\}$ dans X_η) soit un cycle premier associé maximal de \mathcal{F}_η .*

Il résulte de (3.1.3, c')) que pour chaque i , il existe un ouvert W_i dans X_η tel que $W_i \cap (Z_i)_\eta$ soit non vide, et un \mathcal{O}_{X_η} -Module cohérent \mathcal{H}_i , de support $W_i \cap (Z_i)_\eta$, tels qu'il y ait un homomorphisme injectif $v_i : \mathcal{H}_i \rightarrow \mathcal{F}_\eta|_{W_i}$. Soit V_i un ouvert de X tel que $V_i \cap X_\eta = W_i$; appliquant, comme dans (9.8.2), les résultats de (8.5.2) et (8.5.8), on peut (en restreignant S) supposer qu'il existe un Module cohérent \mathcal{F}'_i , de support $V_i \cap Z_i$ et un homomorphisme $u_i : \mathcal{F}'_i \rightarrow \mathcal{F}|_{V_i}$ tels que $\mathcal{H}_i = (\mathcal{F}'_i)_\eta$ et $v_i = (u_i)_\eta$. Nous allons démontrer qu'il y a un voisinage U de η tel que pour $s \in U$, les propriétés suivantes soient vérifiées :

- (i) Les $(\mathcal{F}'_i)_s$ sont sans cycle premier associé immergé.
- (ii) L'homomorphisme $g_s : \mathcal{F}_s \rightarrow \bigoplus_i (\mathcal{F}'_i)_s$ est injectif.
- (iii) $(Z_i)_s \cap (V_i)_s$ est dense dans $(Z_i)_s$, $(\mathcal{F}'_i)_s$ a pour support $(Z_i)_s \cap (V_i)_s$ et $(u_i)_s : (\mathcal{F}'_i)_s \rightarrow \mathcal{F}_s|(V_i)_s$ est injectif.

(iv) Pour $i \neq j$, toute composante irréductible de $(Z_i)_s$ est distincte de toute composante irréductible de $(Z_j)_s$.

Or, (i) a déjà été vu (9.7.6); (ii) est un cas particulier de (9.4.5); (iii) résulte de même de (9.5.3) et (9.4.5). Enfin, si $i \neq j$, $(Z_i)_\eta \cap (Z_j)_\eta = (Z_i \cap Z_j)_\eta$ est rare dans $(Z_i)_\eta$ ou dans $(Z_j)_\eta$; supposons par exemple que $(Z_i \cap Z_j)_\eta$ soit rare dans $(Z_j)_\eta$; alors il résulte de (9.5.3) et (9.5.4) que pour s voisin de η , $(Z_i \cap Z_j)_s = (Z_i)_s \cap (Z_j)_s$ est rare dans $(Z_j)_s$, ce qui montre qu'aucune composante irréductible de $(Z_j)_s$ ne peut être contenue dans une composante irréductible de $(Z_i)_s$, ni *a fortiori* lui être égale.

Cela étant, il résulte de (ii) et de (3.1.7) que pour $s \in U$, on a

$$\text{Ass}(\mathcal{F}_s) \subset \bigcup_i \text{Ass}((\mathcal{F}_i)_s),$$

de (i) que $\text{Ass}((\mathcal{F}_i)_s)$ est l'ensemble des $x_{is\alpha}$ ($\alpha \in J_{s,i}$). D'autre part, en vertu de (iii) et du critère (3.1.3, c'), chacun des $x_{is\alpha}$ ($\alpha \in J_{s,i}$, $i \in I$) appartient à $\text{Ass}(\mathcal{F}_s)$. Enfin (iv) signifie que les $x_{is\alpha}$ sont deux à deux distincts.

Reste à prouver la dernière assertion de l'énoncé. Or, il résulte de (i) que pour s et pour un i donnés, aucun des ensembles $\overline{\{x_{is\alpha}\}}$ ne peut être contenu dans un autre pour $\alpha \in J_{s,i}$. D'autre part, si $(Z_j)_\eta \subset (Z_i)_\eta$, on peut supposer U pris tel que $(Z_j)_s \subset (Z_i)_s$ pour $s \in U$ (9.5.1), donc chaque $x_{js\beta}$ appartient à l'adhérence d'un $x_{is\alpha}$; au contraire, si $(Z_j)_\eta \cap (Z_i)_\eta$ est rare dans $(Z_j)_\eta$, on a vu en prouvant (iv) que $(Z_j)_s \cap (Z_i)_s$ est rare dans $(Z_j)_s$, donc aucun des $x_{js\beta}$ n'est adhérent à un $x_{is\alpha}$. En particulier, si $(Z_j)_\eta$ est maximal, ce qui équivaut à dire que $(Z_j)_\eta \cap (Z_i)_\eta$ est rare dans $(Z_j)_\eta$ pour *tout* $i \neq j$, on en conclut que $(Z_j)_s \cap (Z_i)_s$ est rare dans $(Z_j)_s$ pour tout $i \neq j$, donc que tout $x_{js\alpha}$ ($\alpha \in J_{s,j}$) est maximal. C.Q.F.D.

Corollaire (9.8.4). — *Les notations et hypothèses étant celles de (9.8.2), il existe un voisinage U de η dans S tel que, pour tout $s \in U$, chacun des $(\mathcal{F}_i)_s$ soit sans cycle premier associé immergé; en outre, si $(\mathcal{F}_{is\alpha})_{\alpha \in J_{s,i}}$ est l'unique décomposition irredondante réduite de $(\mathcal{F}_i)_s$, alors, pour tout $s \in U$, la famille $(\mathcal{F}_{is\alpha})_{i \in I, \alpha \in J_{s,i}}$ est une décomposition irredondante réduite de \mathcal{F}_s .*

La première assertion résulte de (9.8.1) et de la définition des \mathcal{F}_i . D'autre part, on a vu dans (9.8.3) que l'homomorphisme $\mathcal{F}_s \rightarrow \bigoplus_i (\mathcal{F}_i)_s$ est injectif et par définition il en est de même de chacun des homomorphismes $(\mathcal{F}_i)_s \rightarrow \bigoplus_\alpha \mathcal{F}_{is\alpha}$, donc l'homomorphisme $\mathcal{F}_s \rightarrow \bigoplus_{i,\alpha} \mathcal{F}_{is\alpha}$ est injectif. Comme on peut supposer (9.4.5) que pour $s \in U$ chacun des $(\mathcal{F}_i)_s$ est un quotient de \mathcal{F}_s , les $\mathcal{F}_{is\alpha}$ sont des quotients de \mathcal{F}_s , et il reste à vérifier (3.2.5) que les $x_{is\alpha}$ sont deux à deux distincts et appartiennent à $\text{Ass}(\mathcal{F}_s)$, ce qui a été prouvé dans (9.8.3).

Proposition (9.8.5). — *Soient $f: X \rightarrow S$ un morphisme de présentation finie, \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -Module quasi-cohérent de présentation finie. Pour tout $s \in S$, soit $E(s)$ (resp. $E'(s)$) l'ensemble fini (partie de $\mathbf{Z} \cup \{-\infty\}$) des dimensions des cycles premiers associés à \mathcal{F}_s (resp. des cycles premiers maximaux associés à \mathcal{F}_s , c'est-à-dire les composantes irréductibles de $\text{Supp}(\mathcal{F}_s)$). Alors les fonctions $s \mapsto E(s)$ et $s \mapsto E'(s)$ sont localement constructibles dans S .*

Il résulte de (4.2.7) et (4.2.8) que la condition (9.2.1, (i)) est satisfaite pour les propriétés dont nous voulons démontrer qu'elles sont constructibles. On est donc ramené au cas où S est affine, noethérien et intègre, et à prouver que E et E' sont constantes au voisinage du point générique η de S ; mais cela résulte de (9.8.3) et (9.5.5).

Proposition (9.8.6). — *Avec les hypothèses et notations de (9.8.2), soit $i \in I$ tel que $(Z_i)_\eta$ soit maximal (autrement dit, une composante irréductible de $\text{Supp}(\mathcal{F}_\eta)$). Alors, il existe un voisinage U de η dans S tel que pour tout $s \in U$ et tout $\alpha \in J_{s,i}$, la longueur géométrique de \mathcal{F}_s en $x_{i,\alpha}$ (relative à $\mathbf{k}(s)$) (4.7.5) est égale à la longueur géométrique de \mathcal{F}_η en x_i (relative à $\mathbf{k}(\eta)$).*

On peut évidemment se borner au cas où $S = \text{Spec}(A)$ est affine; montrons d'abord qu'on peut se ramener au cas où le sous-préschéma $(Z_i)_\eta$ de X_η , qui est réduit, est géométriquement intègre. Il y a en effet une extension finie K' de $K = \mathbf{k}(\eta)$ telle que $((Z_i)_\eta)_{(K')}$ soit géométriquement réduit et que les composantes irréductibles de $((Z_i)_\eta)_{(K')}$ soient géométriquement irréductibles (4.6.8). Procédons comme dans la démonstration de (9.7.7) en considérant une sous- A -algèbre A' de K' ayant K' pour corps des fractions et finie sur A . On pose $S' = \text{Spec}(A')$ et on considère le morphisme fini surjectif $g : S' \rightarrow S$; soient ensuite $X' = X_{(S')}$ et $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S'}$, et soit η' le point générique de S' . Pour tout $s' \in S'$, soit $s = g(s')$; si T est une composante irréductible de $\text{Supp}(\mathcal{F}_s)$, les composantes irréductibles T'_j de $T_{(\mathbf{k}(s'))}$ sont des composantes irréductibles de $\text{Supp}(\mathcal{F}'_{s'})$ et dominant T (4.2.7) et les multiplicités radicielles de T par rapport à \mathcal{F}_s et de chaque T'_j par rapport à $\mathcal{F}'_{s'}$ sont les mêmes (4.7.9). Le raisonnement de la première partie de (9.7.7) montre donc qu'on peut se borner à démontrer la proposition pour X' et \mathcal{F}' ; et en vertu du choix de K' , les sous-préschémas réduits ayant pour espaces sous-jacents les composantes irréductibles de $((Z_i)_\eta)_{(K')}$ sont géométriquement intègres (4.6.1).

Supposons donc désormais $(Z_i)_\eta$ géométriquement intègre; alors (9.7.7), il en est de même de $(Z_i)_s$ pour s voisin de η ; la définition (4.7.5) montre qu'il suffira donc de prouver que la longueur du $\mathcal{O}_{X_\eta, x_i}$ -module $(\mathcal{F}_\eta)_{x_i}$ est égale à celle du $\mathcal{O}_{X_s, x_{is}}$ -module $(\mathcal{F}_s)_{x_{is}}$ (on a ici supprimé l'indice α , inutile par hypothèse). La question étant évidemment locale sur X , on peut supposer (en se restreignant à un voisinage de x_i) que $\mathcal{F} = \mathcal{F}_i$, donc que \mathcal{F}_η est *irredondant* sur $X = \text{Spec}(B)$ affine, et on écrira Z au lieu de Z_i , et x pour le point générique de Z (et de Z_η). L'anneau noethérien B contient donc A comme sous-anneau, et $\mathcal{F} = \widetilde{M}$, où M est un B -module de type fini; en outre, si K est le corps des fractions de A , le $B_{(K)}$ -module $M_{(K)}$ est $\neq 0$ et *irredondant*. Soit \mathfrak{q} l'unique élément de $\text{Ass}(M_{(K)})$ et soit \mathfrak{p} l'idéal premier de B , image réciproque de \mathfrak{q} . En utilisant (5.11.1.1) comme dans la démonstration de (9.7.6), on se ramène au cas où B est *intègre* et M un sous-module $\neq 0$ de B ; alors \mathcal{F}_η est un sous- \mathcal{O}_{X_η} -Module non nul de \mathcal{O}_{Z_η} , et en vertu de (9.4.5), pour s voisin de η , \mathcal{F}_s est isomorphe à un sous- \mathcal{O}_{X_s} -Module non nul de \mathcal{O}_{Z_s} ; comme Z_s est géométriquement intègre, les longueurs de $(\mathcal{F}_\eta)_x$ et de $(\mathcal{F}_s)_{x_s}$ sont toutes deux égales à 1, ce qui achève la démonstration.

Corollaire (9.8.7). — Soient $f: X \rightarrow S$ un morphisme de présentation finie, \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -Module quasi-cohérent de présentation finie. Pour tout $s \in S$, soit $M(s)$ l'ensemble des couples (d, m) tels qu'il existe une composante irréductible de $\text{Supp}(\mathcal{F}_s)$ de dimension d et de multiplicité radicielle m pour \mathcal{F}_s (4.7.8). Alors la fonction $s \mapsto M(s)$ est localement constructible dans S .

Il résulte de (4.2.7) et (4.7.9) que la condition (9.2.1, (i)) est satisfaite pour la propriété dont nous voulons démontrer qu'elle est constructible. On est donc ramené au cas où S est affine, noethérien et intègre et à prouver que M est constante dans un voisinage du point générique de S ; mais alors la proposition résulte de (9.8.3) et (9.8.6).

Proposition (9.8.8). — Soient $f: X \rightarrow S$ un morphisme de présentation finie, \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -Module quasi-cohérent de présentation finie. Pour tout $s \in S$, soit $l(s)$ la somme des multiplicités totales pour \mathcal{F}_s (relatives à $\mathfrak{k}(s)$) des points génériques des composantes irréductibles de $\text{Supp}(\mathcal{F}_s)$ (4.7.12). Alors la fonction $s \mapsto l(s)$ est localement constructible dans S .

Compte tenu de (4.7.12), la condition (9.2.1, (i)) est satisfaite pour la propriété dont nous voulons démontrer qu'elle est constructible, et on est donc ramené au cas où S est affine, noethérien et intègre de point générique η , et à montrer que l est constante dans un voisinage de η . Utilisant les notations de (9.8.2), cela résulte de la définition (4.7.12), du fait que le nombre géométrique des composantes irréductibles de chaque $(Z_i)_s$ est constant dans un voisinage de η (9.7.8), que la longueur géométrique de \mathcal{F}_s en $x_{i\alpha}$ est également à celle de \mathcal{F}_η en x_i pour chaque i tel que $(Z_i)_\eta$ soit maximal (9.8.6) et enfin de ce que l'adhérence de $\{x_{i\alpha}\}$ est un cycle premier associé maximal de \mathcal{F}_s si et seulement si $(Z_i)_\eta$ est un cycle premier associé maximal de \mathcal{F}_η (9.8.3).

Remarque (9.8.9). — On peut préciser de diverses façons les propositions précédentes; bornons-nous à un énoncé à titre d'exemple. Disons qu'une partie finie P d'un k -préschéma algébrique X est saturée si, pour tout couple de points x, y de P , les points génériques des composantes irréductibles de $\overline{\{x\}} \cap \overline{\{y\}}$ appartiennent aussi à P ; pour toute partie finie Q de X , il existe une plus petite partie finie P de X contenant Q et saturée; nous dirons que P est le saturé de Q . Pour tout \mathcal{O}_X -Module cohérent \mathcal{F} , nous appellerons squelette primaire de \mathcal{F} le système (P, Q, ω, d, m) où $Q = \text{Ass}(\mathcal{F})$, P est le saturé de Q , ω la relation d'ordre $\overline{\{x\}} \subset \overline{\{y\}}$ sur P , d la fonction $x \mapsto \dim \overline{\{x\}}$ sur P , m la fonction $x \mapsto \text{long}_{\mathcal{O}_x} \mathcal{F}_x$ définie sur l'ensemble des éléments de Q maximaux pour la relation ω . Appelons d'autre part squelette virtuel tout système (P, Q, ω, d, m) , où P est un ensemble, Q une partie de P , ω une relation d'ordre sur P , d une application de P dans \mathbf{N} , m une application dans \mathbf{N} de l'ensemble des éléments maximaux de Q ; on définit de façon évidente la notion d'isomorphisme de deux squelettes virtuels. Enfin, avec les notations précédentes, appelons type primaire de \mathcal{F} la classe (pour la relation d'isomorphisme des squelettes virtuels) du squelette primaire de \mathcal{F} . Il résulte de (4.2.6), (4.2.7), (4.2.8), (4.5.1) et (4.7.9) que si, pour une extension algébriquement close k' de k , on pose $X' = X \otimes_k k'$ et $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \otimes_k k'$, le type primaire de \mathcal{F}' est indépendant de

l'extension algébriquement close k' de k considérée; nous dirons que c'est le *type primaire géométrique* de \mathcal{F} . Ces définitions posées, l'énoncé que nous avons en vue est le suivant :

(9.8.9.1) Soient $f : X \rightarrow S$ un morphisme de présentation finie, \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -Module quasi-cohérent de présentation finie. Pour tout $s \in S$, soit $T(s)$ le type primaire géométrique de \mathcal{F}_s . Alors la fonction $s \mapsto T(s)$ est localement constructible dans S .

Compte tenu des remarques qui précèdent, on est ramené comme d'ordinaire à prouver que si S est affine, noethérien et intègre de point générique η , $T(s)$ est constante au voisinage de η . Raisonnant comme au début de (9.7.7), on peut supposer que toutes les parties irréductibles de X_η qui interviennent sont géométriquement irréductibles, et alors la proposition résulte de (9.5.1), (9.5.5), (9.8.3) et (9.8.6); nous laissons les détails au lecteur. On pourrait généraliser en considérant plusieurs Modules cohérents et en définissant leur « squelette primaire simultané », etc. La conclusion générale de ce qui a été vu depuis le début de ce paragraphe est que pour toutes les propriétés du type envisagé (et pour un S irréductible) les propriétés valables sur la « fibre générique » le sont encore sur toutes les fibres voisines.

9.9. Constructibilité des propriétés locales des fibres.

Proposition (9.9.1). — Soient $f : X \rightarrow S$ un morphisme localement de présentation finie, Z une partie localement constructible de X telle que pour tout $s \in S$, Z_s soit fermé dans X_s , Φ une partie finie de $\mathbf{Z} \cup \{\pm\infty\}$. Alors les parties suivantes de X sont localement constructibles :

- (i) L'ensemble des $x \in X$ tels que $\dim_x(Z_{f(x)})$ appartienne à Φ .
- (ii) L'ensemble des $x \in X$ tels que $\text{codim}_x(Z_{f(x)}, X_{f(x)})$ appartienne à Φ .
- (iii) L'ensemble des $x \in X$ tels que l'anneau local $\mathcal{O}_{X, f(x), x}$ soit équidimensionnel.

On notera que les propriétés (i) et (ii) s'expriment encore en disant que les fonctions $x \mapsto \dim_x(Z_{f(x)})$ et $x \mapsto \text{codim}_x(Z_{f(x)}, X_{f(x)})$ sont localement constructibles dans X (**0**_{III}, 9.3.1).

Les questions étant locales sur X , on peut se borner au cas où $S = \text{Spec}(A)$ et $X = \text{Spec}(B)$ sont affines et où f est un morphisme de présentation finie; il existe alors un sous-anneau A_0 de A qui est une \mathbf{Z} -algèbre de type fini, un A_0 -préschéma de type fini X_0 et une partie constructible Z_0 de X_0 tels que $X = X_0 \otimes_{A_0} A$ et $Z = h^{-1}(Z_0)$, où $h : X \rightarrow X_0$ est la projection canonique ((8.9.1) et (8.3.11)). En outre, pour tout $s \in S$, si s_0 est la projection de s dans $S_0 = \text{Spec}(A_0)$, on a $X_s = (X_0)_{s_0} \otimes_{k(s_0)} k(s)$, et h_s est la projection $X_s \rightarrow (X_0)_{s_0}$, on a $Z_s = h_s^{-1}((Z_0)_{s_0})$. Comme le morphisme h_s est fidèlement plat et quasi-compact, l'hypothèse que Z_s est fermé dans X_s entraîne que $(Z_0)_{s_0}$ est fermé dans $(X_0)_{s_0}$ (2.3.12).

Cela étant, la transitivité des fibres (**I**, 3.6.4) et la prop. (4.2.7) entraînent que l'ensemble des dimensions des composantes irréductibles de Z_s contenant x est le même que l'ensemble des dimensions des composantes irréductibles de $(Z_0)_{s_0}$ contenant $x_0 = h_s(x)$. En particulier, on a $\dim_x(Z_s) = \dim_{x_0}((Z_0)_{s_0})$. D'autre part, si $Z_s^{(\beta)}$ sont les composantes irréductibles de Z_s contenant x et $X_s^{(\alpha)}$ les composantes irréductibles de X_s ,

contenant x , on a $\text{codim}_x(Z_s, X_s) = \inf_{\beta}(\sup_{\alpha}(\text{codim}(Z_s^{(\beta)}, X_s^{(\alpha)})))$, (α, β) variant dans l'ensemble des couples tels que $x \in Z_s^{(\beta)} \subset X_s^{(\alpha)}$ (0, 14.2.6). Comme les préschémas algébriques irréductibles sont biéquidimensionnels (5.2.1), on peut écrire, en vertu de (0, 14.3.3.1)

$$(9.9.1.1) \quad \text{codim}_x(Z_s, X_s) = \inf_{\beta}(\sup_{\alpha}(\text{dim}(X_s^{(\alpha)}) - \text{dim}(Z_s^{(\beta)})))$$

avec le même choix des couples (α, β) . Comme h_s est fidèlement plat et quasi-compact, pour tout couple formé d'une composante irréductible $(X_0)_{s_0}^{(\lambda)}$ de $(X_0)_{s_0}$ contenant x_0 et d'une composante irréductible $(Z_0)_{s_0}^{(\mu)}$ de $(Z_0)_{s_0}$ contenant x_0 et contenue dans $(X_0)_{s_0}^{(\lambda)}$, il existe un couple $(X_s^{(\alpha)}, Z_s^{(\beta)})$ du type décrit plus haut et tel que $Z_s^{(\beta)}$ domine $(Z_0)_{s_0}^{(\mu)}$ et que $X_s^{(\alpha)}$ domine $(X_0)_{s_0}^{(\lambda)}$ (2.3.5). La formule (9.9.1.1) (et la formule analogue appliquée à $(X_0)_{s_0}$) montrent alors, en vertu de (4.2.7), que l'on a

$$\text{codim}_x(Z_s, X_s) = \text{codim}_{x_0}((Z_0)_{s_0}, (X_0)_{s_0}).$$

On voit ainsi que si E (resp. E_0) est l'ensemble des $x \in X$ (resp. des $x_0 \in X_0$) vérifiant l'une des conditions (i), (ii), (iii) de l'énoncé (resp. la même condition), on a $E = h^{-1}(E_0)$, et en vertu de (1.8.2), on voit qu'on peut se borner au cas où A est *noethérien*, donc aussi B . Compte tenu de (0_{III}, 9.2.3), ainsi que de (9.9.1.1), on est ramené à voir que pour tout $x \in X$, il y a un voisinage V de x dans $\overline{\{x\}}$ tel que, pour tout $x' \in V$, l'ensemble des dimensions des composantes irréductibles de $X_{f(x')}$ (resp. $Z_{f(x')}$) contenant x' est *le même*, et en outre qu'il en est de même de l'ensemble des couples $(\text{dim}(Z_{f(x')}^{(\beta)}), \text{dim}(X_{f(x')}^{(\alpha)}))$ pour les couples formés d'une composante irréductible $X_{f(x')}^{(\alpha)}$ de $X_{f(x')}$ et d'une composante irréductible $Z_{f(x')}^{(\beta)}$ de $Z_{f(x')}$ contenue dans $X_{f(x')}^{(\alpha)}$ et contenant x' . On peut évidemment pour cela remplacer S par le sous-préschéma réduit S' de S ayant $\overline{\{f(x)\}}$ pour espace sous-jacent, et X par $X' = f^{-1}(S')$, les fibres de X et X' aux points de S' étant les mêmes. Autrement dit, on peut se borner au cas où S est *intègre* et où $\eta = f(x)$ est son point générique.

Par hypothèse Z_η est fermé dans X_η ; comme Z est constructible, il résulte de (8.3.11), appliqué suivant la méthode de (8.1.2, a)), que l'on peut, en remplaçant au besoin S par un voisinage ouvert de η , supposer que Z est *fermé* dans X . Soient X (resp. Z) les composantes irréductibles de X (resp. Z) contenant x ; en vertu de (0_I, 2.1.8), les $X_i \cap X_\eta$ (resp. $Z_j \cap X_\eta$) sont les composantes irréductibles de X_η (resp. Z_η) contenant x ; en vertu de (9.5.1), on peut supposer en outre, en restreignant au besoin S à un voisinage de η , que les X_i (resp. Z_j) sont exactement les composantes irréductibles de X (resp. Z) rencontrant $\overline{\{x\}}$ et que les $(X_i)_s \cap \overline{\{x\}}$ et $(Z_j)_s \cap \overline{\{x\}}$ sont non vides pour tout $s \in S$. Cela étant, il résulte encore de (9.7.1) que l'on peut supposer, en restreignant S , que les couples (i, j) tels que $(Z_j)_s \subset (X_i)_s$ sont les mêmes pour tout $s \in S$. La conclusion résulte alors de (9.5.6) : pour tout s assez voisin de η , toutes les composantes irréductibles de $(X_i)_s$ (resp. $(Z_j)_s$) ont une même dimension égale à celle de $(X_i)_\eta$ (resp. $(Z_j)_\eta$). En outre, si (i, j) est un couple tel que $Z_j \not\subset X_i$, $(X_i)_\eta$ ne contient pas le

point générique de $(Z_j)_\eta$, donc $\dim((X_i \cap Z_j)_\eta) < \dim((Z_j)_\eta)$; par suite, la dimension commune des composantes irréductibles de $(X_i)_s \cap (Z_j)_s$ est, pour tout $s \in S$, strictement inférieure à la dimension commune des composantes irréductibles de $(Z_j)_s$, ce qui prouve qu'aucune des composantes irréductibles de $(Z_j)_s$ n'est contenue dans une composante irréductible de $(X_i)_s$ pour $s \in S$. C.Q.F.D.

Proposition (9.9.2). — Soient $f: X \rightarrow S$ un morphisme localement de présentation finie, \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -Module quasi-cohérent de présentation finie, Φ une partie finie de $\mathbf{Z} \cup \{\pm\infty\}$. Les parties suivantes de X sont localement constructibles :

- (i) L'ensemble des points $x \in X$ tels que $\mathcal{F}_{f(x)}$ soit équidimensionnel au point x (5.1.12).
- (ii) L'ensemble des $x \in X$ tels que les longueurs géométriques de $\mathcal{F}_{f(x)}$ relatives à $\mathbf{k}(f(x))$, aux points génériques des composantes irréductibles de $\text{Supp}(\mathcal{F}_{f(x)})$ contenant x (4.7.5), appartiennent à Φ .
- (iii) L'ensemble des $x \in X$ tels que les dimensions des cycles premiers associés à $\mathcal{F}_{f(x)}$ et contenant x appartiennent à Φ .
- (iv) L'ensemble des $x \in X$ tels que $\mathcal{F}_{f(x)}$ soit géométriquement réduit au point x (4.6.17).
- (v) L'ensemble des $x \in X$ tels que $\mathcal{F}_{f(x)}$ soit géométriquement intègre au point x (4.6.22).
- (vi) L'ensemble des $x \in X$ tels que $\dim.\text{proj}((\mathcal{F}_{f(x)})_x) \in \Phi$.
- (vii) L'ensemble des $x \in X$ tels que $\text{coprof}((\mathcal{F}_{f(x)})_x) \in \Phi$.
- (viii) L'ensemble des $x \in X$ tels que $\mathcal{F}_{f(x)}$ possède la propriété (S_k) au point x (5.7.2).
- (ix) L'ensemble des $x \in X$ tels que $\mathcal{F}_{f(x)}$ soit un $\mathcal{O}_{X_{f(x)}}$ -Module de Cohen-Macaulay au point x (5.7.1).

(i) Le support Z de \mathcal{F} est localement constructible et fermé dans X (8.9.1), et en considérant un sous-préschéma de X ayant Z pour espace sous-jacent et qui soit de présentation finie sur S (8.9.1), on voit que l'assertion (i) est un cas particulier de (9.9.1, (iii)).

(ii) Toutes les propriétés envisagées sont locales sur X , et on se bornera donc au cas où $X = \text{Spec}(B)$ et $S = \text{Spec}(A)$ sont affines et f un morphisme de présentation finie. On garde les notations du début de la démonstration de (9.9.1), et on suppose en outre A_0 choisi de sorte qu'il existe un \mathcal{O}_{X_0} -Module cohérent \mathcal{F}_0 tel que \mathcal{F} soit isomorphe à $\mathcal{F}_0 \otimes_{A_0} A$. Alors ((4.2.7) et (4.7.9)) l'ensemble des longueurs géométriques de $(\mathcal{F}_0)_{f(x_0)}$ aux points génériques des composantes irréductibles de $\text{Supp}((\mathcal{F}_0)_{f(x_0)})$ qui contiennent x_0 est le même que l'ensemble analogue pour x et $\mathcal{F}_{f(x)}$; autrement dit, si E (resp. E_0) est l'ensemble des $x \in X$ (resp. des $x_0 \in X_0$) vérifiant la condition (ii) de l'énoncé, on a $E = h^{-1}(E_0)$, et en vertu de (1.8.2), on voit qu'on peut se borner à considérer le cas où A est *noethérien*. Comme dans la démonstration de (9.9.1), on voit qu'on est ramené à montrer que, pour tout $x \in X$, il existe un voisinage V de x dans $\overline{\{x\}}$ tel que, pour tout $x' \in V$, l'ensemble des longueurs géométriques de $\mathcal{F}_{f(x')}$ aux points génériques des composantes irréductibles de son support contenant x' soit *le même*. En outre, si S' est le sous-préschéma réduit de S ayant $\overline{\{f(x)\}}$ pour espace sous-jacent, et si $X' = f^{-1}(S')$, les fibres de X et de X' aux points de S' sont les mêmes,

donc on peut remplacer S par S' et X par X' , autrement dit supposer que S est *intègre* et que $\eta = f(x)$ est son point générique.

Or, si l'on pose $Z = \text{Supp}(\mathcal{F})$, le même raisonnement que dans la démonstration de (9.9.1) montre que, si Z_i sont les composantes irréductibles de Z contenant x , on peut supposer que ce sont exactement les composantes irréductibles de Z rencontrant $\overline{\{x\}}$ et que $(Z_i)_s \cap \overline{\{x\}} \neq \emptyset$ pour tout $s \in S$. La conclusion résulte alors de (9.8.3) et (9.8.6).

(iii) On se ramène comme dans (ii) au cas où S est noethérien et intègre et $\eta = f(x)$ son point générique, en utilisant (4.2.7). Comme dans la démonstration de (9.9.1), on est ramené à montrer qu'il existe un voisinage V de x dans $\overline{\{x\}}$ tel que, pour tout $x' \in V$, l'ensemble des dimensions des cycles premiers associés à $\mathcal{F}_{f(x')}$ qui contiennent x' soit *le même*. Or, si Z'_i sont les adhérences dans X des cycles premiers associés à \mathcal{F}_η qui contiennent x (cf. (9.8.2)), il résulte de (9.8.3) et (9.5.1) que pour tout s assez voisin de η , les cycles premiers associés à \mathcal{F}_s qui rencontrent $\overline{\{x\}}$ sont des composantes irréductibles des $(Z'_i)_s$ et, en vertu de (9.5.6), toutes ces composantes irréductibles ont même dimension égale à $\dim((Z'_i)_\eta)$, d'où la conclusion.

(iv) On raisonne comme dans (iii), en utilisant cette fois (4.7.11). Avec les mêmes notations que dans (iii), les cycles premiers associés à \mathcal{F}_s qui sont des composantes irréductibles de $(Z'_i)_s$ sont immergés si et seulement si $(Z'_i)_\eta$ est un cycle premier associé immergé de \mathcal{F}_η . On conclut déjà que si x appartient à un (resp. n'appartient à aucun) cycle premier associé immergé de \mathcal{F}_η , l'ensemble des $x' \in \overline{\{x\}}$ tels que x' appartienne à un (resp. n'appartienne à aucun) cycle premier associé immergé de $\mathcal{F}_{f(x')}$ est un voisinage de x dans $\overline{\{x\}}$. La conclusion résulte de cette remarque, de la caractérisation des points où un Module est géométriquement réduit (4.7.10), et de (ii).

(v) Compte tenu de (4.7.11), on se ramène encore au cas où S est noethérien et intègre et où $\eta = f(x)$ est son point générique. Soit Y un sous-préschéma fermé de X ayant $\text{Supp}(\mathcal{F})$ pour espace sous-jacent. Raisonnant comme au début de la démonstration de (9.7.7), on voit qu'il existe une A -algèbre intègre finie A' (de sorte que si $S' = \text{Spec}(A')$, le morphisme $S' \rightarrow S$ est fini et surjectif) telle que si $Y' = Y_{(S')}$ et si η' est le point générique de S' , les composantes irréductibles de $Y'_{\eta'}$ soient *géométriquement irréductibles*. D'autre part, si $X' = X_{(S')}$, le morphisme projection $h : X' \rightarrow X$ est fini et surjectif, donc fermé; par suite, si x' est un point de X' au-dessus de x , on a $h(\overline{\{x'\}}) = \overline{\{x\}}$ et l'image par h d'un voisinage de x' dans $\overline{\{x'\}}$ est un voisinage de x dans $\overline{\{x\}}$. Compte tenu de (4.7.11) et posant $\mathcal{F}' = \mathcal{F}_{(S')}$, on est donc ramené à prouver que si $\mathcal{F}'_{\eta'}$ est (resp. n'est pas) géométriquement intègre au point x' , l'ensemble des $y' \in \overline{\{x'\}}$ tels que $\mathcal{F}'_{f'(y')}$ (où $f' = f_{(S')} : X' \rightarrow S'$) soit (resp. ne soit pas) géométriquement intègre au point y' est un voisinage de x' dans $\overline{\{x'\}}$. On peut donc se borner au cas où $X' = X$ et où les composantes irréductibles de Y_η sont *géométriquement irréductibles*; si l'on désigne par Z_i des parties fermées de X telles que les $Z_i \cap X_\eta$ soient les

composantes irréductibles de Y_η , il résulte de (9.7.7), (9.7.8) et (9.5.3) que pour tout s voisin de η , les $(Z_i)_s$ sont les composantes irréductibles de Y_s et qu'elles sont *géométriquement irréductibles*. Dire qu'en un point $y \in X_s$, \mathcal{F}_s est géométriquement intègre signifie alors que \mathcal{F}_s est géométriquement réduit en ce point et en outre que y n'appartient qu'à *un seul* des $(Z_i)_s$ (4.6.22). La conclusion résulte donc d'une part de (iv) et d'autre part de (9.5.1) appliqué à l'intersection de $\overline{\{x\}}$ et de chaque Z_i .

(vi) Gardant les mêmes notations que dans (ii), il résulte de (6.2.1) que l'on a $\dim.\text{proj}((\mathcal{F}_s)_x) = \dim.\text{proj}((\mathcal{F}_0)_{s_0})_x$; on peut donc encore se borner au cas où A est *noethérien*. En outre, on se ramène encore à montrer que, pour tout $x \in X$, il existe un voisinage V de x dans $\overline{\{x\}}$ tel que, pour tout $x' \in V$, on ait $\dim.\text{proj}((\mathcal{F}_{f(x')})_{x'}) = \dim.\text{proj}((\mathcal{F}_{f(x)})_x)$; et comme ci-dessus, on peut supposer que S est *intègre* et que $\eta = f(x)$ est son point générique, de sorte que l'on a $(\mathcal{F}_\eta)_x = \mathcal{F}_x$. En vertu du théorème de platitude générique (6.9.1), on peut, en remplaçant au besoin S par un voisinage ouvert de η , supposer que le morphisme f est *plat* et que \mathcal{F} est *f-plat*; on a alors $\dim.\text{proj}((\mathcal{F}_{f(x')})_{x'}) = \dim.\text{proj}(\mathcal{F}_{x'})$ pour *tout* $x' \in X$ en vertu de (6.2.3). Cela étant, en vertu de (6.11.1), on peut (en remplaçant au besoin X par un voisinage ouvert de x) supposer que $\dim.\text{proj}(\mathcal{F}_x) \leq \dim.\text{proj}(\mathcal{F}_x)$ pour *tout* $x' \in X$. D'autre part, si $\dim.\text{proj}(\mathcal{F}_x) = n$, il y a par hypothèse un \mathcal{O}_x -module de type fini M tel que $\text{Ext}_{\mathcal{O}_x}^n(\mathcal{F}_x, M) \neq 0$ (0, 17.2.4). Or, il existe un \mathcal{O}_X -Module cohérent \mathcal{G} tel que $M = \mathcal{G}_x$ (en remplaçant au besoin X par un voisinage ouvert de x (0_I, 5.3.8)); en vertu de (T, 4.2.2), on a donc $(\text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^n(\mathcal{F}, \mathcal{G}))_x \neq 0$. Mais $\text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^n(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ est un \mathcal{O}_X -Module cohérent (0_{III}, 12.3.3), donc son support Y est fermé (0_I, 5.2.2); comme il contient x , il contient aussi $\overline{\{x\}}$, d'où l'on conclut (en appliquant encore (T, 4.2.2)) que l'on a $\dim.\text{proj}(\mathcal{F}_{x'}) \geq n$ pour tout $x' \in \overline{\{x\}}$, ce qui achève de prouver l'assertion dans le cas (vi).

(vii) Comme B est une A -algèbre de type fini, X est S -isomorphe à un *sous-schéma fermé* d'un S -schéma de la forme $Y = \text{Spec}(A[T_1, \dots, T_r])$; si $j : X \rightarrow Y$ est l'injection canonique, et $\mathcal{G} = j_*(\mathcal{F})$, on a $\mathcal{G}_s = (j_s)_*(\mathcal{F}_s)$ pour tout $s \in S$, et, en vertu de (0, 16.4.11), on peut se borner à démontrer l'assertion pour Y et \mathcal{G} . Autrement dit, on peut supposer que $B = A[T_1, \dots, T_r]$, de sorte que chacun des schémas $X_s = \text{Spec}(k(s)[T_1, \dots, T_r])$ est *régulier* (0, 17.3.7). Soit alors $W = \text{Supp}(\mathcal{F})$, de sorte que $W_s = \text{Supp}(\mathcal{F}_s)$ (I, 9.1.13); on a, par (6.11.2.1)

$$(9.9.2.1) \quad \text{coprof}((\mathcal{F}_{f(x)})_x) = \dim.\text{proj}((\mathcal{F}_{f(x)})_x) - \text{codim}_x(W_{f(x)}, X_{f(x)}).$$

Mais comme W est constructible (8.9.1) et chaque W_s fermé, il résulte de (vi) et de (9.9.1, (ii)) que les deux fonctions du second membre de (9.9.2.1) sont constructibles; il en est donc de même de leur différence ce qui achève de prouver la proposition dans le cas (vii).

(viii) Soit U_n l'ensemble des $x \in X$ tels que $\text{coprof}((\mathcal{F}_{f(x)})_x) \leq n$, et posons $Z_n = X - U_n$; il résulte de (vii) que les Z_n sont *constructibles*; en outre, comme la fonc-

tion $x \mapsto \dim_x(W_{f(x)})$ est constructible en vertu de (9.9.1, (i)), elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs, donc les nombres $\dim(W_{f(x)})$ ont une borne supérieure finie m lorsque x parcourt X ; comme $\text{coprof}((\mathcal{F}_{f(x)})_x) \leq \dim((\mathcal{F}_{f(x)})_x) \leq \dim(W_{f(x)})$, on voit que l'on a $Z_n = \emptyset$ pour $n \geq m$. Enfin, il résulte de (6.11.2, (i)) que pour tout n et tout $s \in S$, $(Z_n)_s$ est fermé dans X_s . D'après (5.7.4), l'ensemble des $x \in X$ où $(\mathcal{F}_{f(x)})_x$ possède la propriété (S_k) est l'ensemble des $x \in X$ vérifiant toutes les relations

$$(9.9.2.2) \quad \text{codim}_x((Z_n)_{f(x)}, W_{f(x)}) > n + k$$

pour tout $n \geq 0$; comme cette relation est automatiquement vérifiée pour $n \geq m$, on n'a à considérer les relations (9.9.2.2) que pour $0 \leq n < m$. Mais en vertu de (9.9.1, (ii)), l'ensemble $V_{n,k}$ des x vérifiant (9.9.2.2) est constructible, et il en est de même de l'intersection de ces ensembles pour $0 \leq n < m$.

(ix) L'assertion résulte ici aussitôt de (vii), l'ensemble des $x \in X$ où $(\mathcal{F}_{f(x)})_x$ est un module de Cohen-Macaulay étant défini par la relation $\text{coprof}((\mathcal{F}_{f(x)})_x) = 0$.

Corollaire (9.9.3). — Soient $f: X \rightarrow S$ un morphisme de présentation finie, \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -Module de présentation finie, P l'une des propriétés (i) à (ix) de (9.9.2). Alors l'ensemble des $s \in S$ tels que la propriété P soit vraie en tous les points $x \in X_s$, est localement constructible dans S .

En effet, son complémentaire est l'image par f du complémentaire de l'ensemble E des points où P est vraie. Comme E est localement constructible dans X , il en est de même de $X - E$, donc $f(X - E)$ est localement constructible dans S en vertu du théorème de Chevalley (1.8.4).

Proposition (9.9.4). — Soit $f: X \rightarrow S$ un morphisme localement de présentation finie. L'ensemble des $x \in X$ tels que $X_{f(x)}$ ait au point x l'une (déterminée) des propriétés suivantes :

- (i) être géométriquement régulier ;
- (ii) posséder la propriété (R_k) géométrique ;
- (iii) être géométriquement normal ;
- (iv) être géométriquement réduit (i.e. séparable) ;
- (v) être géométriquement ponctuellement intègre ;

est une partie localement constructible de X .

Pour les propriétés (iv) et (v), cela résulte de (9.9.2, (iv) et (v)) appliqué à $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$. Pour les autres propriétés, compte tenu de (6.7.8), on se ramène, comme au début de (9.9.2) au cas où S est noethérien et intègre et de point générique $\eta = f(x)$. En outre, en vertu du théorème de platitude générique (6.9.1), on peut, en remplaçant S par un voisinage ouvert de η , supposer que f est un morphisme *plat*. Dire que $X_{f(y)}$ est géométriquement régulier au point y signifie alors que f est *régulier* au point y (6.8.1), et on sait que l'ensemble L de ces points est *ouvert* dans X (6.8.7), ce qui prouve la proposition dans le cas (i).

Pour prouver le cas (ii), posons $F = X - L$, qui est *fermé* dans X . Dire que X_s

vérifie la propriété géométrique (R_k) au point $y \in f^{-1}(s)$ signifie, ou bien que l'on a $y \in L$, ou bien que les points génériques z_i des composantes irréductibles de l'ensemble fermé F_s qui contiennent y vérifient la relation $\dim(\mathcal{O}_{X_s, z_i}) \geq k+1$ (compte tenu de (4.2.7) et (5.2.3)); autrement dit, les points $y \in F_s$ où X_s vérifie la propriété (R_k) géométrique sont ceux tels que $\text{codim}_y(F_s, X_s) \geq k+1$ (5.1.2). La conclusion résulte donc de (i) et de (9.9.1, (ii)).

Enfin, dans le cas (iii), la conclusion résulte de (ii), de (9.9.2, (viii)), du fait que la propriété (S_k) est stable par extension du corps de base (6.7.1) et enfin du critère de Serre (5.8.6).

Corollaire (9.9.5). — Soit $f: X \rightarrow S$ un morphisme de présentation finie, et notons \mathbf{P} l'une des propriétés (i) à (v) de (9.9.4). Alors l'ensemble des $s \in S$ tels que la propriété \mathbf{P} soit vraie en tous les points $x \in X_s$, est localement constructible dans S .

La démonstration à partir de (9.9.4) est la même que celle de (9.9.3) à partir de (9.9.2).

Proposition (9.9.6). — Soient $f: X \rightarrow S$ un morphisme localement de présentation finie, $\mathcal{L}.$ un complexe formé de \mathcal{O}_X -Modules quasi-cohérents de présentation finie; pour tout $s \in S$, soit $(\mathcal{L}.)_s$ le complexe $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathbf{k}(s)$ de \mathcal{O}_{X_s} -Modules cohérents de type fini. Alors, pour un entier n donné, l'ensemble des $x \in X$ tels que $(\mathcal{H}_n((\mathcal{L}.)_{f(x)}))_x = 0$ est localement constructible dans X .

On peut se borner au cas où $\mathcal{L}_i = 0$ sauf pour $i = 0, 1$ ou 2 , et où $n = 1$. En outre, la question étant locale sur X , on peut se borner au cas où $S = \text{Spec}(A)$ et $X = \text{Spec}(B)$ sont affines, B étant une A -algèbre de présentation finie. Il existe alors un sous-anneau noethérien A_0 de A , un A_0 -préschéma de type fini X_0 et un complexe $\mathcal{L}^{(0)}$ de \mathcal{O}_{X_0} -Modules cohérents, nuls sauf en dimensions 0, 1 et 2 et tels que $X = X_0 \otimes_{A_0} A$ et $\mathcal{L} = \mathcal{L}^{(0)} \otimes_{A_0} A$. Pour tout $s \in S$, si s_0 est la projection de s dans $S_0 = \text{Spec}(A_0)$, on a $X_s = (X_0)_{s_0} \otimes_{\mathbf{k}(s_0)} \mathbf{k}(s)$, et le morphisme projection $X_s \rightarrow (X_0)_{s_0}$ est fidèlement plat; on en conclut que l'on a $\mathcal{H}_n((\mathcal{L}.)_s) = \mathcal{H}_n((\mathcal{L}^{(0)})_{s_0}) \otimes_{\mathbf{k}(s_0)} \mathbf{k}(s)$, et par suite, si E (resp. E_0) est l'ensemble des $x \in X$ (resp. $x_0 \in X_0$) tels que $(\mathcal{H}_n((\mathcal{L}.)_{f(x)}))_x = 0$ (resp. $(\mathcal{H}_n((\mathcal{L}^{(0)})_{f_0(x_0)}))_{x_0} = 0$), on a $E = h^{-1}(E_0)$, où $h: X \rightarrow X_0$ est la projection canonique. En vertu de (1.8.2), on peut donc se borner au cas où A est noethérien; il s'agit de voir (0_{III}, 9.2.3) que si $x \in X$ est tel que $(\mathcal{H}_n((\mathcal{L}.)_{f(x)}))_x = 0$ (resp. $\neq 0$), il existe un voisinage ouvert V de x dans $\overline{\{x\}}$ tel que, pour tout $x' \in V$, on ait $(\mathcal{H}_n((\mathcal{L}.)_{f(x')}))_{x'} = 0$ (resp. $\neq 0$). Remplaçant S par le sous-préschéma réduit de S ayant $\{\overline{f(x)}\}$ pour espace sous-jacent, on peut supposer que S est intègre et que $f(x) = \eta$ est son point générique. Alors, en restreignant S à un voisinage ouvert de η , on peut supposer que pour tout $s \in S$, on a $(\mathcal{H}_n(\mathcal{L}.)_s) = \mathcal{H}_n((\mathcal{L}.)_s)$ (9.4.3), et par suite, si Z est le support de $\mathcal{H}_n(\mathcal{L}.)$, le support de $\mathcal{H}_n((\mathcal{L}.)_s)$ est $Z_s = Z \cap X_s$ (I, 9.1.13.1). L'hypothèse est que $Z_\eta \cap \overline{\{x\}} = \emptyset$ (resp. $\neq \emptyset$). Comme $Z \cap \overline{\{x\}}$ est fermé dans l'espace noethérien X , on conclut de (9.5.1) qu'il y a un voisinage U de η dans S tel que, pour tout $s \in U$, on ait $Z_s \cap \overline{\{x\}} = \emptyset$ (resp. $\neq \emptyset$). L'ensemble $V = f^{-1}(U) \cap \overline{\{x\}}$ répond donc à la question.

§ 10. PRÉSCHÉMAS DE JACOBSON

On a déjà eu l'occasion d'observer (5.2.5) que même les préschémas *excellents* (7.8.5) ne se comportent pas toujours comme les « variétés » de la Géométrie algébrique classique, notamment en ce qui concerne les questions de dimension; c'est ainsi que si X est le spectre d'un anneau de valuation discrète complet, l'ensemble des points fermés de X (réduit à un seul élément) n'est pas partout dense dans X , et que son complémentaire (réduit à un seul élément) est un ouvert partout dense dans X mais dont la dimension est nulle, donc $< \dim(X)$. On examine dans ce paragraphe des conditions générales moyennant lesquelles de tels phénomènes ne se présentent pas; il en résulte un comportement plus satisfaisant à certains égards pour les relations entre dimension, codimension, profondeur et coprofondéur dans ces préschémas (10.6 et 10.8). En outre, dans les préschémas considérés, le fait que l'ensemble des points fermés soit partout dense (et même « très dense » (10.1.3)) permet de ne considérer que ces points dans beaucoup de démonstrations; on rejoint ainsi le point de vue classique des « variétés algébriques » qui, de notre point de vue, sont les ensembles de points fermés des *préschémas algébriques* sur un corps, et on fait le lien entre le langage des schémas et celui des « variétés » ou « espaces algébriques » de Serre (10.9 et 10.10).

10.1. Parties très denses d'un espace topologique.

(10.1.1) On dit qu'une partie d'un espace topologique X est *quasi-constructible* si elle est réunion finie de parties localement fermées de X . On dit qu'une partie T de X est *localement quasi-constructible* si pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert V de x tel que $T \cap V$ soit quasi-constructible dans V . Il est clair que toute partie quasi-constructible de X est localement quasi-constructible : la réciproque est vraie si X est quasi-compact. Le raisonnement de ($\mathbf{0}_{\text{III}}$, 9.1.3), où on supprime le mot « rétrocompact », montre que l'ensemble des parties quasi-constructibles (resp. localement quasi-constructibles) de X , que nous désignerons par $\mathfrak{Qc}(X)$ (resp. $\mathfrak{Lqc}(X)$) est stable par réunion finie, intersection finie et passage aux complémentaires. Si $f: X \rightarrow Y$ est une application continue, il résulte aussitôt de ces définitions que, pour toute partie quasi-constructible (resp. localement quasi-constructible) Z de Y , $f^{-1}(Z)$ est quasi-constructible (resp. localement quasi-constructible) dans X .

Les parties constructibles (resp. localement constructibles) de X sont évidemment quasi-constructibles (resp. localement quasi-constructibles); la réciproque est vraie lorsque X est noethérien (resp. localement noethérien).

Dans ce qui suit, nous désignerons respectivement par $\mathfrak{O}(X)$, $\mathfrak{F}(X)$, $\mathfrak{Uf}(X)$, $\mathfrak{C}(X)$, $\mathfrak{Qc}(X)$ l'ensemble des parties de X qui sont respectivement ouvertes, fermées, localement fermées, constructibles, localement constructibles.

Proposition (10.1.2). — Soient X un espace topologique, X_0 une partie de X . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) Pour toute partie localement fermée $Z \neq \emptyset$ de X , on a $Z \cap X_0 \neq \emptyset$.
- a') Pour toute partie fermée Z de X , on a $Z = \overline{Z \cap X_0}$.
- b) Pour toute partie $Z \neq \emptyset$ de X localement quasi-constructible, on a $Z \cap X_0 \neq \emptyset$.
- b') Pour toute partie localement quasi-constructible Z de X , on a $Z \subset \overline{Z \cap X_0}$ (autrement dit $Z \cap X_0$ est dense dans Z).
- c) L'application $U \mapsto U \cap X_0$ de $\mathfrak{D}(X)$ dans $\mathfrak{D}(X_0)$ est injective (donc bijective).
- c') L'application $F \mapsto F \cap X_0$ de $\mathfrak{F}(X)$ dans $\mathfrak{F}(X_0)$ est injective (donc bijective).
- c'') L'application $Z \mapsto Z \cap X_0$ de $\mathfrak{Qc}(X)$ dans $\mathfrak{Qc}(X_0)$ est injective (donc bijective).
- c''') L'application $Z \mapsto Z \cap X_0$ de $\mathfrak{Qqc}(X)$ dans $\mathfrak{Qqc}(X_0)$ est injective.

En outre, lorsque ces conditions sont vérifiées, l'application $Z \mapsto Z \cap X_0$ de $\mathfrak{Qqc}(X)$ dans $\mathfrak{Qqc}(X_0)$ est bijective.

Notons que les assertions de surjectivité dans $c)$ et $c')$ sont triviales; elles entraînent que toute partie localement fermée dans X_0 est trace sur X_0 d'une partie localement fermée dans X , donc l'application $\mathfrak{Qc}(X) \rightarrow \mathfrak{Qc}(X_0)$ définie dans c'') est aussi surjective.

Nous prouverons les implications

$$c''') \Rightarrow c'') \Rightarrow c') \Rightarrow c) \Rightarrow b) \Rightarrow b') \Rightarrow a') \Rightarrow a) \Rightarrow c''').$$

Les trois premières sont triviales. Pour voir que $c)$ implique $b)$, notons d'abord que $c)$ entraîne que X_0 est dense dans X . Remplaçant X et X_0 par un ouvert convenable U de X et par $U \cap X_0$ respectivement, on peut donc se borner au cas où Z est localement fermée dans X , donc $Z = V \cap \bigcup W$, où V et W sont ouverts dans X ; l'hypothèse $Z \neq \emptyset$ signifie que $V \not\subset W$, ou encore $V \cup W \neq W$. En vertu de $c)$, on a donc $(V \cup W) \cap X_0 \neq W \cap X_0$, donc $V \cap X_0 \not\subset W$, et par suite $(V \cap \bigcup W) \cap X_0 \neq \emptyset$.

Pour voir que $b)$ entraîne $b')$, il suffit d'appliquer $b)$ à $Z \cap U$, où U est un voisinage ouvert arbitraire d'un point de Z . Comme $\overline{Z \cap X_0} \subset \overline{Z}$, il est trivial que $b')$ implique $a')$. Pour montrer que $a')$ entraîne $a)$, remarquons que si Z est localement fermée dans X , on peut écrire $Z = F - F'$ où F et F' sont fermés dans X et $F' \subset F$; d'où $Z \cap X_0 = (F \cap X_0) - (F' \cap X_0)$. Si l'on avait $Z \cap X_0 = \emptyset$, on en déduirait $F \cap X_0 = F' \cap X_0$, donc $F = F'$ en vertu de $a')$, c'est-à-dire $Z = \emptyset$.

Pour voir que $a)$ entraîne $c''')$, il suffit de montrer que si $Z \neq \emptyset$ est localement quasi-constructible, on a $Z \cap X_0 \neq \emptyset$: en effet, la relation $Z' \cap X_0 = Z'' \cap X_0$ est équivalente à $((Z' \cup Z'') - (Z' \cap Z'')) \cap X_0 = \emptyset$. Autrement dit, il suffit de prouver que $a)$ entraîne $b)$; en outre, remplaçant X et X_0 par un ouvert U de X et par $U \cap X_0$ respectivement, on est bien ramené au cas où Z est localement fermé dans X , d'où la conclusion.

Reste à montrer que l'application $\mathfrak{Qqc}(X) \rightarrow \mathfrak{Qqc}(X_0)$ est surjective. Soit donc Z_0 une partie localement quasi-constructible de X_0 : il y a un recouvrement (V_α) de X_0 par des ouverts de X_0 tel que $Z_0 \cap V_\alpha$ soit quasi-constructible dans V_α (et donc aussi dans X_0). En vertu de $c)$, il y a pour tout α un seul ouvert U_α de X

tel que $X_0 \cap U_\alpha = V_\alpha$, et en vertu de c'') un seul ensemble quasi-constructible Z_α dans X tel que $Z_0 \cap V_\alpha = X_0 \cap Z_\alpha$. Si α et β sont deux indices quelconques, on a $Z_\beta \cap U_\alpha \cap X_0 = U_\alpha \cap Z_0 \cap V_\beta = V_\alpha \cap Z_0 \cap V_\beta = Z_\alpha \cap X_0 \cap V_\beta \subset Z_\alpha \cap X_0$; comme $Z_\beta \cap U_\alpha$ et Z_α sont quasi-constructibles dans X , il résulte de c'') que $Z_\beta \cap U_\alpha \subset Z_\alpha$. Si l'on pose $Z = \bigcup_\alpha Z_\alpha$, on a donc $Z \cap U_\alpha = Z_\alpha$ pour tout α ; d'ailleurs, comme les V_α recouvrent X_0 , il résulte de c) que les U_α recouvrent X , et l'on voit donc que Z est localement quasi-constructible dans X et $Z_0 = Z \cap X_0$.

Définition (10.1.3). — *Lorsqu'une partie X_0 d'un espace topologique vérifie les conditions équivalentes de (10.1.2), on dit que X_0 est très dense dans X .*

On a déjà vu au cours de la démonstration de (10.1.2) que X_0 est alors dense dans X .

Corollaire (10.1.4). — *Si X_0 est très dense dans X et U une partie ouverte de X , $U \cap X_0$ est très dense dans U . Inversement, si (U_α) est un recouvrement ouvert de X tel que $U_\alpha \cap X_0$ soit très dense dans U_α pour tout α , alors X_0 est très dense dans X .*

Comme toute partie localement fermée dans U est localement fermée dans X , la première assertion résulte du critère a) de (10.1.2); il en est de même de la seconde, car si $Z \neq \emptyset$ est localement fermée dans X , $Z \cap U_\alpha$ est localement fermée dans U_α pour tout α , et $Z \cap U_\alpha \neq \emptyset$ pour un α au moins.

10.2. Quasi-homéomorphismes.

Proposition (10.2.1). — *Soient X_0, X deux espaces topologiques, $f: X_0 \rightarrow X$ une application continue. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- a) *L'application $U \mapsto f^{-1}(U)$ de $\mathfrak{D}(X)$ dans $\mathfrak{D}(X_0)$ est bijective.*
- a') *L'application $F \mapsto f^{-1}(F)$ de $\mathfrak{F}(X)$ dans $\mathfrak{F}(X_0)$ est bijective.*
- b) *La topologie de X_0 est image réciproque par f de celle de X , et $f(X_0)$ est très dense (10.1.3) dans X .*

c) *Le foncteur $\mathcal{F} \mapsto f^*(\mathcal{F})$ de la catégorie des faisceaux d'ensembles (resp. des faisceaux de groupes abéliens) sur X dans la catégorie des faisceaux d'ensembles (resp. des faisceaux de groupes abéliens) sur X_0 est une équivalence de catégories.*

Il est clair que a) et a') sont équivalentes, et a) implique que la topologie de X_0 est image réciproque par f de celle de X . D'autre part, si $f(X_0)$ n'est pas très dense dans X , il y a deux ouverts distincts U_1, U_2 de X tels que $U_1 \cap f(X_0) = U_2 \cap f(X_0)$, et par suite $f^{-1}(U_1) = f^{-1}(U_2)$, ce qui achève de montrer que a) entraîne b). Inversement, la condition b) implique que les applications $U \mapsto U \cap f(X_0)$ de $\mathfrak{D}(X)$ dans $\mathfrak{D}(f(X_0))$ et $V \mapsto f^{-1}(V)$ de $\mathfrak{D}(f(X_0))$ dans $\mathfrak{D}(X_0)$ sont bijectives, donc il en est de même de leur composée $U \mapsto f^{-1}(U)$.

Pour voir que a) entraîne c), il suffit d'appliquer la définition de $f^*(\mathcal{F})$ (0_I, 3.7.1) et les axiomes des faisceaux : a) entraîne que pour tout ouvert U de X , l'application canonique $\Gamma(U, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(f^{-1}(U), f^*(\mathcal{F}))$ est une bijection fonctorielle en \mathcal{F} , d'où c). Il reste à montrer que c) entraîne b).

Supposons d'abord que $f(X_0)$ ne soit pas très dense dans X ; il existe alors deux parties fermées distinctes $Y \supset Y'$ de X telles que $Y \cap f(X_0) = Y' \cap f(X_0)$. Soit \mathcal{F} (resp. \mathcal{F}') le faisceau de groupes abéliens sur X image directe par l'injection canonique $Y \rightarrow X$ (resp. $Y' \rightarrow X$) du faisceau simple associé au préfaisceau constant \mathbf{Z} sur Y (resp. Y'); la définition de f^* ($\mathbf{0}_I, 3.7.1$) montre que $f^*(\mathcal{F})$ est isomorphe à $f^*(\mathcal{F}')$ mais \mathcal{F} n'est pas isomorphe à \mathcal{F}' , donc la condition c) n'est pas vérifiée. (On notera que le foncteur f^* n'est même pas alors *fidèle*, car si u et v sont l'automorphisme identique et l'endomorphisme nul de $\mathcal{F}|\mathcal{F}'$, $f^*(u)$ et $f^*(v)$ sont égaux.)

Montrons maintenant que c) entraîne que la topologie de X_0 est l'image réciproque de celle de X par f . Notons que si la condition c) est vérifiée pour la catégorie des faisceaux d'ensembles, elle l'est aussi pour la catégorie des faisceaux de groupes abéliens, car il résulte aussitôt des définitions ($\mathbf{0}_{III}, 8.2.5$) que cette dernière n'est autre que la catégorie des *objets en groupes abéliens* dans la catégorie des faisceaux d'ensembles. Il suffira donc de prouver notre assertion en supposant c) vérifiée pour les catégories de faisceaux de groupes abéliens sur X et X_0 . Or, si \mathbf{Z}_X désigne le faisceau simple sur X associé au préfaisceau constant égal à \mathbf{Z} , on a un isomorphisme canonique $\Gamma(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(\mathbf{Z}_X, \mathcal{F})$ fonctoriel en \mathcal{F} (même raisonnement que dans ($\mathbf{0}_I, 5.1.1$)); comme il est clair par définition ($\mathbf{0}_I, 3.7.1$) que $f^*(\mathbf{Z}_X) = \mathbf{Z}_{X_0}$, l'hypothèse que f^* est une équivalence entraîne que l'homomorphisme canonique $\Gamma(X, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(X_0, f^*(\mathcal{F}))$ est *bijectif* pour tout faisceau de groupes abéliens \mathcal{F} sur X . Or, soit Y_0 une partie fermée de X_0 ; soit \mathcal{F}_0 le faisceau sur X image directe par l'injection canonique $Y_0 \rightarrow X_0$ du faisceau simple associé au préfaisceau constant \mathbf{Z} sur Y_0 . Comme f^* est une équivalence, \mathcal{F}_0 est isomorphe à un faisceau de la forme $f^*(\mathcal{F})$, où \mathcal{F} est un faisceau de groupes abéliens sur X . Considérons alors la section s_0 de \mathcal{F}_0 au-dessus de X_0 telle que $(s_0)_{x_0} = 1_{x_0}$ si $x_0 \in Y_0$, $(s_0)_{x_0} = 0_{x_0}$ si $x_0 \notin Y_0$. Les remarques précédentes montrent qu'il existe une section s de \mathcal{F} au-dessus de X telle que $(s_0)_{x_0} = s_{f(x_0)}$ pour tout $x_0 \in X_0$ (les fibres $(\mathcal{F}_0)_{x_0}$ et $\mathcal{F}_{f(x_0)}$ étant canoniquement identifiées ($\mathbf{0}_I, 3.7.1$)); cela entraîne que Y_0 est l'image réciproque par f de l'ensemble Y des $x \in X$ tels que $s_x \neq 0_x$, et Y est fermé dans X . C.Q.F.D.

Définition (10.2.2). — *Lorsqu'une application continue $f : X_0 \rightarrow X$ vérifie les conditions équivalentes de (10.2.1), on dit que f est un quasi-homéomorphisme de X_0 dans X .*

En vertu de (10.2.1, b)), dire qu'une partie X_0 d'un espace topologique X est très dense dans X signifie donc que l'injection canonique $X_0 \rightarrow X$ est un quasi-homéomorphisme.

Corollaire (10.2.3). — *Le composé de deux quasi-homéomorphismes est un quasi-homéomorphisme.*

Cela résulte aussitôt de (10.2.1, a)).

Corollaire (10.2.4). — *Soient $f : X \rightarrow Y$ un quasi-homéomorphisme, Y' une partie localement quasi-constructible de Y , $X' = f^{-1}(Y')$; alors la restriction $f' = f|X' : X' \rightarrow Y'$ est un quasi-homéomorphisme.*

Il est clair en vertu de (10.2.1, b)) que la topologie induite sur X' par celle de X est l'image réciproque par f' de la topologie induite sur Y' par celle de Y . D'autre part,

soit $Z \neq \emptyset$ une partie fermée dans Y' , et $z \in Z$; il y a un voisinage ouvert U de z dans Y tel que $U \cap Y'$ soit réunion d'un nombre fini de parties Y'_i fermées dans U ; si j est un indice tel que $z \in Y'_j$, $Z \cap Y'_j$ est donc fermé dans U . Puisque $f(X) \cap U$ est très dense dans U (10.1.4), $Z \cap Y'_j \cap f(X)$ n'est pas vide (10.1.2, a), ni a fortiori $Z \cap f(X)$; mais comme $Z \subset Y'$, on a $Z \cap f(X) = Z \cap f'(X')$; le critère (10.1.2, a) montre donc que $f'(X')$ est très dense dans Y' , et l'on conclut à l'aide de (10.2.1, b)).

Corollaire (10.2.5). — Soient $f: X \rightarrow Y$ une application continue, (V_α) un recouvrement ouvert de Y . Si, pour tout α , la restriction $f^{-1}(V_\alpha) \rightarrow V_\alpha$ de f est un quasi-homéomorphisme, alors f est un quasi-homéomorphisme.

Cela résulte aussitôt du critère (10.2.1, b)) et de (10.1.4).

Corollaire (10.2.6). — Soient $f: X \rightarrow Y$ un quasi-homéomorphisme, Y' une partie localement quasi-constructible de Y , $X' = f^{-1}(Y')$. Pour que Y' soit quasi-compact (resp. noethérien, resp. rétrocompact dans Y), il faut et il suffit que X' soit quasi-compact (resp. noethérien, resp. rétrocompact dans X).

Démontrons d'abord les deux premières assertions; en vertu de (10.2.4), on peut se borner au cas où $Y' = Y$. Dire que X est quasi-compact (resp. noethérien) signifie que pour toute famille filtrante croissante (U_α) dans $\mathfrak{D}(X)$ ayant X pour plus grand élément (resp. pour toute famille filtrante croissante (U_α) dans $\mathfrak{D}(X)$), il existe γ tel que $U_\alpha = U_\gamma$ pour $\alpha \geq \gamma$. Comme $U \rightsquigarrow f^{-1}(U)$ est une bijection de $\mathfrak{D}(Y)$ sur $\mathfrak{D}(X)$, notre assertion résulte aussitôt de la remarque précédente.

Les ouverts quasi-compacts de X sont donc les ensembles de la forme $f^{-1}(U)$ où U est ouvert quasi-compact dans Y , en vertu de (10.2.1, a)) et de ce qui précède. Pour que X' soit rétrocompact dans X , il faut et il suffit alors que pour tout ouvert quasi-compact U dans Y , $f^{-1}(U) \cap X' = f^{-1}(U \cap Y')$ soit quasi-compact ($\mathbf{0}_{\text{III}}$, 9.1.1); la première partie de la démonstration montre que cela équivaut à dire que $U \cap Y'$ est quasi-compact pour tout ouvert quasi-compact U , c'est-à-dire que Y' est rétrocompact dans Y .

Proposition (10.2.7). — Soit $f: X \rightarrow Y$ un quasi-homéomorphisme. Alors l'application $Z \rightsquigarrow f^{-1}(Z)$ de $\mathfrak{P}(Y)$ dans $\mathfrak{P}(X)$ définit par restriction les bijections suivantes (cf. (10.1.1) pour les notations) :

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}(Y) &\rightsquigarrow \mathfrak{D}(X) \\ \mathfrak{F}(Y) &\rightsquigarrow \mathfrak{F}(X) \\ \mathfrak{L}f(Y) &\rightsquigarrow \mathfrak{L}f(X) \\ \mathfrak{Q}c(Y) &\rightsquigarrow \mathfrak{Q}c(X) \\ \mathfrak{L}qc(Y) &\rightsquigarrow \mathfrak{L}qc(X) \\ \mathfrak{C}(Y) &\rightsquigarrow \mathfrak{C}(X) \\ \mathfrak{L}c(Y) &\rightsquigarrow \mathfrak{L}c(X). \end{aligned}$$

Pour les deux premières, ce n'est autre que la définition (10.2.2); comme la topologie de X est l'image réciproque par f de celle de $f(X)$ les cinq dernières appli-

cations, où l'on remplace Y par $f(X)$, sont bijectives. On peut donc (par (10.2.1, b)) se borner au cas où X est un sous-espace très dense de Y , et le fait que les applications $\mathcal{L}f(Y) \rightarrow \mathcal{L}f(X)$, $\mathcal{Q}c(Y) \rightarrow \mathcal{Q}c(X)$, $\mathcal{L}qc(Y) \rightarrow \mathcal{L}qc(X)$ sont bijectives a déjà été prouvé (10.1.2). Toute partie localement constructible étant localement quasi-constructible, les applications $\mathcal{C}(Y) \rightarrow \mathcal{C}(X)$ et $\mathcal{L}c(Y) \rightarrow \mathcal{L}c(X)$ sont injectives; en outre, pour tout ouvert $U \subset Y$, la restriction $f^{-1}(U) \rightarrow U$ de f est un quasi-homéomorphisme (10.2.4), donc si l'on montre que $\mathcal{C}(Y) \rightarrow \mathcal{C}(X)$ est surjective, il en sera de même de $\mathcal{L}c(Y) \rightarrow \mathcal{L}c(X)$. Mais en vertu de (10.2.6), toute partie ouverte rétrocompacte Z dans X est de la forme $f^{-1}(T)$, où T est ouvert rétrocompact dans Y ; cela prouve évidemment la surjectivité de $\mathcal{C}(Y) \rightarrow \mathcal{C}(X)$.

Remarques (10.2.8). — (i) On a vu dans la démonstration de (10.2.1) que si f est un quasi-homéomorphisme, l'application canonique

$$(10.2.8.1) \quad \Gamma(Y, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(X, f^*(\mathcal{F}))$$

est un isomorphisme de groupes abéliens fonctoriel en \mathcal{F} dans la catégorie des faisceaux de groupes abéliens sur Y . Comme f^* est exact dans cette catégorie ($\mathbf{0}_1$, 3.7.2), cela implique que les homomorphismes canoniques (T , 3.2.2)

$$H^i(Y, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} H^i(X, f^*(\mathcal{F}))$$

sont *bijectifs* pour tout i .

(ii) Si $f : X \rightarrow Y$ est une application continue et \mathcal{F}, \mathcal{G} deux faisceaux de groupes abéliens sur Y , on a $f^*(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{G}) = f^*(\mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*(\mathcal{G})$ à un isomorphisme canonique près ($\mathbf{0}_1$, 4.3.3). On en conclut que si f est un quasi-homéomorphisme, f^* est encore une *équivalence* de la catégorie des faisceaux d'anneaux sur Y , et de la catégorie des faisceaux d'anneaux sur X ; la donnée d'une structure d'espace annelé sur Y est donc équivalente à celle d'une structure d'espace annelé sur X .

Étant donnés deux espaces annelés (X, \mathcal{O}_X) , (Y, \mathcal{O}_Y) , nous dirons qu'un morphisme d'espaces annelés $f = (\psi, \theta) : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ est un *quasi-isomorphisme* si ψ est un quasi-homéomorphisme de X dans Y et $\theta^\# : \psi^*(\mathcal{O}_Y) \rightarrow \mathcal{O}_X$ un isomorphisme de faisceaux d'anneaux; lorsqu'il en est ainsi, l'espace annelé (X, \mathcal{O}_X) est entièrement déterminé, à isomorphisme près, par (Y, \mathcal{O}_Y) , l'espace X et le quasi-homéomorphisme ψ (que l'on peut prendre arbitraire). Lorsque f est un quasi-isomorphisme d'espaces annelés, le foncteur

$$\mathcal{F} \mapsto f^*(\mathcal{F})$$

est une *équivalence* de la catégorie des \mathcal{O}_Y -Modules et de celle des \mathcal{O}_X -Modules, puisque $f^*(\mathcal{F})$ s'identifie canoniquement ici à $\psi^*(\mathcal{F})$. On en conclut par exemple des isomorphismes de bi- ∂ -foncteurs

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_Y}^i(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_X}^i(f^*(\mathcal{F}), f^*(\mathcal{G})).$$

De façon générale, on peut dire que les constructions usuelles de la théorie des faisceaux et de l'algèbre homologique, faites sur l'espace annelé Y ou l'espace annelé X , sont équivalentes.

10.3. Espaces de Jacobson.

Définition (10.3.1). — On dit qu'un espace topologique X est un espace de Jacobson si l'ensemble X_0 des points fermés de X est très dense dans X (autrement dit, si l'injection canonique $X_0 \rightarrow X$ est un quasi-homéomorphisme).

Cela signifie donc (10.1.2) que toute partie localement fermée (ou seulement localement quasi-constructible) $Z \neq \emptyset$ de X contient un point fermé de X , ou encore que toute partie fermée de X est l'adhérence de l'ensemble de ses points fermés.

Proposition (10.3.2). — Soient X un espace de Jacobson, Z une partie localement quasi-constructible de X ; alors le sous-espace Z de X est un espace de Jacobson, et pour qu'un point de Z soit fermé dans Z , il faut et il suffit qu'il soit fermé dans X .

Si X_0 est l'ensemble des points fermés de X , $Z \cap X_0$ est très dense dans Z en vertu de (10.2.4) appliqué à l'injection $i : X_0 \rightarrow X$; comme l'ensemble Z_0 des points fermés de Z contient évidemment $Z \cap X_0$, il est *a fortiori* très dense dans Z , donc Z est un espace de Jacobson. Montrons maintenant qu'en fait on a $Z_0 = Z \cap X_0$; soit $x \in Z$ un point fermé dans Z ; soit $\overline{\{x\}}$ son adhérence dans X ; $\overline{\{x\}} \cap Z = \{x\}$ est donc une partie localement quasi-constructible de X , et comme son intersection avec X_0 est non vide (10.1.2), on a $x \in X_0$.

Proposition (10.3.3). — Soient X un espace topologique, (U_α) un recouvrement ouvert de X . Pour que X soit un espace de Jacobson, il faut et il suffit que chacun des sous-espaces U_α le soit.

La condition est nécessaire en vertu de (10.3.2). Inversement, montrons d'abord que l'hypothèse que les U_α sont des espaces de Jacobson entraîne que pour qu'un point $x \in U_\alpha$ soit fermé dans X , il suffit qu'il soit fermé dans U_α . Il suffit en effet de voir que cette condition entraîne que x est aussi fermé dans chacun des U_β qui le contiennent; mais $U_\alpha \cap U_\beta$ est ouvert dans U_α , donc x est fermé dans $U_\alpha \cap U_\beta$, et en vertu de (10.3.2), x est aussi fermé dans U_β , ce qui achève la démonstration.

10.4. Préschémas de Jacobson et anneaux de Jacobson.

Définition (10.4.1). — On dit qu'un préschéma X est un préschéma de Jacobson si l'espace topologique X sous-jacent est un espace de Jacobson. On dit qu'un anneau A est un anneau de Jacobson si $\text{Spec}(A)$ est un préschéma de Jacobson.

Toute partie fermée de $X = \text{Spec}(A)$ est de la forme $Z = V(\mathfrak{a})$, où \mathfrak{a} est un idéal égal à sa racine, et l'ensemble X_0 des points fermés de X est l'ensemble des idéaux maximaux de A ; dire que $Z \cap X_0$ est dense dans Z signifie donc que \mathfrak{a} est intersection d'idéaux maximaux (I, 1.1.4); comme \mathfrak{a} est intersection d'idéaux premiers, il revient au même de dire que tout idéal premier de A est intersection d'idéaux maximaux; en vertu de (10.3.1) et (10.1.2), la définition usuelle des anneaux de Jacobson (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. V, § 3, n° 4, déf. 1) coïncide donc avec la définition (10.4.1).

Proposition (10.4.2). — Soient X un préschéma, (U_α) un recouvrement de X formé d'ouverts affines. Pour que X soit un préschéma de Jacobson, il faut et il suffit que les anneaux $\Gamma(U_\alpha, \mathcal{O}_X)$ des U_α soient des anneaux de Jacobson.

Cela résulte de (10.3.3) et de la définition (10.4.1).

(10.4.3) Un préschéma discret est un préschéma de Jacobson; un anneau artinien est donc un anneau de Jacobson. Tout anneau principal ayant une infinité d'idéaux maximaux (par exemple \mathbf{Z}) est un anneau de Jacobson; un anneau local noethérien A est un anneau de Jacobson si et seulement si son idéal maximal est son seul idéal premier, c'est-à-dire si A est artinien. Tout sous-préschéma d'un préschéma de Jacobson est un préschéma de Jacobson en vertu de (10.3.2).

Proposition (10.4.4). — Soit B un anneau intègre. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) Il existe $f \neq 0$ dans B tel que B_f soit un corps.
- b) Le corps des fractions de B est une B -algèbre de type fini.
- c) Il existe un corps K contenant B et qui est une B -algèbre de type fini.
- d) Le point générique de $\text{Spec}(B)$ est isolé dans $\text{Spec}(B)$.

Il est clair que $d)$ est équivalent à $a)$, puisque $d)$ signifie qu'il existe $f \neq 0$ dans B tel que $D(f)$ soit réduit au point générique de $\text{Spec}(B)$. Il est trivial que $a)$ entraîne $b)$ et que $b)$ entraîne $c)$. Enfin, $c)$ entraîne $a)$, en vertu de Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. V, § 3, n° 1, cor. 2 du th. 1.

Proposition (10.4.5). — Soit A un anneau. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) A est un anneau de Jacobson.
- b) Pour tout idéal premier non maximal \mathfrak{p} de A et tout $f \neq 0$ dans $B = A/\mathfrak{p}$, B_f n'est pas un corps.

b') Toute A -algèbre de type fini K qui est un corps est une A -algèbre finie.

On sait que $a)$ entraîne $b')$ (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. V, § 3, n° 4, cor. 3 du th. 3). En outre, le noyau de l'homomorphisme $A \rightarrow K$ est alors un idéal maximal \mathfrak{m} de A , et K est une extension finie de A/\mathfrak{m} (*loc. cit.*). Il est trivial que $b')$ entraîne $b)$, puisque $A/\mathfrak{p} = B$ n'est pas un corps, toute B -algèbre de type fini est une A -algèbre de type fini et B_f est une B -algèbre de type fini. Reste à voir que $b)$ implique $a)$. Nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme (10.4.5.1). — Soit X un espace topologique ayant la propriété suivante : pour toute partie localement fermée $Z \neq \emptyset$ de X , il existe une partie Z' de Z , localement fermée dans X (ou dans Z , ce qui revient au même), et un point $x \in Z'$, fermé dans Z' . Alors, pour que X soit un espace de Jacobson, il faut et il suffit qu'aucun point non fermé x de X ne soit isolé dans $\overline{\{x\}}$.

Si X est un espace de Jacobson, un point non fermé x de X ne peut être isolé dans $\overline{\{x\}}$, car cela signifierait qu'il existe un ouvert U de X tel que $U \cap \overline{\{x\}} = \{x\}$; or $U \cap \overline{\{x\}}$ est localement fermé dans X et ne contiendrait aucun point fermé dans X , ce qui est contraire à l'hypothèse que X est un espace de Jacobson. Inversement, supposons vérifiée la condition de l'énoncé; alors l'ensemble des points fermés de X est identique à l'ensemble X_0 des $x \in X$ qui sont isolés dans $\overline{\{x\}}$; mais il résulte de (5.1.10.1) que

cet ensemble est *très dense* dans X , donc X est un espace de Jacobson par définition.

Rappelons (5.1.10) que l'hypothèse faite sur X dans (10.4.5.1) est toujours vérifiée lorsque X est l'espace sous-jacent à un *préschéma*.

Revenant alors à la démonstration de (10.4.5), la condition *b*) entraîne que pour tout point x non fermé de $\text{Spec}(A)$, le point générique x de $\text{Spec}(A/\mathfrak{m}_x) = V(\mathfrak{m}_x) = \overline{\{x\}}$ n'est pas isolé dans $\overline{\{x\}}$, donc *b*) entraîne *a*) en vertu du lemme (10.4.5.1) et de (10.4.4).

Corollaire (10.4.6). — *Toute algèbre de type fini B sur un anneau de Jacobson A est un anneau de Jacobson, et l'image réciproque dans A de tout idéal maximal de B est un idéal maximal de A . En particulier, toute algèbre de type fini sur un corps ou sur \mathbf{Z} est un anneau de Jacobson.*

Une B -algèbre de type fini K qui est un corps est aussi une A -algèbre de type fini, donc un A -module de type fini et *a fortiori* un B -module de type fini, d'où la première assertion; la seconde a été démontrée au cours de la démonstration de (10.4.5), appliqué à $K = B/\mathfrak{m}$.

Corollaire (10.4.7). — *Si X est un préschéma de Jacobson, $f: Y \rightarrow X$ un morphisme localement de type fini, alors Y est un préschéma de Jacobson et l'image par f de tout point fermé dans Y est un point fermé dans X .*

La question étant locale sur X et sur Y , on est ramené au cas où X et Y sont affines, et le corollaire résulte alors de (10.4.6).

Corollaire (10.4.8). — *Si k est un corps algébriquement clos, X un k -préschéma localement de type fini, l'ensemble des points de X rationnels sur k est très dense dans X .*

En effet, X est un préschéma de Jacobson (10.4.7) et les points fermés de X sont exactement les points rationnels sur k (I, 6.4.2).

(10.4.9) Le fait que les préschémas localement de type fini sur un corps ou sur \mathbf{Z} sont des préschémas de Jacobson est particulièrement important, en raison de la possibilité de se ramener à ce cas dans de nombreuses questions de Géométrie algébrique (8.1.2, *c*). Nous allons en donner deux exemples :

Applications (10.4.10) : I : Démonstration de (6.15.9). — Soient k un corps séparablement clos, X un k -préschéma localement de type fini sur k et *unibranche*. On sait que la fermeture intégrale d'une k -algèbre intègre de type fini A dans une extension finie de son corps des fractions est une A -algèbre finie (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. V, § 3, n° 2, th. 2), donc toute k -algèbre de type fini est un anneau universellement japonais; on en conclut que l'ensemble des points $x \in X$ où X est géométriquement unibranche est localement constructible (9.7.10). Mais l'hypothèse et le lemme (6.15.8) entraînent que cet ensemble contient tous les points *fermés* de X . La conclusion résulte donc de (10.4.6), (10.3.1) et de la bijectivité de l'application canonique $\mathcal{L}c(X) \rightarrow \mathcal{L}c(X_0)$ (où X_0 est l'ensemble des points fermés de X) (10.2.7).

Applications : II : Proposition (10.4.11). — *Soient S un préschéma, X un S -préschéma de type fini. Tout S -endomorphisme de X qui est radiciel est surjectif (donc bijectif).*

Soient $f : X \rightarrow S$ le morphisme structural, $g : X \rightarrow X$ le S -endomorphisme considéré et, pour tout $s \in S$, soit g_s le morphisme déduit de g par le changement de base $\text{Spec}(\mathbf{k}(s)) \rightarrow S$, qui est un $\mathbf{k}(s)$ -endomorphisme de la fibre $f^{-1}(s) = X \times_S \text{Spec}(\mathbf{k}(s))$.

Pour prouver que g est surjectif, il suffit de prouver que g_s est surjectif pour tout $s \in S$, donc on peut (en vertu de (I, 3.5.7)) se borner au cas où $S = \text{Spec}(k)$ est le spectre d'un corps k , auquel cas f est un morphisme de présentation finie, puisque S est noethérien. Appliquant (8.9.1) et (8.10.5, (vii)), on est ramené au cas où $S = \text{Spec}(A)$, où A est une sous- \mathbf{Z} -algèbre de type fini de k . Or X est alors un préschéma de Jacobson (10.4.7), et $g(X)$ est constructible dans X (1.8.5), donc, pour prouver que $g(X) = X$, il suffit de montrer que $g(X)$ contient tous les points fermés de X (10.3.1).

Lemme (10.4.11.1). — Soit Y un \mathbf{Z} -préschéma de type fini.

(i) Pour qu'un point $y \in Y$ soit fermé dans Y , il faut et il suffit que $\mathbf{k}(y)$ soit un corps fini.

(ii) Pour tout nombre premier p et tout entier $d \geq 1$, l'ensemble des points $y \in Y$ tels que $\mathbf{k}(y)$ soit une extension de \mathbf{F}_p dont le degré divise d est fini.

L'assertion (i) résulte de ce que l'image d'un point fermé $y \in Y$ dans $\text{Spec}(\mathbf{Z})$ est un point fermé (10.4.7), autrement dit un nombre premier, et de (I, 6.4.2). D'autre part, comme Y est réunion finie d'ouverts affines de type fini sur \mathbf{Z} , on peut se borner pour prouver (ii) au cas où $Y = \text{Spec}(C)$, où C est une \mathbf{Z} -algèbre de type fini. Or, les points $y \in Y$ tels que le degré de $\mathbf{k}(y)$ sur \mathbf{F}_p divise d correspondent biunivoquement aux homomorphismes $C \rightarrow \mathbf{F}_{p^d}$; mais si (t_i) est un système de générateurs de la \mathbf{Z} -algèbre C , tout homomorphisme de C est déterminé par ses valeurs aux éléments t_i , et par suite il n'y a qu'un nombre fini d'homomorphismes de C dans un corps fini.

Cela étant, X est un \mathbf{Z} -préschéma de type fini; soit $T_{p,d}$ l'ensemble des points fermés $z \in X$ tels que $\mathbf{k}(z)$ soit une extension de \mathbf{F}_p de degré divisant d ; il résulte de (10.4.11.1) que l'ensemble $T_{p,d}$ est fini et que l'ensemble des points fermés de X est réunion des $T_{p,d}$. En outre, si $z \in T_{p,d}$ et si h est un endomorphisme quelconque de X , $\mathbf{k}(h(z))$ est isomorphe à un sous-corps de $\mathbf{k}(z)$, donc $h(z) \in T_{p,d}$, autrement dit $T_{p,d}$ est stable par tout endomorphisme de X . Comme g est par hypothèse injectif, sa restriction à $T_{p,d}$ est bijective puisque $T_{p,d}$ est fini, ce qui achève de démontrer la proposition.

Nous verrons plus loin (17.9.7) que lorsqu'on suppose de plus, d'une part que X est un S -préschéma de présentation finie, d'autre part que g est un monomorphisme, alors on peut affirmer que g est un automorphisme de X .

10.5. Préschémas de Jacobson noethériens.

Proposition (10.5.1). — Soit B un anneau intègre noethérien. Les conditions équivalentes a) à d) de (10.4.4) sont alors aussi équivalentes aux suivantes :

e) $\text{Spec}(B)$ est fini.

f) B est un anneau semi-local de dimension ≤ 1 .

Il résulte en effet du théorème d'Artin-Tate (0, 16.3.3) que les conditions a) et f) sont équivalentes. La condition f) implique que $\text{Spec}(B)$ est réunion de l'ensemble

fini de ses points fermés et de son point générique, donc f) implique e) sans supposer A noethérien. Enfin e) implique d) sans supposer A noethérien, car le point générique x de X est le complémentaire de la réunion des adhérences $\overline{\{y\}}$, où y parcourt l'ensemble des points $y \neq x$, et comme ces points sont en nombre fini, $\{x\}$ est complémentaire d'un ensemble fermé dans X .

Corollaire (10.5.2). — *Soit A un anneau noethérien. Pour que A soit un anneau de Jacobson, il faut et il suffit qu'il n'existe aucun idéal premier \mathfrak{p} de A tel que A/\mathfrak{p} soit un anneau semi-local de dimension 1.*

Cela résulte aussitôt de (10.5.1) et de la condition b) de (10.4.5), les idéaux premiers \mathfrak{p} de A tels que A/\mathfrak{p} soit semi-local de dimension 0 étant les idéaux maximaux de A .

Corollaire (10.5.3). — *Soit X un préschéma noethérien irréductible. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- a) *Le point générique de X est isolé.*
- b) *X est fini.*
- c) *X est de dimension ≤ 1 et l'ensemble de ses points fermés est fini.*

Il existe par hypothèse un nombre fini d'ouverts affines irréductibles U_i ($1 \leq i \leq n$) recouvrant X , et dont chacun contient donc le point générique de X ; il suffit de prouver l'équivalence de a), b) et c) pour chacun des $(U_i)_{\text{red}}$ (compte tenu de (0, 14.1.7)). Mais cette équivalence résulte alors de (10.5.1).

Remarque (10.5.4). — Un préschéma noethérien X vérifiant les conditions équivalentes de (10.5.3) n'est pas nécessairement un schéma affine; en fait il peut même être *non séparé*. On en a un exemple en remplaçant, dans l'exemple (I, 5.5.11) de « droite affine avec point dédoublé », X_1 et X_2 par le spectre de l'anneau de valuation discrète $(K[s])_{(s)}$, U_{12} et U_{21} par l'ouvert réduit au point générique dans X_1 et X_2 respectivement; le préschéma non séparé X que l'on obtient a exactement 3 points.

Proposition (10.5.5). — *Soit X un préschéma noethérien.*

- (i) *L'ensemble X_0 des points $x \in X$ tels que $\overline{\{x\}}$ soit fini est très dense dans X .*
- (ii) *Pour que X soit un préschéma de Jacobson, il faut et il suffit qu'il n'existe aucun sous-préschéma de X isomorphe au spectre d'un anneau semi-local intègre de dimension 1.*

La condition que $\overline{\{x\}}$ soit fini équivaut en effet ici (10.5.3) au fait que x soit isolé dans $\overline{\{x\}}$, $\overline{\{x\}}$ étant espace sous-jacent d'un sous-préschéma (noethérien) de X ; l'assertion (i) résulte donc de (5.1.10.1). De même, compte tenu de (10.4.5.1), pour démontrer l'assertion (ii), remarquons que pour qu'un point non fermé x de X appartienne à X_0 , il faut et il suffit que le sous-préschéma fermé intègre Y de X ayant $\overline{\{x\}}$ pour espace sous-jacent soit de dimension 1 et fini, donc réunion finie de sous-préschémas ouverts (dans Y) affines U_i qui sont des spectres d'anneau semi-locaux intègres de dimension 1. Inversement, s'il y a un sous-préschéma Z de X qui soit spectre d'un anneau semi-local intègre de dimension 1, Z n'est pas un préschéma de Jacobson (10.5.2), donc il en est de même de X (10.3.2).

Remarque (10.5.6). — L'assertion (ii) de (10.5.5) est encore valable lorsque X est *localement noethérien* : en effet, si (V_α) est un recouvrement de X formé d'ouverts affines (noethériens), tout sous-préschéma d'un V_α est un sous-préschéma de X ; inversement, si un sous-préschéma Z de X est isomorphe au spectre d'un anneau semi-local intègre de dimension 1, il y a un α tel que $V_\alpha \cap Z$ contienne un ouvert affine U de Z non réduit au point générique de Z , et qui est donc aussi spectre d'un anneau semi-local intègre de dimension 1. On conclut à l'aide de (10.3.3).

Proposition (10.5.7). — Soient X un préschéma localement noethérien, Y une partie fermée de X telle que toute partie fermée non vide de X rencontre Y . Alors le préschéma induit sur l'ouvert $X - Y$ est un préschéma de Jacobson.

Appliquons le critère (10.5.5, (ii)), et supposons qu'il y ait un sous-préschéma Z de $X - Y$ qui soit spectre d'un anneau semi-local intègre de dimension 1, le point générique z de Z étant donc isolé dans Z (ou dans l'adhérence \bar{Z} de Z dans X), et Z étant distinct de $\{z\}$. Soit $y \neq z$ un point de Z ; comme il n'appartient pas à Y , il n'est pas fermé dans X , et son adhérence $\overline{\{y\}}$ dans X rencontre Y en un point $x \neq y$ qui est donc spécialisation de y . L'existence de la chaîne $\overline{\{x\}} \subset \overline{\{y\}} \subset \overline{\{z\}}$ montre alors que la dimension de $\overline{\{z\}}$ serait ≥ 2 , et il en serait de même de la dimension de $U \cap \overline{\{z\}}$, où U est un voisinage ouvert affine (donc noethérien) de x dans X . Or, cela contredit le fait que le point générique z de $U \cap \overline{\{z\}}$ est isolé dans $U \cap \overline{\{z\}}$ (10.5.3).

Corollaire (10.5.8). — Soit A un anneau noethérien; pour tout élément f du radical \mathfrak{R} de A , l'anneau A_f est un anneau de Jacobson, et l'ouvert $\text{Spec}(A) - V(\mathfrak{R})$ est un schéma de Jacobson.

Si $X = \text{Spec}(A)$, $Y = V(\mathfrak{J})$, où \mathfrak{J} est un idéal de A , dire que toute partie fermée non vide de X rencontre Y équivaut (0_I, 2.1.3) à dire que Y contient tous les points fermés de X , ou encore que \mathfrak{J} est contenu dans le radical \mathfrak{R} de A . Si $f \in \mathfrak{R}$, l'ouvert $D(f)$ ne rencontre donc pas $V(\mathfrak{R})$, et est un espace de Jacobson en vertu de (10.5.7).

Corollaire (10.5.9). — Soient A un anneau local noethérien, \mathfrak{m} son idéal maximal, $X = \text{Spec}(A)$, $Y = X - \{\mathfrak{m}\}$; alors Y est un schéma de Jacobson, dont les points fermés sont les idéaux premiers $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$ tels que $\dim(A/\mathfrak{p}) = 1$.

La première assertion est un cas particulier de (10.5.8); d'autre part les points fermés de Y sont les idéaux premiers \mathfrak{p} de A qui sont des éléments maximaux dans l'ensemble des idéaux premiers $\neq \mathfrak{m}$, ce qui, par définition de la dimension, signifie que $\dim(A/\mathfrak{p}) = 1$.

Proposition (10.5.10). — Soit A un anneau local noethérien réduit et complet et qui n'est pas un corps. Alors les intersections finies des noyaux des homomorphismes locaux de A dans des anneaux de valuation discrète V , qui font de V une A -algèbre finie, forment une base de filtre tendant vers 0 pour la topologie adique de A .

Il suffit (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 2, n° 7, prop. 8) de prouver que l'intersection des noyaux envisagés dans l'énoncé est réduite à 0. Supposons d'abord que A soit intègre et de dimension 1; en vertu du théorème de Nagata (0, 23.1.5 et 23.1.6), la clôture intégrale A' de A est un anneau local complet intègre et

intégralement clos et de dimension 1 et une A -algèbre finie; c'est donc un anneau de valuation discrète, et la proposition en résulte aussitôt dans ce cas.

Passons au cas général; soit x le point fermé de $X = \text{Spec}(A)$, et posons $Y = X - \{x\}$; on sait (10.5.9) que Y est un préschéma de Jacobson. Montrons que cela entraîne que l'intersection des idéaux premiers \mathfrak{p} de A tels que $\dim(A/\mathfrak{p}) = 1$ est réduite à 0; la proposition en résultera puisque, pour chacun de ces idéaux \mathfrak{p} , l'intersection des noyaux des homomorphismes locaux de A/\mathfrak{p} dans des anneaux de valuation discrète V , faisant de V une (A/\mathfrak{p}) -algèbre finie, est réduite à 0. Mais dire que l'intersection de ces idéaux premiers est réduite à 0 signifie que l'ensemble de ces idéaux est dense dans X , ou encore dans Y (puisque Y est dense dans X), et cela résulte aussitôt de (10.5.9).

10.6. Dimension dans les préschémas de Jacobson.

Les résultats de ce numéro précisent dans certains cas et généralisent des résultats du § 5.

Proposition (10.6.1). — Soit S un préschéma localement noethérien, vérifiant en outre les conditions suivantes : 1° S est un préschéma de Jacobson; 2° pour tout $s \in S$, $\mathcal{O}_{S,s}$ est universellement caténaire (5.6.2); 3° toute composante irréductible S' de S est équicodimensionnelle (autrement dit, pour tout point fermé s de S' et tout sous-préschéma de S ayant S' pour espace sous-jacent, on a $\dim(S') = \dim(\mathcal{O}_{S',s})$). On a alors les propriétés suivantes :

(i) Pour tout morphisme localement de type fini $g : X \rightarrow S$, X vérifie les conditions 1°, 2° et 3° précédentes. En particulier, si X est équidimensionnel (par exemple si X est irréductible), X est biéquidimensionnel (autrement dit, X est caténaire et pour tout point fermé x de X , on a $\dim(\mathcal{O}_{X,x}) = \dim(X)$ (0, 14.3.3)).

(ii) Soient X, Y deux S -préschémas localement de type fini sur S , $f : X \rightarrow Y$ un S -morphisme; on suppose X irréductible et f dominant. Si ξ (resp. η) est le point générique de X (resp. Y) et $e = \dim(f^{-1}(\eta)) = \deg. \text{tr}_{\mathbf{k}(\eta)} \mathbf{k}(\xi)$, on a

$$(10.6.1.1) \quad \dim(X) = \dim(Y) + e.$$

(iii) Soient X, Y deux S -préschémas localement de type fini sur S , $f : X \rightarrow Y$ un S -morphisme, n un entier ≥ 0 tel que l'on ait $\dim(f^{-1}(y)) \geq n$ (resp. $\dim(f^{-1}(y)) \leq n$) pour tout $y \in Y$. Alors on a

$$(10.6.1.2) \quad \dim(X) \geq \dim(Y) + n$$

(resp.

$$(10.6.1.3) \quad \dim(X) \leq \dim(Y) + n).$$

(i) La propriété 1° pour X résulte de (10.4.7). Pour tout $x \in X$, $\mathcal{O}_{X,x}$ est anneau local d'une $\mathcal{O}_{S,g(x)}$ -algèbre de type fini en un idéal premier, et l'homomorphisme $\mathcal{O}_{S,g(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$

est local; donc (5.6.3, (iv)) $\mathcal{O}_{X,x}$ est universellement caténaire. Pour démontrer que X vérifie la condition 3^o, considérons plusieurs cas :

a) X est un sous-préschéma fermé irréductible de S; soient S' une composante irréductible de S contenant X, ξ le point générique de X, x un point fermé de X; pour tout $s \in S'$, $\mathcal{O}_{S',s}$, quotient de $\mathcal{O}_{S,s}$, est caténaire (5.6.1), donc les conditions 2^o et 3^o entraînent que S' est biéquidimensionnel (0, 14.3.3). En vertu de (5.1.2) et de (0, 14.3.3.2), on a donc

$$\dim(\mathcal{O}_{X,x}) = \dim(\mathcal{O}_{S',x}) - \dim(\mathcal{O}_{S',\xi}) = \dim(S') - \dim(\mathcal{O}_{S',\xi})$$

ce qui prouve que $\dim(\mathcal{O}_{X,x})$ ne dépend pas du point fermé x considéré, d'où l'assertion dans ce cas (5.1.4).

b) X est irréductible et g dominant. Alors, pour tout point fermé x de X, $g(x)$ est fermé dans S par (10.4.7); comme $\mathcal{O}_{S,g(x)}$ est universellement caténaire, il résulte de (5.6.5.3) que l'on a

$$\dim(\mathcal{O}_{X,x}) = \dim(\mathcal{O}_{S,g(x)}) + e$$

où $e = \dim(g^{-1}(\zeta))$, ζ étant le point générique de S. Comme $\dim(S) = \dim(\mathcal{O}_{S,g(x)})$ en vertu de la condition 3^o pour S, on a $\dim(\mathcal{O}_{X,x}) = \dim(S) + e$ pour tout point fermé $x \in X$; cela prouve la condition 3^o pour X (5.1.4), et en même temps la formule

$$(10.6.1.4) \quad \dim(X) = \dim(S) + e.$$

c) Cas général. En considérant un sous-préschéma réduit X' de X ayant pour espace sous-jacent une composante irréductible de X, on est ramené au cas où X est intègre; utilisant (I, 5.2.2) et le cas a) prouvé ci-dessus, on peut ensuite remplacer S par le sous-préschéma réduit ayant $\overline{g(X)}$ pour espace sous-jacent; on est alors ramené au cas b), et cela achève de démontrer (i).

(ii) Le morphisme f étant localement de type fini (1.3.4), on peut appliquer les résultats de (i) en remplaçant S par Y; en outre, comme X est irréductible et f dominant, on peut aussi remplacer S par Y dans (10.6.1.4), ce qui donne (10.6.1.1).

(iii) L'assertion relative au cas où $\dim(f^{-1}(y)) \leq n$ pour tout $y \in Y$ a déjà été démontrée sous des hypothèses plus générales dans (5.6.7). Supposons que $\dim(f^{-1}(y)) \geq n$ pour tout $y \in Y$, et considérons un point générique η d'une composante irréductible Y' de Y; il existe au moins une composante irréductible Z de $f^{-1}(\eta)$ de dimension $\geq n$; si ξ est le point générique de Z, ξ est aussi point générique d'une composante irréductible X' de X telle que $f(X')$ soit dense dans Y' (0, 2.1.8). Considérons les sous-préschémas réduits de X, Y ayant respectivement pour espaces sous-jacents X', Y', et la restriction X' \rightarrow Y' de f (I, 5.2.2); il résulte alors de (ii) que $\dim(X') \geq \dim(Y') + n$, et a fortiori $\dim(X) \geq \dim(Y) + n$; ceci étant vrai pour toute composante irréductible Y' de Y, on en conclut l'inégalité (10.6.1.2).

Corollaire (10.6.2). — Supposons que X vérifie les conditions 1^o, 2^o et 3^o de (10.6.1). Alors, pour tout ouvert U dense dans X, on a $\dim(U) = \dim(X)$.

On sait en effet que $\dim(U) \leq \dim(X)$ (0, 14.1.4); en outre, comme X est un préschéma de Jacobson, U contient un point fermé de toute composante irréductible de X , donc $\dim(U) = \dim(X)$ en vertu de (10.6.1) et (0, 14.1.2.1).

Proposition (10.6.3). — *Supposons que X vérifie les conditions 1^o, 2^o et 3^o de (10.6.1), et soit Y une partie fermée de X . Alors, pour tout $x \in Y$, et tout voisinage ouvert U de x dans X ne rencontrant pas les composantes irréductibles de Y qui ne contiennent pas x , on a*

$$(10.6.3.1) \quad \dim_x(Y) = \dim(U \cap Y) = \dim(\overline{\{x\}}) + \underset{i}{\text{codim}}(\overline{\{x\}}, Y) = \sup \dim(Y_i)$$

où Y_i ($1 \leq i \leq m$) sont les composantes irréductibles de Y contenant x .

En considérant un sous-préschéma fermé de X ayant Y pour espace sous-jacent, on peut se borner, en vertu de (10.6.1, (i)), au cas où $Y = X$. En vertu du choix de U , U est réunion des $U \cap X_i$, donc $\dim(U) = \sup \dim(U \cap X_i)$; mais d'après (10.6.2)

appliqué à un sous-préschéma fermé de X ayant X_i pour espace sous-jacent, on a (compte tenu de (10.6.1, (i))), $\dim(U \cap X_i) = \dim(X_i)$; cela démontre que le second et le quatrième terme de (10.6.3.1) sont égaux. Comme $U \cap X_i$ est biéquidimensionnel (10.6.1, (i)) (puisque l'immersion $U \cap X_i \rightarrow X_i$ est de type fini (I, 6.3.5)), on a

$$(10.6.3.2) \quad \dim(X_i) = \dim(U \cap X_i) = \dim(U \cap \overline{\{x\}}) + \text{codim}(U \cap \overline{\{x\}}, U \cap X_i)$$

(0, 14.3.5). D'après (10.6.2) appliqué à un sous-préschéma fermé de X ayant $\overline{\{x\}}$ pour espace sous-jacent, $\dim(U \cap \overline{\{x\}}) = \dim(\overline{\{x\}})$; comme on a aussi, pour les mêmes raisons,

$$(10.6.3.3) \quad \dim(X_i) = \dim(\overline{\{x\}}) + \text{codim}(\overline{\{x\}}, X_i)$$

on obtient

$$\dim(U) = \dim(\overline{\{x\}}) + \sup \text{codim}(\overline{\{x\}}, X_i) = \dim(\overline{\{x\}}) + \text{codim}(\overline{\{x\}}, X)$$

par définition de la codimension (0, 14.2.1). Ceci montre que $\dim(U)$ est indépendante du voisinage ouvert U de x vérifiant les conditions de l'énoncé, donc est égal à $\dim_x(X)$, par (0, 14.1.4.1).

Corollaire (10.6.4). — *Sous les hypothèses de (10.6.3), soient \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -Module cohérent, Y son support. Pour tout $x \in Y$, on a*

$$(10.6.4.1) \quad \dim(\overline{\{x\}}) + \dim(\mathcal{F}_x) = \dim_x Y.$$

En effet, cela résulte de (10.6.3.1) et de la formule $\dim(\mathcal{F}_x) = \text{codim}(\overline{\{x\}}, Y)$ (5.1.12.2).

10.7. Exemples et contre-exemples.

(10.7.1) Soit S un préschéma localement noethérien de dimension ≤ 1 et supposons que S soit un préschéma de Jacobson; lorsque S est noethérien, il revient au même de dire que les composantes irréductibles de S de dimension 1 sont infinies, car tout $x \in S$ qui n'est pas fermé est le point générique d'une telle composante (10.4.5 et 10.5.4). Alors S vérifie aussi les conditions 2^o et 3^o de (10.6.1) : en effet, tout anneau local $\mathcal{O}_{s,s}$ est de dimension 0 ou 1, et par suite est universellement caténaire (7.2.9); d'autre part, une composante irréductible S' de S est, soit réduite

à un point, soit de dimension 1, et pour tout point fermé $s \in S$, $\mathcal{O}_{s',s}$ est nécessairement de dimension 1.

On déduit de ces remarques et de (10.6.1) que tout préschéma localement de type fini sur S vérifie aussi les propriétés 1°, 2° et 3° de (10.6.1) : il en est ainsi en particulier des préschémas *localement de type fini sur un corps ou sur \mathbf{Z}* .

(10.7.2) Soit A un anneau local noethérien *universellement caténaire* et soit S le complémentaire dans $X = \text{Spec}(A)$ du point fermé a . Alors S vérifie les conditions 1°, 2° et 3° de (10.6.1) : en effet, on a déjà vu que S est un préschéma de Jacobson (10.5.9); comme A est universellement caténaire, il en est de même des anneaux locaux $A_{\mathfrak{p}}$ aux idéaux premiers de A (5.6.3). D'autre part, une composante irréductible S' de S est le complémentaire de a dans une composante irréductible X' de X ; pour tout point fermé x de S , l'adhérence de x dans X est donc $\{x, a\}$, autrement dit $\dim(\overline{\{x\}}) = 1$ et par suite, puisque X' est par hypothèse biéquidimensionnel (0, 14.3.3), on a $\dim(\mathcal{O}_{X',x}) = \dim(X') - 1$ (0, 14.3.2), ce qui prouve que S' est équidimensionnel (5.1.4).

(10.7.3) Soit A un anneau de valuation discrète; montrons que dans l'anneau $B = A[T_1, \dots, T_n]$ des polynômes à n indéterminées, il existe deux idéaux maximaux $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ de hauteurs respectives n et $n+1$. On l'a vu dans (5.2.5, (i)) pour $n=1$; démontrons-le par récurrence sur n . Comme $A[T_1, \dots, T_{n+1}]$ est un $A[T_1, \dots, T_n]$ -module libre, donc fidèlement plat, il y a dans $A[T_1, \dots, T_{n+1}]$ deux idéaux maximaux $\mathfrak{m}', \mathfrak{n}'$ respectivement au-dessus de \mathfrak{m} et \mathfrak{n} (0, 6.5.1); en outre, d'après (5.5.3), ces idéaux sont nécessairement de hauteurs respectives $n+1$ et $n+2$, d'où notre assertion. Supposons $n \geq 2$ dans ce qui suit. Soit \mathfrak{J} l'idéal $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{n} = \mathfrak{m}\mathfrak{n}$, et $R = 1 + \mathfrak{J}$ qui est une partie multiplicative de B ; si l'on pose $B' = R^{-1}B$, l'idéal $\mathfrak{J}' = R^{-1}\mathfrak{J}$ est contenu dans le radical de B' (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 3, n° 5, prop. 12); on sait que $X' = \text{Spec}(B')$ s'identifie en tant qu'espace topologique à un sous-espace de $X = \text{Spec}(B)$, et qu'aux points x de X' , les anneaux locaux $\mathcal{O}_{x,x}$ et $\mathcal{O}_{X',x}$ sont les mêmes (I, 1.6.2). Considérons alors dans X' l'ensemble fermé $Y' = V(\mathfrak{J}')$, et soit $S = X' - Y'$; on sait (10.5.7) que S est un préschéma de Jacobson, évidemment irréductible et noethérien; en outre les anneaux locaux $\mathcal{O}_{s,s} = \mathcal{O}_{x,s}$ sont universellement caténaire pour tout $s \in S$ en vertu de (5.6.3), puisque A est universellement caténaire (5.6.4). Pourtant, il y a deux points fermés a, b de S tels que $\mathcal{O}_{s,a}$ et $\mathcal{O}_{s,b}$ n'aient pas même dimension, autrement dit S ne vérifie pas la condition 3° de (10.6.1). Pour le voir, considérons les deux idéaux maximaux $\mathfrak{m}' = R^{-1}\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}' = R^{-1}\mathfrak{n}$ de B' , qui sont de hauteurs n et $n+1$ respectivement; on a $\mathfrak{J}' = \mathfrak{m}' \cap \mathfrak{n}'$, et \mathfrak{J}' n'est donc contenu dans aucun idéal premier de B' distinct de \mathfrak{m}' et \mathfrak{n}' , qui sont par suite les seuls idéaux maximaux de B' . Soient a', b' les seuls points fermés de X' , correspondant à \mathfrak{m}' et \mathfrak{n}' . Il existe dans B' un idéal premier non maximal $\mathfrak{p}' \subset \mathfrak{m}'$ qui n'est pas contenu dans \mathfrak{n}' : il suffit de montrer qu'il y a dans B un idéal premier non maximal contenu dans \mathfrak{m} et non dans \mathfrak{n} ; pour cela, on pourra par exemple considérer la fibre de \mathfrak{m} pour le morphisme correspondant à l'injection $A[T_1] \rightarrow B = A[T_1, \dots, T_n]$, et appliquer (6.1.2). En considérant une chaîne maximale d'idéaux premiers entre \mathfrak{p}' et \mathfrak{m}' et remplaçant \mathfrak{p}' par l'avant-dernier idéal de cette chaîne, on peut donc supposer que le point a de X' correspondant à \mathfrak{p}' est tel que son adhérence dans X' soit $\{a, a'\}$; comme $B'_{\mathfrak{m}'}$ est biéquidimensionnel, \mathfrak{p}' est alors de hauteur $n-1$. On construit de la même manière un idéal premier non maximal \mathfrak{q}' de B' de hauteur n , tel que si b est le point correspondant de X' , l'adhérence de b dans X' soit $\{b, b'\}$. Cela étant, a et b sont dans S , donc fermés dans S , et répondent par suite à la question.

10.8. Profondeur rectifiée.

Définition (10.8.1). — Soient X un préschéma localement noethérien, \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -Module cohérent. Pour tout $x \in X$, on appelle *profondeur rectifiée de \mathcal{F} au point x* et on note $\text{prof}_x^*(\mathcal{F})$ le nombre (entier ≥ 0 ou $+\infty$) égal à

$$(10.8.1.1) \quad \text{prof}_x^*(\mathcal{F}) = \text{prof}(\mathcal{F}_x) + \dim(\overline{\{x\}})$$

où $\overline{\{x\}}$ est l'adhérence du point x dans X . Pour toute partie Z de X , on appelle *profondeur rectifiée de \mathcal{F} le long de Z* et on note $\text{prof}_Z^*(\mathcal{F})$ le nombre

$$(10.8.1.2) \quad \text{prof}_Z^*(\mathcal{F}) = \inf_{x \in Z} \text{prof}_x^*(\mathcal{F}).$$

En d'autres termes pour tout entier n , la relation $\text{prof}_Z^*(\mathcal{F}) \geq n$ équivaut à $\text{prof}_x^*(\mathcal{F}) \geq n$ pour tout $x \in Z$. Si $Z = X$, on écrit $\text{prof}^*(\mathcal{F})$ au lieu de $\text{prof}_X^*(\mathcal{F})$.

Remarques (10.8.2). — (i) En tout point fermé $x \in X$, la profondeur rectifiée est égale à la profondeur.

(ii) Soient Y un sous-préschéma fermé de X , $j : Y \rightarrow X$ l'injection canonique, \mathcal{G} un \mathcal{O}_Y -Module cohérent. On sait (5.7.3, (vi)) que l'on a $\text{prof}(\mathcal{G}_x) = \text{prof}(j_* \mathcal{G})_x$ pour tout $x \in Y$; on en déduit que l'on a aussi $\text{prof}_x^*(\mathcal{G}) = \text{prof}_x^*(j_* \mathcal{G})$ pour tout $x \in Y$.

(iii) La notion de profondeur rectifiée n'a d'intérêt que lorsqu'elle est de caractère local, c'est-à-dire qu'elle ne change pas lorsqu'on remplace X par un voisinage ouvert arbitraire U de x . Cela exige évidemment que x ne soit pas isolé dans $\overline{\{x\}}$ lorsque x n'est pas fermé et par suite que X soit un *préschéma de Jacobson* (10.4.5.1); le plus souvent, il sera aussi nécessaire de savoir que $\dim(U) = \dim(X)$ pour tout ouvert dense U dans X , et il faudra donc supposer que X vérifie aussi les conditions 2° et 3° de (10.6.1).

Lemme (10.8.3). — Soient X un *préschéma régulier et biéquidimensionnel*, \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -Module cohérent. Alors on a, pour tout $x \in X$,

$$(10.8.3.1) \quad \text{prof}_x^*(\mathcal{F}) = \dim(X) - \dim \cdot \text{proj}(\mathcal{F}_x).$$

En effet, comme X est biéquidimensionnel, on a (0, 14.3.5.1)

$$\dim(\overline{\{x\}}) = \dim(X) - \text{codim}(\overline{\{x\}}, X) = \dim(X) - \dim(\mathcal{O}_{X,x})$$

en vertu de (5.1.2). D'autre part, comme X est régulier, on a par (0, 17.3.4)

$$\text{prof}(\mathcal{F}_x) = \dim(\mathcal{O}_{X,x}) - \dim \cdot \text{proj}(\mathcal{F}_x)$$

d'où le lemme.

Corollaire (10.8.4). — Sous les hypothèses de (10.8.3), la fonction $x \mapsto \text{prof}_x^*(\mathcal{F})$ est *semi-continue inférieurement*.

Cela résulte de (10.8.3.1), puisque $x \mapsto \dim \cdot \text{proj}(\mathcal{F}_x)$ est *semi-continue supérieurement* (6.11.1).

Proposition (10.8.5). — Soient S un *préschéma localement noethérien*, X un *préschéma localement de type fini sur S* , \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -Module cohérent. On suppose que S vérifie les conditions suivantes : 1° S est un *préschéma de Jacobson*; 2° S est *régulier*; 3° les composantes irréductibles de S sont *équicodimensionnelles*. Alors la fonction $x \mapsto \text{prof}_x^*(\mathcal{F})$ est *semi-continue inférieurement dans X* ; autrement dit, pour tout entier n , l'ensemble U_n des $x \in X$ tels que $\text{prof}_x^*(\mathcal{F}) \geq n$ est ouvert.

Comme les anneaux locaux $\mathcal{O}_{s,s}$ de S sont réguliers, ils sont universellement caténaux (5.6.4); autrement dit, S vérifie les conditions 1°, 2° et 3° de (10.6.1), donc il en est de même de X (10.6.1, (i)). La notion de profondeur rectifiée étant alors de caractère local (10.8.2, (iii)), on peut se borner au cas où $S = \text{Spec}(A)$ et $X = \text{Spec}(B)$ sont affines, A étant un anneau régulier et B une A -algèbre de type fini, donc quotient d'un anneau de polynômes $C = A[T_1, \dots, T_n]$, et ce dernier est régulier (0, 17.3.7). On peut donc supposer que X est un sous-préschéma fermé d'un préschéma régulier Y vérifiant également les conditions 1°, 2° et 3° de (10.6.1); compte tenu de la remarque (10.8.2, (ii)), on est ainsi ramené au cas où X est en outre régulier et noethérien. Mais comme les anneaux locaux de X sont alors intègres, les composantes irréductibles de X sont

ouvertes (I, 6.1.10), et on peut par suite supposer aussi X irréductible. Alors, comme les anneaux locaux de X sont caténaire (0, 16.5.12), l'hypothèse 3^o de (10.6.1) entraîne que X est biéquadimensionnel ((5.1.5) et (0, 14.3.3)); il suffit donc d'appliquer (10.8.4).

On notera que si S est le spectre d'un corps ou de \mathbf{Z} , il vérifie les conditions de (10.8.5).

Corollaire (10.8.6). — *Les hypothèses étant celles de (10.8.5), pour tout $x \in X$, le nombre $\text{prof}_x^*(\mathcal{F})$ est l'unique entier n ayant la propriété suivante : il existe un voisinage ouvert U de x dans X tel que pour tout point $x' \in U \cap \overline{\{x\}}$, fermé dans U , on ait $\text{prof}(\mathcal{F}_{x'}) = n$. En particulier, pour que $\text{prof}_x^*(\mathcal{F}) \geq m$ (resp. $\text{prof}_x^*(\mathcal{F}) \leq m$), il faut et il suffit qu'il existe un voisinage ouvert V de x dans X tel que, pour tout $x' \in V \cap \overline{\{x\}}$, fermé dans V , on ait $\text{prof}(\mathcal{F}_{x'}) \geq m$ (resp. $\text{prof}(\mathcal{F}_{x'}) \leq m$).*

En effet, on peut se borner au cas où x n'est pas fermé; si $\text{prof}_x^*(\mathcal{F}) = n$, l'ensemble des $y \in X$ tels que $\text{prof}_y^*(\mathcal{F}) \leq n$ est fermé en vertu de (10.8.5), donc contient $\overline{\{x\}}$, et en vertu de la semi-continuité inférieure de $y \mapsto \text{prof}_y^*(\mathcal{F})$, il existe un voisinage ouvert U de x tel que $\text{prof}_y^*(\mathcal{F}) = n$ pour tout $y \in U \cap \overline{\{x\}}$, donc $\text{prof}(\mathcal{F}_{x'}) = n$ si $x' \in U \cap \overline{\{x\}}$ est fermé dans U (puisque la notion de profondeur rectifiée est locale).

Pour les préschémas vérifiant les hypothèses de (10.8.5), la notion de profondeur rectifiée peut donc se définir à l'aide des valeurs de la profondeur aux points fermés de X (ces derniers formant un ensemble très dense dans toute partie fermée de X).

Proposition (10.8.7). — *Soit S un préschéma localement noethérien vérifiant les conditions 1^o, 2^o et 3^o de (10.6.1). Soient X un préschéma localement de type fini sur S , \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -Module cohérent, $Y = \text{Supp}(\mathcal{F})$. Alors, pour tout $x \in Y$, on a*

$$(10.8.7.1) \quad \text{prof}_x^*(\mathcal{F}) = \dim_x(Y) - \text{coprof}(\mathcal{F}_x).$$

En effet, par définition, on a $\text{coprof}(\mathcal{F}_x) = \dim(\mathcal{F}_x) - \text{prof}(\mathcal{F}_x)$, et il résulte de (10.6.4) que l'on a $\dim_x(Y) = \dim(\overline{\{x\}}) + \dim(\mathcal{F}_x)$; d'où (10.8.7.1) par définition de $\text{prof}_x^*(\mathcal{F})$.

Corollaire (10.8.8). — *Les hypothèses sur f et \mathcal{F} étant celles de (9.9.1), la fonction $x \mapsto \text{prof}_x^*(\mathcal{F}_{f(x)})$ est constructible.*

Notons que pour tout $s \in S$, la fibre X_s étant un préschéma localement de type fini sur $k(s)$, est un préschéma de Jacobson (10.4.7); comme en outre $\text{Spec}(k(s))$ vérifie les conditions de (10.6.1), on a $\text{prof}_x^*(\mathcal{F}_{f(x)}) = \dim_x(\text{Supp}(\mathcal{F}_{f(x)})) - \text{coprof}((\mathcal{F}_{f(x)})_x)$ (10.8.7). Or, si $Z = \text{Supp}(\mathcal{F})$, on a $Z_{f(x)} = \text{Supp}(\mathcal{F}_{f(x)})$ (I, 9.1.13) et Z est localement constructible (8.9.1); donc les fonctions $x \mapsto \dim_x(\text{Supp}(\mathcal{F}_{f(x)}))$ et $x \mapsto \text{coprof}((\mathcal{F}_{f(x)})_x)$ sont localement constructibles ((9.9.1) et (9.9.3)), ce qui prouve la proposition.

10.9. Spectres maximaux et ultrapréschémas.

Les résultats de ce numéro ne seront pas utilisés par la suite.

(10.9.1) Soit X un préschéma de Jacobson, et soit $S(X)$ l'espace annelé dont l'espace sous-jacent est le sous-espace des points fermés de X , et le faisceau d'anneaux le faisceau induit sur ce sous-espace par \mathcal{O}_X , autrement dit le faisceau d'anneaux $\psi^*(\mathcal{O}_X)$, en désignant par $\psi : S(X) \rightarrow X$ l'injection canonique. Comme ψ est un quasi-

homéomorphisme, on a vu (10.2.8, (ii)) que si $\theta : \mathcal{O}_x \rightarrow \psi_*(\mathcal{O}_{S(x)})$ est l'homomorphisme de faisceaux d'anneaux tel que $\theta^\# : \psi^*(\mathcal{O}_x) \rightarrow \mathcal{O}_{S(x)}$ soit l'identité, alors $j_x = (\psi, \theta)$ est un *quasi-isomorphisme* d'espaces annelés, et $\mathcal{F} \mapsto j_x^*(\mathcal{F})$ une équivalence de la catégorie des \mathcal{O}_x -Modules et de celle des $\mathcal{O}_{S(x)}$ -Modules. Il est clair que dans cette équivalence, aux \mathcal{O}_x -Modules localement libres (resp. cohérents) correspondent les $\mathcal{O}_{S(x)}$ -Modules localement libres (resp. cohérents); en outre, si \mathcal{L} est un \mathcal{O}_x -Module localement libre et si U est un ouvert de X tel que $\mathcal{L}|_U$ soit isomorphe à $(\mathcal{O}_x|_U)^n$, $j_x^*(\mathcal{L})$ est tel que $j_x^*(\mathcal{L})|(U \cap S(X))$ soit isomorphe à $(\mathcal{O}_{S(x)}|(U \cap S(X)))^n$.

(10.9.2) Soient X, Y deux préschémas de Jacobson et $f = (\rho, \lambda) : X \rightarrow Y$ un morphisme *localement de type fini*. On a vu (10.4.7) que l'on a $\rho(S(X)) \subset S(Y)$ et par restriction de ρ à $S(X)$, on définit donc une application continue $S(\rho) : S(X) \rightarrow S(Y)$. D'autre part, pour tout ouvert V de Y , on définit par composition un homomorphisme d'anneaux

$$\Gamma(V \cap S(Y), \mathcal{O}_{S(Y)}) \xrightarrow{\lambda_V} \Gamma(f^{-1}(V), \mathcal{O}_X) \rightarrow \Gamma(f^{-1}(V) \cap S(X), \mathcal{O}_{S(X)})$$

où les deux isomorphismes extrêmes ont été définis dans (10.9.1); il est clair que cela définit un homomorphisme de faisceaux d'anneaux $S(\lambda) : \mathcal{O}_{S(Y)} \rightarrow \rho_*(\mathcal{O}_{S(X)})$ (en se rappelant que les ouverts de $S(X)$ (resp. $S(Y)$) correspondent biunivoquement à ceux de X (resp. Y) (10.2.1)); on obtient ainsi un morphisme d'espaces annelés $S(f) = (S(\rho), S(\lambda)) : (S(X), \mathcal{O}_{S(X)}) \rightarrow (S(Y), \mathcal{O}_{S(Y)})$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} S(X) & \xrightarrow{S(f)} & S(Y) \\ j_x \downarrow & & \downarrow j_y \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

soit commutatif; en outre, si Z est un troisième préschéma de Jacobson et $g : Y \rightarrow Z$ un morphisme *localement de type fini*, il est clair que $S(g \circ f) = S(g) \circ S(f)$. On a ainsi défini un *foncteur covariant* $S : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$, où \mathcal{C}' est la catégorie des *espaces annelés en anneaux locaux*, et \mathcal{C} la catégorie dont les objets sont les *préschémas de Jacobson* et les morphismes sont les morphismes *localement de type fini* entre préschémas de Jacobson.

(10.9.3) Proposons-nous de déterminer la sous-catégorie \mathcal{C}'' de \mathcal{C}' formée des espaces annelés isomorphes aux $S(X)$ et dont les morphismes proviennent des $S(f)$. Supposons d'abord que $X = \text{Spec}(A)$, où A est un anneau de Jacobson; alors $S(X)$ est l'ensemble des *idéaux maximaux* de A , muni : 1° de la topologie induite par celle de X , de sorte qu'une base de cette topologie est formée des $D^m(h) = D(h) \cap S(X)$, ensemble des idéaux maximaux \mathfrak{m} de A tels que $h \notin \mathfrak{m}$, où h parcourt A ; 2° du faisceau d'anneaux $\mathcal{O}_{S(X)}$ tel que $\Gamma(D^m(h), \mathcal{O}_{S(X)}) = A_f$. Nous dirons que cet espace annelé est le *spectre maximal* de l'anneau de Jacobson A et nous le noterons $\text{Spm}(A)$.

On notera que si $j : D(h) \rightarrow X$ est l'injection canonique, l'espace annelé induit sur $D^m(h)$ par $S(X)$ est $S(D(h))$ et l'injection canonique $D^m(h) \rightarrow S(X)$ d'espaces annelés est égale à $S(j)$.

Soient B un second anneau de Jacobson, $Y = \text{Spec}(B)$, $\varphi : B \rightarrow A$ un homomorphisme d'anneaux faisant de A une B -algèbre *de type fini*, $f = ({}^a\varphi, \widetilde{\varphi}) : X \rightarrow Y$ le morphisme correspondant de préschémas, et

$$S(f) : \text{Spm}(A) \rightarrow \text{Spm}(B)$$

le morphisme d'espaces annelés correspondant à f . Il est clair que $S(f) = (\psi, \theta)$ est un morphisme d'espaces annelés en anneaux locaux, c'est-à-dire (Erf_{II}, 1.8.2) que pour tout $x \in \text{Spm}(A)$, $\theta_x^\#$ est un homomorphisme *local*. Réciproquement :

Proposition (10.9.4). — Soient A, B deux anneaux de Jacobson. Si $u = (\psi, \theta) : \text{Spm}(A) \rightarrow \text{Spm}(B)$ est un morphisme d'espaces annelés en anneaux locaux tel que $\Gamma(\theta) : B \rightarrow A$ fasse de A une B -algèbre *de type fini*, il existe un morphisme de préschémas $f : \text{Spec}(A) \rightarrow \text{Spec}(B)$ et un seul tel que $u = S(f)$.

L'unicité de f est évidente, puisque si $f = ({}^a\varphi, \widetilde{\varphi})$, on doit avoir $\varphi = \Gamma(\theta)$; il reste à voir que $S(f)$ est défini et qu'on a bien $u = S(f)$. Or, la première assertion résulte de ce que φ est supposé faire de A une B -algèbre *de type fini*, et par suite $f(\text{Spm}(A)) \subset \text{Spm}(B)$; le fait que $\theta_x^\#$ est un homomorphisme local pour tout $x \in \text{Spm}(A)$ permet alors de répéter le raisonnement de (I, 1.7.3) en se bornant aux points x de $\text{Spm}(A)$: on montre ainsi successivement que $\psi(x) = {}^a\varphi(x)$ pour tout $x \in \text{Spm}(A)$, puis que $\theta_x^\# = \varphi_x : B_{\cdot(x)} \rightarrow A_x$, ce qui achève de prouver que $u = S(f)$.

(10.9.5) Considérons maintenant un espace annelé (X, \mathcal{O}_X) ; nous dirons qu'une partie ouverte U de X est *ultra-affine* si l'espace annelé induit $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ est isomorphe à un spectre maximal $\text{Spm}(A)$, où A est un anneau de Jacobson. Nous dirons que X est un *ultra-préschéma* si tout point de X admet un voisinage ouvert ultra-affine. On montre, comme dans (I, 2.1.3 et 2.1.4) que les ouverts ultra-affines forment une *base* de la topologie de X et que X est un espace de Kolmogoroff. Si Y est un second ultra-préschéma, nous dirons qu'un morphisme d'espaces annelés $f: X \rightarrow Y$ est un *morphisme d'ultra-préschémas* s'il vérifie les conditions suivantes : 1° f est un morphisme d'espaces annelés en anneaux locaux; 2° pour tout $x \in X$, il y a un voisinage ouvert ultra-affine V de $f(x)$ dans Y et un voisinage ouvert ultra-affine U de x dans X tels que $f(U) \subset V$ et que l'homomorphisme $\Gamma(V, \mathcal{O}_Y) \rightarrow \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ correspondant à f fasse de $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ une $\Gamma(V, \mathcal{O}_Y)$ -algèbre de type fini.

Il est immédiat qu'on définit bien ainsi des morphismes, le composé de deux morphismes en étant un troisième grâce à la remarque finale de (10.9.3). Il est clair que la catégorie C''_0 ainsi définie est une sous-catégorie de C' qui contient C'' ; nous nous proposons de montrer que $C'' = C''_0$, autrement dit :

Proposition (10.9.6). — *Le foncteur $X \rightsquigarrow S(X)$ de C dans C''_0 est une équivalence de catégories.*

1° Montrons d'abord que le foncteur $X \rightsquigarrow S(X)$ est *pleinement fidèle*, autrement dit que pour X, Y dans C , l'application canonique

$$\text{Hom}_C(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{C''_0}(S(X), S(Y))$$

est *bijective*. En premier lieu elle est *injective* : soient en effet f, g deux morphismes localement de type fini de X dans Y et supposons que $S(f) = S(g)$. Cela entraîne d'abord que pour tout ouvert V de Y , on a $f^{-1}(V) \cap S(X) = g^{-1}(V) \cap S(X)$, donc (10.3.1 et 10.2.7) $f^{-1}(V) = g^{-1}(V)$; il suffit donc de prouver que pour tout ouvert affine V de Y , f et g coïncident dans $f^{-1}(V) = g^{-1}(V)$, autrement dit, on est ramené au cas où $Y = \text{Spec}(B)$ est le spectre d'un anneau de Jacobson B . Il suffit (I, 2.2.4) de montrer que les homomorphismes d'anneaux $B \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ correspondant à f et g sont alors les mêmes. Or, pour tout $s \in B$, les images de s par ces homomorphismes sont deux sections de \mathcal{O}_X au-dessus de X qui, par hypothèse, induisent la même section au-dessus de $S(X)$; on sait donc (10.2.8) que ces sections sont identiques, d'où notre assertion. Prouvons en second lieu que tout morphisme $h: S(X) \rightarrow S(Y)$ (pour la catégorie C''_0) est de la forme $S(f)$, où $f: X \rightarrow Y$ est un morphisme localement de type fini. Par hypothèse, il existe un recouvrement ouvert ultra-affine (U') (resp. (V'_μ)) de $S(X)$ (resp. $S(Y)$) tel que pour tout λ , $h(U'_\lambda)$ soit contenu dans un V'_μ et qu'il corresponde au morphisme $h_\lambda: U'_\lambda \rightarrow V'_\mu$, restriction de h , un homomorphisme d'anneaux $\Gamma(V'_\mu, \mathcal{O}_{S(Y)}) \rightarrow \Gamma(U'_\lambda, \mathcal{O}_{S(X)})$ faisant du second anneau une algèbre de type fini sur le premier. On peut supposer que $U' = U_\lambda \cap S(X)$ et $V'_\mu = V_\mu \cap S(Y)$, où U_λ et V_μ sont des ouverts affines *uniquement déterminés* dans X et Y respectivement; si l'on prouve que, pour tout λ , $h_\lambda = S(f_\lambda)$ où $f_\lambda: U_\lambda \rightarrow V_\mu$ est un morphisme de type fini, alors il résulte de la première partie du raisonnement, appliquée aux restrictions de f_α et f_β à $U_\alpha \cap U_\beta$, que les f_λ sont les restrictions d'un même morphisme $f: X \rightarrow Y$, et on aura évidemment $h = S(f)$. On est ainsi ramené au cas où X et Y sont affines, et la conclusion résulte alors de (10.9.4).

2° Il reste à prouver que tout ultra-préschéma X' est de la forme $S(X)$ pour un préschéma de Jacobson X (qui sera nécessairement unique à isomorphisme près, en vertu de 1°). Il y a un recouvrement (U'_α) de X' par des ouverts ultra-affines, dont chacun est de la forme $S(U_\alpha)$, U_α étant le spectre d'un anneau de Jacobson. Pour tout couple d'indices α, β , considérons l'unique ouvert $U_{\alpha\beta}$ de U_α dont la trace sur U'_α est $U'_\alpha \cap U'_\beta$; en vertu de 1°, l'automorphisme identique de $U'_\alpha \cap U'_\beta$ est de la forme $S(\theta_{\alpha\beta})$, où $\theta_{\alpha\beta}: U_{\alpha\beta} \rightarrow U_{\beta\alpha}$ est un isomorphisme de préschémas. On constate aussitôt (en vertu du 1°) que la famille $(\theta_{\alpha\beta})$ vérifie la condition de recollement (0₁, 4.1.7), et que cette famille définit donc un préschéma X , tel que les U_α s'identifient à des ouverts affines de X ; il est clair alors que l'on a $X' = S(X)$, ce qui achève la démonstration.

10.10. Espaces algébriques de Serre.

(10.10.1) Le langage introduit par Serre dans (FAC) est parfois commode, notamment dans les questions où l'intérêt majeur s'attache aux points rationnels sur le corps de base k (algébriquement clos par hypothèse) des « variétés algébriques » sur k que l'on considère. Nous allons esquisser ici ce langage en le rattachant aux considérations qui précèdent, pour permettre au lecteur de traduire les énoncés de Serre en langage des schémas. Il est d'ailleurs possible de développer le langage de Serre également pour des préschémas sur un corps non algébriquement clos (et même sur un anneau artinien); mais cela introduit des complications techniques considérables, et d'ailleurs, sur un corps de base arbitraire, les avantages (surtout psychologiques) du point de vue de Serre disparaissent; aussi

nous tiendrons-nous dans le cadre fixé par Serre. Le présent numéro, tout comme le précédent, ne sera d'ailleurs pas utilisé dans la suite de ce Traité, et nous nous bornerons donc à de brèves indications.

(10.10.2) Étant donné un ultra-préschéma fixe R , on peut naturellement (comme dans toute catégorie) définir la notion de R -*ultra-préschéma*. Considérons en particulier un *corps algébriquement clos* k ; $\text{Spm}(k)$ est alors identique à $\text{Spec}(k)$; nous dirons qu'un $\text{Spm}(k)$ -ultra-préschéma X' est un *espace préalgébrique sur k* : c'est donc un espace k -annelé en anneaux locaux dont tout point a un voisinage ouvert isomorphe au spectre maximal d'une k -algèbre de type fini; il revient au même de dire (par (10.9.6)) que $X' = S(X)$, où X est un préschéma localement de type fini sur k . Si X, Y, Z sont trois k -préschémas localement de type fini, il en est de même de $X \times_Z Y$ (1.3.4), donc en vertu de (10.9.6), la notion de produit existe dans la catégorie des espaces préalgébriques sur k (aussi bien le produit « sur k » $X' \times_k Y'$ que le « produit fibré » $X' \times_{Z'} Y'$, où X', Y', Z' sont trois espaces préalgébriques sur k). On peut donc définir le morphisme diagonal $\Delta_{X'} : X' \rightarrow X' \times_k X'$ (qui n'est autre d'ailleurs que $S(\Delta_X)$); on dit que X' est un *espace algébrique sur k* si X est un schéma, et il revient au même de dire que l'image de $\Delta_{X'}$ est une partie *fermée* de $X' \times_k X'$.

(10.10.3) Les simplifications qui proviennent de l'hypothèse que k est algébriquement clos tiennent d'abord à ce que, pour un k -préschéma X , localement de type fini, il y a correspondance biunivoque entre *points fermés* de X , *points de X à valeurs dans k* (I, 3.4.4) et *points de X rationnels sur k* (I, 3.4.5), en vertu de (I, 6.4.2). Cela montre en particulier (en vertu de (I, 3.4.3.1)) que pour deux espaces k -préalgebriques X', Y' , l'ensemble sous-jacent au produit $X' \times_k Y'$ est identique à l'ensemble produit $X' \times Y'$ des ensembles sous-jacents (mais bien entendu la topologie de l'espace sous-jacent à $X' \times_k Y'$ n'est pas la topologie produit des topologies des espaces sous-jacents à X' et Y' , elle est en général strictement plus fine que cette dernière).

D'autre part, les anneaux locaux \mathcal{O}_x aux points d'un espace préalgébrique X' sur k sont des k -algèbres dont on vient de voir que le corps résiduel est isomorphe à k ; si A et B sont deux telles k -algèbres locales, tout k -homomorphisme $\varphi : A \rightarrow B$ est nécessairement *local* : en effet, si un élément x de l'idéal maximal de A était tel que $\varphi(x)$ soit inversible, il existerait $\lambda \in k$ non nul tel que $\varphi(x - \lambda \cdot 1)$ appartienne à l'idéal maximal de B , ce qui est absurde puisque $x - \lambda \cdot 1$ est inversible dans A . On conclut aussitôt de là que si $X' = S(X), Y' = S(Y)$ sont deux espaces préalgébriques sur k , tout morphisme $X' \rightarrow Y'$ d'espaces k -annelés est aussi un morphisme d'espaces k -annelés en anneaux locaux (I, 1.8.2; cf. Err_{II}). D'ailleurs, avec les notations précédentes, si A et B sont des k -algèbres de type fini, φ fait de B une A -algèbre de type fini; donc tout morphisme $X' \rightarrow Y'$ de k -espaces annelés est, en vertu de (10.9.6), de la forme $S(f)$, où $f : X \rightarrow Y$ est un morphisme de k -préschémas.

Enfin, pour tout ouvert U de X' , toute section $s \in \Gamma(U, \mathcal{O}_{X'})$, et tout $x \in U$, $s(x)$ ($\mathbf{0}_1, 5.5.1$) s'identifie à un élément de k , et l'on a ainsi associé à s une application $\bar{s} : x \rightsquigarrow s(x)$ de U dans k , autrement dit une section au-dessus de U du faisceau $\mathcal{A}(X')$ des germes d'applications de X' dans k ; comme l'application $h_U : s \rightsquigarrow \bar{s}$ est évidemment un homomorphisme d'anneaux $\Gamma(U, \mathcal{O}_{X'}) \rightarrow \Gamma(U, \mathcal{A}(X'))$ et commute aux restrictions à un ouvert $V \subset U$, les h_U définissent un homomorphisme de faisceaux d'anneaux $h : \mathcal{O}_{X'} \rightarrow \mathcal{A}(X')$. Si l'on prend pour U un ouvert ultra-affine $\text{Spm}(A)$, où A est un anneau de Jacobson, dire que $\bar{s} = 0$ signifie que pour tout idéal maximal \mathfrak{m} de A , s appartient à \mathfrak{m} , ou encore que s est dans le radical de A ; mais comme A est un anneau de Jacobson, son radical est égal à son nilradical; pour que h_U soit injective, il faut et il suffit par suite que A soit réduit.

(10.10.4) On dit que l'espace k -préalgebrique $X' = S(X)$ est *réduit* s'il en est ainsi de X ; comme l'ensemble des points $x \in X$ où X est réduit est ouvert ($\mathbf{0}_1, 5.2.2$), son complémentaire contient au moins un point fermé s'il est non vide (5.1.11), et il revient donc au même de dire que X' est réduit ou que chacun de ses anneaux locaux \mathcal{O}_x (pour $x \in X'$) est réduit. On vient de voir dans (10.10.3) que pour que l'homomorphisme $h : \mathcal{O}_{X'} \rightarrow \mathcal{A}(X')$ soit *injectif*, il faut et il suffit que X' soit réduit. Dans (FAC), Serre se borne en fait aux espaces préalgébriques réduits, ce qui lui permet de définir $\mathcal{O}_{X'}$ comme un *sous-faisceau* de $\mathcal{A}(X')$. On notera que si X' et Y' sont des k -espaces préalgébriques réduits, il en est de même de $X' \times_k Y'$: en effet, tout revient à voir que si A et B sont deux k -algèbres de type fini réduites, il en est de même de $A \otimes_k B$; mais nous avons vu que les radicaux de A et B sont alors réduits à 0 , et comme k est algébriquement clos, A et B sont des algèbres « séparables » sur k au sens de Bourbaki (Bourbaki, *Alg.*, chap. VIII, § 7, n° 5, prop. 5); donc $A \otimes_k B$ est sans radical (*loc. cit.*, n° 6, cor. 3 du th. 3), et puisque c'est un anneau de Jacobson, il est réduit. Toutefois, si Z' est un troisième espace préalgébrique sur k , le « produit fibré » $X' \times_{Z'} Y'$ de deux espaces préalgébriques réduits sur Z' n'est pas réduit en général, ce qui implique que la catégorie de ces espaces est insuffisante dans de nombreuses questions (notamment dans la théorie des groupes algébriques). Mais comme on l'a vu ci-dessus, on peut garder le langage de Serre sans se limiter, comme ce dernier (qui en outre ne considère que des espaces préalgébriques *quasi-compacts*), au cas des espaces préalgébriques réduits.

(10.10.5) Enfin, on peut aussi considérer des ultra-préschémas sur un corps k quelconque en conservant un langage qui reste proche de celui de Serre, et en introduisant, comme chez Weil, une extension algébriquement close fixe K de k (choisie assez grande, par exemple de degré de transcendance infini sur k , pour avoir suffisamment de « points génériques » au sens de Weil). A tout préschéma X localement de type fini sur k , on associe alors l'ensemble $S_K(X) = S(X \otimes_k K)$ des points de X à valeurs dans K ; on a une application canonique $j : S_K(X) \rightarrow X$ que l'on démontre être un quasi-homéomorphisme quand on munit $S_K(X)$ de la topologie image réciproque de celle de X par j ; on munit $S_K(X)$ du faisceau de k -algèbres $j^*(\mathcal{O}_X)$, et on obtient ainsi une sous-catégorie de la catégorie des espaces k -annelés en anneaux locaux, que l'on pourrait appeler catégorie des (k, K) -espaces préalgébriques. On peut montrer qu'on y peut encore définir des produits et généraliser les résultats de (10.10.3) et (10.10.4) ($\mathcal{A}(X')$ étant ici remplacé par le faisceau $\mathcal{A}_K(X')$ des germes d'applications de X' dans K). Toutefois ce point de vue fait jouer un rôle artificiel à un surcorps arbitrairement choisi de k , et nous ne le signalons que pour le rejeter.

§ 11. PROPRIÉTÉS TOPOLOGIQUES DES MORPHISMES PLATS DE PRÉSENTATION FINIE. CRITÈRES DE PLATITUDE

Alors que dans le § 2 nous avons considéré les énoncés concernant la platitude qui ne dépendent d'aucune hypothèse de finitude, et que le § 6 étudie la notion de platitude dans le cadre des préschémas localement noethériens (mais sans hypothèse de finitude sur les morphismes), le présent paragraphe est consacré à la notion de f -platitude dans le cas où le morphisme $f : X \rightarrow Y$ est *localement de présentation finie*. L'intérêt de la notion de morphisme plat de présentation finie tient au fait que c'est elle qui semble exprimer techniquement de la façon la plus adéquate la notion intuitive de « famille de préschémas algébriques paramétrée par un schéma Y », dont l'étude est un des objets principaux de la Géométrie algébrique. D'ailleurs, alors même qu'on ne s'intéresserait au départ qu'au cas d'un schéma de base noethérien, il est indispensable, pour certaines raisons techniques (par exemple pour certaines applications de la théorie de la « descente », qui conduit à introduire des schémas non nécessairement noethériens) de ne pas se limiter à ce cas, dès qu'il s'agit de problèmes de nature essentiellement relative liés aux morphismes localement de présentation finie. Nous suivrons systématiquement ce principe, déjà étayé par les résultats des §§ 8 et 9, dans toute la suite de ce Chapitre, et même dans la suite de notre Traité, quitte à lui sacrifier à l'occasion la simplicité de certaines démonstrations, que des hypothèses noethériennes permettent parfois d'alléger ⁽¹⁾. Dans le présent paragraphe, cela nous conduit à reprendre, dans le contexte de la « présentation finie » (notamment au n° 3) certains énoncés de platitude, déjà obtenus dans le contexte noethérien. L'outil technique essentiel pour faire la réduction au cas noethérien est le théorème de compatibilité de la platitude avec les limites projectives de préschémas (11.2.6), complétant les résultats généraux du § 8. Nous prouvons aussi en passant (11.3.1) un résultat souvent utilisé

⁽¹⁾ Ce principe s'inspire également de la nécessité de donner droit de cité, comme « espaces de paramètres » pour les familles de schémas algébriques, à des espaces annelés (et même des « topos » annelés) quelconques, pour lesquels il ne peut plus être question en général d'hypothèses noethériennes. Il semble assez clair que l'on ne pourra plus éluder longtemps cette nouvelle extension de la Géométrie algébrique, et il convient dès à présent de développer les notions et techniques de nature « relative » de la théorie des schémas de sorte qu'elles puissent s'adapter pratiquement telles quelles à ce cadre plus général.

par la suite, impliquant que l'ensemble des points de platitude d'un morphisme localement de présentation finie est ouvert.

Dans les n^{os} 4 à 8, nous étudions la question de la « descente » de la platitude, consistant à trouver des conditions utiles sur un morphisme de changement de base $Y' \rightarrow Y$ (non plat en général) pour pouvoir conclure que si $X \times_Y Y'$ est plat sur Y' , X est plat sur Y . Ces résultats, plus techniques que ceux des n^{os} 1 à 3, sont d'une utilisation moins fréquente dans la suite ; ils joueront cependant un rôle important dans les techniques de construction non projectives, au chapitre suivant. Le seul résultat des n^{os} 4 à 8 utilisé dans la suite du chap. IV est le critère valuatif de platitude (11.8), qu'on appliquera dans (15.2).

Enfin, les n^{os} 9 et 10 sont consacrés à l'étude d'une notion qui précise, en théorie des schémas, celle de densité au sens topologique, savoir la notion de famille de sous-préschémas *schématiquement dense* dans un préschéma donné, et notamment l'étude du comportement de cette notion par changement de base (plat ou quelconque). Cette notion est surtout utilisée, pour l'instant, dans l'étude des schémas en groupes.

11.1. Ensembles de platitude (cas noethérien).

Théorème (11.1.1). — Soient Y un préschéma localement noethérien, $f: X \rightarrow Y$ un morphisme localement de type fini, \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -Module cohérent. Alors l'ensemble U des $x \in X$ tels que \mathcal{F} soit f -plat au point x est ouvert dans X .

La question étant évidemment locale sur X et Y , on peut supposer $Y = \text{Spec}(A)$, $X = \text{Spec}(B)$, A étant noethérien et B une A -algèbre de type fini. On a alors $\mathcal{F} = \widetilde{M}$, où M est un B -module de type fini. Appliquons le critère (0_{III}, 9.2.6) : il suffit donc de démontrer l'assertion suivante :

(11.1.1.1) Soient A un anneau noethérien, B une A -algèbre de type fini, M un B -module de type fini, \mathfrak{q} un idéal premier de B , \mathfrak{p} son image réciproque dans A . On suppose que $M_{\mathfrak{q}}$ soit un $A_{\mathfrak{p}}$ -module plat. Alors il existe $g \in B - \mathfrak{q}$ tel que, pour tout idéal premier $\mathfrak{q}' \supset \mathfrak{q}$ de B tel que $g \notin \mathfrak{q}'$, $M_{\mathfrak{q}'}$ soit un $A_{\mathfrak{p}'}$ -module plat, en désignant par \mathfrak{p}' l'image réciproque de \mathfrak{q}' dans A (il revient d'ailleurs au même (0_I, 6.3.1) de dire que $M_{\mathfrak{q}'}$ est un A -module plat).

Considérons pour cela $B_{\mathfrak{q}'}$ comme une A -algèbre ; on a évidemment $\mathfrak{p}B_{\mathfrak{q}'} \subset \mathfrak{q}'B_{\mathfrak{q}'}$. On sait alors (0_{III}, 10.2.2) que pour que $M_{\mathfrak{q}'}$ soit un A -module plat, il faut et il suffit que $M_{\mathfrak{q}'}/\mathfrak{p}M_{\mathfrak{q}'}$ soit un (A/\mathfrak{p}) -module plat et que l'on ait $\text{Tor}_1^A(M_{\mathfrak{q}'}, A/\mathfrak{p}) = 0$. Or, on a $M_{\mathfrak{q}'} = M \otimes_B B_{\mathfrak{q}'}$; $B_{\mathfrak{q}'}$ étant plat sur B , on a $M_{\mathfrak{q}'}/\mathfrak{p}M_{\mathfrak{q}'} = (M/\mathfrak{p}M)_{\mathfrak{q}'}$ et $\text{Tor}_1^A(M_{\mathfrak{q}'}, A/\mathfrak{p}) = (\text{Tor}_1^A(M, A/\mathfrak{p}))_{\mathfrak{q}'}$ (en définissant le Tor à l'aide d'une résolution projective de A/\mathfrak{p}) ; pour la même raison, comme on doit avoir $g \notin \mathfrak{q}'$, $B_{\mathfrak{q}'}$ est plat sur B_g , donc $(M/\mathfrak{p}M)_{\mathfrak{q}'} = ((M/\mathfrak{p}M)_g)_{\mathfrak{q}'B_g}$ et $(\text{Tor}_1^A(M, A/\mathfrak{p}))_{\mathfrak{q}'} = ((\text{Tor}_1^A(M, A/\mathfrak{p}))_g)_{\mathfrak{q}'B_g}$, où dans ces formules, $M/\mathfrak{p}M$ et $\text{Tor}_1^A(M, A/\mathfrak{p})$ sont considérés comme des B -modules. Compte tenu de (0_I, 6.3.2), on voit qu'on est ramené à prouver le

Lemme (11.1.1.2). — Sous les conditions de (11.1.1.1), il existe $g \in B - \mathfrak{q}$ tel que :
(i) $(M/\mathfrak{p}M)_g$ soit un (A/\mathfrak{p}) -module plat ; (ii) $(\text{Tor}_1^A(M, A/\mathfrak{p}))_g = 0$.

En vertu du théorème de platitude générique (6.9.1) appliqué à l'anneau intègre A/p , à la (A/p) -algèbre de type fini B/pB et au (B/pB) -module de type fini M/pM , il existe un $h \in A - p$ tel que, si \bar{h} est son image canonique dans A/p , $(M/pM)_{\bar{h}}$ soit un (A/p) -module plat. D'autre part, comme M_q est un A_p -module plat, et par suite un A -module plat ($\mathbf{0}_I, 6.3.1$), on a $\text{Tor}_1^A(M_q, A/p) = 0$, ce qui s'écrit aussi $(\text{Tor}_1^A(M, A/p))_q = 0$. Mais comme A et B sont noethériens, $\text{Tor}_1^A(M, A/p)$ est un B -module de type fini, donc ($\mathbf{0}_I, 5.2.2$) il existe $g \in B - q$ tel que $(\text{Tor}_1^A(M, A/p))_g = 0$. D'ailleurs, on a $(M/pM)_{\bar{h}} = (M/pM)_h$ (M/pM étant considéré dans le second membre comme un A -module); de plus, $(M/pM)_h$ étant un B -module, $(M/pM)_{hg}$ est encore un (A/p) -module plat, car il s'écrit $(M/pM)_{\overline{hg}}$, où \overline{hg} est l'image canonique de hg dans B/pB , et il suffit d'appliquer ($\mathbf{0}_I, 6.3.2$); enfin, on a $(\text{Tor}_1^A(M, A/p))_{hg} = 0$ et $hg \in B - q$ puisque $h \in A - p$. C.Q.F.D.

Corollaire (II.1.2). — Soient Y un préschéma localement noethérien, $f: X \rightarrow Y$ un morphisme localement de type fini, $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ deux \mathcal{O}_X -Modules cohérents, $u: \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F}$ un homomorphisme de \mathcal{O}_X -Modules. On suppose que \mathcal{F} est f -plat. Alors l'ensemble U des $x \in X$ tels que, en posant $y = f(x)$, l'homomorphisme $u_x \otimes 1: \mathcal{F}'_x \otimes_{\mathcal{O}_y} \mathbf{k}(y) \rightarrow \mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_y} \mathbf{k}(y)$ soit injectif, est ouvert dans X .

En effet, soit \mathcal{N} (resp. \mathcal{P}) le noyau (resp. le conoyau) de u ; appliquons ($\mathbf{0}_{III}, 10.2.4$)⁽¹⁾ aux anneaux locaux \mathcal{O}_y et \mathcal{O}_x et aux \mathcal{O}_x -modules \mathcal{F}'_x et \mathcal{F}_x : dire que $u_x \otimes 1$ est injectif équivaut à dire que $\mathcal{N}_x = 0$ et que \mathcal{P} est f -plat au point x . Or comme \mathcal{N} et \mathcal{P} sont cohérents ($\mathbf{0}_I, 5.3.4$), l'ensemble des x où $\mathcal{N}_x = 0$ est ouvert ($\mathbf{0}_I, 5.2.2$), et l'ensemble des x où \mathcal{P} est f -plat est ouvert par (II.1.1); d'où la conclusion.

En particulier :

Corollaire (II.1.3). — Soient Y un préschéma localement noethérien, $f: X \rightarrow Y$ un morphisme plat et localement de type fini, g une section de \mathcal{O}_X au-dessus de X . L'ensemble des $x \in X$ tels que $g_x \otimes 1$ soit non diviseur de zéro dans $\mathcal{O}_x \otimes_{\mathcal{O}_{f(x)}} \mathbf{k}(f(x))$ est ouvert dans X .

Il suffit d'appliquer (II.1.2) à l'endomorphisme de \mathcal{O}_X défini par g .

Corollaire (II.1.4). — Soient Y un préschéma localement noethérien, $f: X \rightarrow Y$ un morphisme localement de type fini, \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -Module cohérent et f -plat. Soit $(g_i)_{1 \leq i \leq n}$ une suite de sections de \mathcal{O}_X au-dessus de X . Alors l'ensemble U des $x \in X$ tels que la suite $((g_i)_x \otimes 1)$ soit $(\mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_{f(x)}} \mathbf{k}(f(x)))$ -régulière est ouvert dans X .

Comme \mathcal{F} est f -plat, il résulte de ($\mathbf{0}, 15.1.16$) que U est aussi l'ensemble des $x \in X$

⁽¹⁾ Voici une démonstration de ($\mathbf{0}_{III}, 10.2.4$), qui n'a pas été publiée dans l'*Algèbre commutative* de N. Bourbaki. Compte tenu de ($\mathbf{0}_I, 6.1.2$), il suffit de voir que b) entraîne a). Posons $P = \text{Im}(u)$, $Q = \text{Coker}(u)$, $R = \text{Ker}(u)$. Le composé $M \otimes k \rightarrow P \otimes k \rightarrow N \otimes k$ est injectif, et $M \otimes k \rightarrow P \otimes k$ est surjectif, donc $P \otimes k \rightarrow N \otimes k$ est injectif et $M \otimes k \rightarrow P \otimes k$ est bijectif. La suite exacte $0 \rightarrow P \rightarrow N \rightarrow Q \rightarrow 0$ donne la suite exacte

$$0 = \text{Tor}_1^A(N, k) \rightarrow \text{Tor}_1^A(Q, k) \rightarrow P \otimes k \rightarrow N \otimes k \rightarrow Q \otimes k \rightarrow 0$$

et puisque $P \otimes k \rightarrow N \otimes k$ est injectif, on a $\text{Tor}_1^A(Q, k) = 0$; comme Q est un B -module de type fini, ($\mathbf{0}_{III}, 10.2.2$) montre que Q est un A -module plat; alors P est aussi un A -module plat par ($\mathbf{0}_I, 6.1.2$). La suite $0 \rightarrow R \rightarrow M \rightarrow P \rightarrow 0$ étant exacte, il en est de même de $0 \rightarrow R \otimes k \rightarrow M \otimes k \rightarrow P \otimes k \rightarrow 0$ par ($\mathbf{0}_I, 6.1.2$); puisque $M \otimes k \rightarrow P \otimes k$ est bijectif, on a $R \otimes k = 0$; mais comme B est noethérien, R est un B -module de type fini, donc on a $R = 0$ en vertu du lemme de Nakayama.

tels que la suite $(g_i)_x$ soit \mathcal{F}_x -régulière et que le \mathcal{O}_x -module \mathcal{G}_x (où $\mathcal{G} = \mathcal{F} / (\sum_{i=1}^n g_i \mathcal{F})$) soit f -plat. Mais \mathcal{F} et \mathcal{G} sont cohérents, donc le corollaire résulte de (II.1.1) et de (0, 15.2.4).

Corollaire (II.1.5). — Soient X, Y, Z trois préschémas localement noethériens, $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ deux morphismes de type fini, \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -Module cohérent. Alors l'ensemble U des $y \in Y$ tels que, pour toute générisation y' de y , \mathcal{F} soit $(g \circ f)$ -plat en tous les points de $f^{-1}(y')$ (i.e. tels que $\mathcal{F} \otimes_Y \text{Spec}(\mathcal{O}_{Y,y})$ soit plat relativement au morphisme $X \times_Y \text{Spec}(\mathcal{O}_{Y,y}) \rightarrow Z$) est ouvert dans Y .

Si V est l'ensemble des $x \in X$ où \mathcal{F} est $(g \circ f)$ -plat, U est l'ensemble des $y \in Y$ tels que pour toute générisation y' de y , on ait $f^{-1}(y') \subset V$. Or V est ouvert (II.1.1) donc localement constructible dans X , et l'ensemble W des $y \in Y$ tels que $f^{-1}(y) \subset V$ est égal à $Y - f(X - V)$, donc est aussi localement constructible dans Y en vertu du théorème de Chevalley (I.8.4). Mais il résulte alors de (0III, 9.2.5) que les points de U sont les points intérieurs à W , d'où la conclusion.

Corollaire (II.1.6). — Soient A un anneau noethérien, B une A -algèbre de type fini, C une B -algèbre de type fini, M un C -module de type fini. Alors l'ensemble des $\mathfrak{q} \in \text{Spec}(B)$ tels que $M_{\mathfrak{q}}$ soit un A -module plat est ouvert dans $\text{Spec}(B)$.

Compte tenu de (2.1.2), c'est une conséquence de (II.1.5) appliqué à $Z = \text{Spec}(A)$, $Y = \text{Spec}(B)$, $X = \text{Spec}(C)$, $\mathcal{F} = \tilde{M}$.

Les résultats de ce numéro seront débarrassés des hypothèses noethériennes dans (II.3).

II.2. Platitude d'une limite projective de préschémas.

(II.2.1) Soient A un anneau, M, N deux A -modules, A' une A -algèbre; posons $M' = M \otimes_A A'$, $N' = N \otimes_A A'$. Rappelons (III, 6.3.8) que l'on définit, pour tout i , un homomorphisme canonique de A -modules

$$(II.2.1.1) \quad \psi_i : \text{Tor}_i^A(M, N) \rightarrow \text{Tor}_i^{A'}(M', N')$$

de la façon suivante : on considère une résolution gauche de M par des A -modules libres

$$(II.2.1.2) \quad \dots \rightarrow L_{i+1} \xrightarrow{f_i} L_i \rightarrow \dots \rightarrow L_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \rightarrow 0$$

d'où l'on déduit par tensorisation avec A' un complexe de A' -modules

$$(II.2.1.3) \quad \dots \rightarrow L'_{i+1} \xrightarrow{f'_i} L'_i \rightarrow \dots \rightarrow L'_0 \xrightarrow{\varepsilon'} M' \rightarrow 0$$

où l'on a posé $L'_i = L_i \otimes_A A'$, $f'_i = f_i \otimes_{I_A}$, $\varepsilon' = \varepsilon \otimes_{I_A}$. Considérons d'autre part une résolution gauche de M' par des A' -modules libres

$$(II.2.1.4) \quad \dots \rightarrow L''_{i+1} \xrightarrow{f''_i} L''_i \rightarrow \dots \rightarrow L''_0 \xrightarrow{\varepsilon''} M' \rightarrow 0$$

Comme les L'_i sont des A' -modules *libres*, on sait $(M, V, 1.1)$ qu'il y a des A' -homomorphismes u_i formant un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \longrightarrow & L'_{i+1} & \xrightarrow{f_i} & L'_i & \longrightarrow & \dots \longrightarrow L'_0 \xrightarrow{\varepsilon'} M' \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow u_{i+1} & & \downarrow u_i & & \downarrow u_0 & \downarrow 1_{M'} \\
 \dots & \longrightarrow & L''_{i+1} & \xrightarrow{f'_i} & L''_i & \longrightarrow & \dots \longrightarrow L''_0 \xrightarrow{\varepsilon''} M' \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Si l'on compose l'homomorphisme $u_i : L'_i \rightarrow L''_i$ de complexes ainsi défini avec l'homomorphisme canonique $L_i \rightarrow L'_i$, on obtient un homomorphisme de complexes de A -modules $L_i \rightarrow L''_i$; en remarquant que l'on a $(L_i \otimes_A N) \otimes_{A'} A' = L'_i \otimes_{A'} N'$, on en déduit un homomorphisme de complexes de A -modules $L_i \otimes_A N \rightarrow L''_i \otimes_A N'$, d'où, en passant à l'homologie, les homomorphismes canoniques (11.2.1.1). Comme les u_i sont bien déterminés à homotopie près $(M, V, 1.1)$, les homomorphismes (11.2.1.1) ne dépendent pas du choix des u_i ni du choix des résolutions libres L_i et L''_i .

Comme les $\text{Tor}_i^{A'}(M', N')$ sont des A' -modules, on déduit canoniquement de (11.2.1.1) des A' -homomorphismes

$$(11.2.1.5) \quad \varphi_i : \text{Tor}_i^A(M, N) \otimes_{A'} A' \rightarrow \text{Tor}_i^{A'}(M', N').$$

Considérons maintenant deux homomorphismes d'anneaux

$$\rho : A \rightarrow A^{(1)}, \quad \sigma : A^{(1)} \rightarrow A^{(2)},$$

et leur composé $\sigma \circ \rho : A \rightarrow A^{(2)}$; posons $M^{(j)} = M \otimes_A A^{(j)}$, $N^{(j)} = N \otimes_A A^{(j)}$ pour $j = 1, 2$. Alors l'homomorphisme canonique composé

$$\text{Tor}_i^A(M, N) \rightarrow \text{Tor}_i^{A^{(1)}}(M^{(1)}, N^{(1)}) \rightarrow \text{Tor}_i^{A^{(2)}}(M^{(2)}, N^{(2)})$$

est le même que l'homomorphisme canonique déduit de $\sigma \circ \rho$; cela résulte de ce que, si $L^{(j)}$ est une résolution libre de $M^{(j)}$, le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 L_i & \longrightarrow & L_i \otimes_A A^{(1)} & \longrightarrow & L_i^{(1)} \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & L_i \otimes_A A^{(2)} & \longrightarrow & L_i^{(1)} \otimes_{A^{(1)}} A^{(2)} \longrightarrow L_i^{(2)}
 \end{array}$$

est commutatif.

(11.2.2) Les notations étant celles de (11.2.1), considérons maintenant un *système inductif* filtrant de A -algèbres $(A_\alpha, g_{\beta\alpha})$, et pour tout indice α , posons $M_\alpha = M \otimes_A A_\alpha$, $N_\alpha = N \otimes_A A_\alpha$; il résulte alors de (11.2.1) que pour chaque i , $(\text{Tor}_i^{A_\alpha}(M_\alpha, N_\alpha), \psi_{i\beta\alpha})$, où $\psi_{i\beta\alpha}$ est l'homomorphisme canonique (11.2.1.1) correspondant à $g_{\beta\alpha}$, est un *système*

inductif de A_α -modules. Posons $A' = \varinjlim A_\alpha$, $M' = \varinjlim M_\alpha = M \otimes_A A'$, $N' = \varinjlim N_\alpha = N \otimes_A A'$; si on désigne par $g_\alpha : A_\alpha \rightarrow A'$ l'homomorphisme canonique, on en déduit des homomorphismes canoniques (II.2.1.1) $\psi_{i\alpha} : \text{Tor}_i^{A_\alpha}(M_\alpha, N_\alpha) \rightarrow \text{Tor}_i^{A'}(M', N')$ qui (toujours en vertu de (II.2.1)) forment un système inductif d'homomorphismes; nous nous proposons de compléter le résultat de (M, V, 9.4*) en montrant que les

$$(II.2.2.1) \quad \psi_i = \varinjlim_\alpha \psi_{i\alpha} : \varinjlim_\alpha \text{Tor}_i^{A_\alpha}(M_\alpha, N_\alpha) \rightarrow \text{Tor}_i^{A'}(M', N')$$

sont des isomorphismes de A' -modules. Pour cela, nous procédons comme dans (M, V, 9.5*), en associant à chaque M_α sa résolution libre canonique. Tout revient (compte tenu de l'exactitude du foncteur \varinjlim) à prouver le

Lemme (II.2.2.2). — Soient $(A_\alpha, g_{\beta\alpha})$ un système inductif filtrant d'anneaux, $(M_\alpha, h_{\beta\alpha})$ un système inductif d'ensembles, $A' = \varinjlim A_\alpha$, $M' = \varinjlim M_\alpha$, $g_\alpha : A_\alpha \rightarrow A'$, $h_\alpha : M_\alpha \rightarrow M'$ les applications canoniques. Pour tout α , soit $F(M_\alpha)$ le A_α -module des combinaisons linéaires formelles d'éléments de M_α ; soit de même $F(M')$ le A' -module des combinaisons linéaires formelles d'éléments de M' ; si $h'_{\beta\alpha} : F(M_\alpha) \rightarrow F(M_\beta)$ (pour $\alpha \leq \beta$) et $h'_\alpha : F(M_\alpha) \rightarrow F(M')$ sont les A_α -homomorphismes déduits de $h_{\beta\alpha}$ et h_α respectivement, $(F(M_\alpha), h'_{\beta\alpha})$ est un système inductif de A_α -modules et (h'_α) un système inductif d'homomorphismes. Alors

$$h' = \varinjlim h'_\alpha : \varinjlim F(M_\alpha) \rightarrow F(M') = F(\varinjlim M_\alpha)$$

est un isomorphisme.

Pour la démonstration, voir Bourbaki, *Alg.*, chap. II, 3^e éd., § 6, n^o 6, cor. de la prop. 10.

(II.2.3) Reprenons les notations de (II.2.1) et considérons particulièrement le cas $i = 1$; posons $T = \text{Tor}_1^A(M, N)$, $T' = T \otimes_A A'$, $T'' = \text{Tor}_1^{A'}(M', N')$; alors ψ_1 est l'homomorphisme $\text{Ker}(f_0 \otimes 1_N) / \text{Im}(f_1 \otimes 1_N) \rightarrow \text{Ker}(f_0'' \otimes 1_{N'}) / \text{Im}(f_1'' \otimes 1_{N'})$ qui se déduit par passage aux quotients de la restriction $\text{Ker}(f_0 \otimes 1_N) \rightarrow \text{Ker}(f_0'' \otimes 1_{N'})$ de

$$u_1 \otimes 1 : L_0 \otimes_A N \rightarrow L_0'' \otimes_A N' = L_0'' \otimes_A N.$$

Posons $R = \text{Ker}(\varepsilon)$, $R'' = \text{Ker}(\varepsilon'')$, de sorte que l'on a les suites exactes

$$0 \rightarrow R \xrightarrow{j} L_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad 0 \rightarrow R'' \xrightarrow{j''} L_0'' \xrightarrow{\varepsilon''} M' \rightarrow 0,$$

d'où on déduit les suites exactes d'homologie

$$(II.2.3.1) \quad 0 = \text{Tor}_1^A(L_0, N) \rightarrow T \xrightarrow{\partial} R \otimes_A N \xrightarrow{j \otimes 1} L_0 \otimes_A N \xrightarrow{\varepsilon \otimes 1} M \otimes_A N \rightarrow 0$$

$$(II.2.3.2) \quad 0 = \text{Tor}_1^{A'}(L_0'', N') \rightarrow T'' \xrightarrow{\partial''} R'' \otimes_A N' \xrightarrow{j'' \otimes 1} L_0'' \otimes_A N' \xrightarrow{\varepsilon'' \otimes 1} M' \otimes_A N' \rightarrow 0$$

On a d'autre part un homomorphisme de A' -modules

$$v : R' = \text{Ker}(\varepsilon) \otimes_A A' \rightarrow \text{Ker}(\varepsilon') \xrightarrow{v^*} \text{Ker}(\varepsilon'') = R''.$$

Montrons que le diagramme

(II.2.3.3)

$$\begin{array}{ccccccccc}
 T' & \xrightarrow{\partial \otimes 1} & R' \otimes_A N' & \longrightarrow & L'_0 \otimes_A N' & \longrightarrow & M' \otimes_A N' & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow \varphi_1 & & \downarrow v \otimes 1 & & \downarrow u_0 \otimes 1 & & \parallel & & \\
 0 & \longrightarrow & T'' & \xrightarrow{\partial''} & R'' \otimes_A N' & \longrightarrow & L''_0 \otimes_A N' & \longrightarrow & M' \otimes_A N' & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

est *commutatif*. Pour cela, on vérifie aussitôt (M, IV, 1) que l'homomorphisme $\partial : T \rightarrow R \otimes_A N$ provient (dans le cas actuel) par passage au quotient de l'homomorphisme $w : \text{Ker}(f_0 \otimes_{I_N}) \rightarrow R \otimes_A N$, restriction de l'homomorphisme $g_0 \otimes_{I_N} : L_1 \otimes_A N \rightarrow R \otimes_A N$, où $g_0 : L_1 \rightarrow R$ est tel que $f_0 = j \circ g_0$; de même pour ∂'' . Il suffit donc de voir que le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Ker}(f_0 \otimes_{I_N}) & \xrightarrow{w} & R \otimes_A N \longrightarrow R' \otimes_A N' = (R \otimes_A N) \otimes_A A' \\
 \downarrow & & \downarrow v \otimes 1 \\
 \text{Ker}(f_0'' \otimes_{I_{N'}}) & \longrightarrow & R'' \otimes_A N'
 \end{array}$$

est commutatif, ce qui résulte de la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 L_1 & \longrightarrow & R \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 L_1'' & \longrightarrow & R''
 \end{array}$$

Lemme (II.2.4). — Soient A un anneau, C une A -algèbre, M un A -module, N un C -module, A' une A -algèbre. Posons $C' = C \otimes_A A'$, $M' = M \otimes_A A'$, $N' = N \otimes_A A' = N \otimes_C C'$. Supposons que $M \otimes_A N$ soit un C -module plat. Alors l'homomorphisme canonique

$$\varphi_1 : \text{Tor}_1^A(M, N) \otimes_A A' \rightarrow \text{Tor}_1^{A'}(M', N')$$

(cf. (II.2.1.5)) est *surjectif*.

Gardons les notations de (II.2.3); l'exactitude à droite du produit tensoriel montre que la suite $L_1' \xrightarrow{f_0'} L_0' \xrightarrow{e'} M' \rightarrow 0$ est exacte; comme L_0' et L_1' sont des A' -modules libres, on peut supposer que l'on a pris $L_0' = L_0''$, $L_1' = L_1''$, u_0 et u_1 étant les applications identiques et $f_0'' = f_0'$. Comme $R = \text{Im}(f_0)$ et $R'' = \text{Im}(f_0'') = \text{Im}(f_0')$, l'homomorphisme v est *surjectif*, et il en est donc de même de $v \otimes 1$. La démonstration sera achevée si l'on prouve que la première ligne de (II.2.3.3) est *exacte*, $v \otimes 1$ étant *surjective* et $u_0 \otimes 1$ *injectif* (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. I^{er}, § 1, n^o 4, cor. 2 de la prop. 2). Utilisons pour cela

l'hypothèse que $M \otimes_A N$ est un C -module *plat*. Posant $Q = \text{Ker}(\varepsilon \otimes 1) = \text{Im}(j \otimes 1)$ dans la suite exacte (11.2.3.1), on a les deux suites exactes $0 \rightarrow Q \rightarrow L_0 \otimes_A N \rightarrow M \otimes_A N \rightarrow 0$ et $T \rightarrow R \otimes_A N \rightarrow Q \rightarrow 0$, où les homomorphismes sont des homomorphismes de C -modules; utilisant l'hypothèse de platitude, on en déduit (0_I, 6.1.2) la suite exacte

$$0 \rightarrow Q \otimes_C C' \rightarrow (L_0 \otimes_A N) \otimes_C C' \rightarrow (M \otimes_A N) \otimes_C C' \rightarrow 0$$

et d'autre part, le produit tensoriel étant exact à droite, on a la suite exacte

$$T \otimes_C C' \rightarrow (R \otimes_A N) \otimes_C C' \rightarrow Q \otimes_C C' \rightarrow 0$$

d'où finalement la suite exacte

$$T \otimes_C C' \rightarrow (R \otimes_A N) \otimes_C C' \rightarrow (L_0 \otimes_A N) \otimes_C C' \rightarrow (M \otimes_A N) \otimes_C C' \rightarrow 0$$

Mais par définition, pour tout C -module P , $P \otimes_C C' = P \otimes_A A'$, d'où la conclusion.

Lemme (11.2.5). — Soient A un anneau, \mathfrak{J} un idéal de A , B une A -algèbre, M un B -module, $A \rightarrow A'$ un homomorphisme d'anneaux. On pose $\mathfrak{J}' = \mathfrak{J}A'$, $B' = B \otimes_A A'$, $M' = M \otimes_A A' = M \otimes_B B'$. Soit \mathfrak{p}' un idéal premier de B' contenant $\mathfrak{J}'B'$. On suppose vérifiée l'une des hypothèses suivantes :

a) \mathfrak{J} est nilpotent.

b) A' est noethérien, B' est une A' -algèbre de type fini, M' un B' -module de type fini.

Dans ces conditions, supposons vérifiées les deux propriétés suivantes :

(i) $M \otimes_A (A/\mathfrak{J})$ est un (A/\mathfrak{J}) -module plat.

(ii) L'homomorphisme canonique composé

$$\text{Tor}_1^A(M, A/\mathfrak{J}) \xrightarrow{\psi_1} \text{Tor}_1^A(M', A'/\mathfrak{J}') \xrightarrow{\theta} (\text{Tor}_1^A(M', A'/\mathfrak{J}'))_{\mathfrak{p}'}$$

(où ψ_1 est l'homomorphisme (11.2.1.1) et θ l'homomorphisme canonique d'un B' -module dans son localisé en \mathfrak{p}') est nul.

Alors $M'_{\mathfrak{p}'}$ est un A' -module plat.

Notons que dans l'hypothèse b) $M'_{\mathfrak{p}'}$ est un $B'_{\mathfrak{p}'}$ -module de type fini, $B'_{\mathfrak{p}'}$ une A' -algèbre noethérienne, et que $\mathfrak{J}'B'_{\mathfrak{p}'}$ est contenu dans le radical $\mathfrak{p}'B'_{\mathfrak{p}'}$ de $B'_{\mathfrak{p}'}$; dans l'hypothèse a), \mathfrak{J}' est nilpotent; on va donc pouvoir appliquer le critère de platitude (0_{III}, 10.2.1) ou (0_{III}, 10.2.2) suivant que a) ou b) est vérifiée. En premier lieu, on a $M'_{\mathfrak{p}'} \otimes_{A'} (A'/\mathfrak{J}') = (M' \otimes_{A'} (A'/\mathfrak{J}'))_{\mathfrak{p}'} = ((M \otimes_A (A/\mathfrak{J})) \otimes_{A/\mathfrak{J}} (A'/\mathfrak{J}'))_{\mathfrak{p}'}$; l'hypothèse (i) entraîne donc que $M'_{\mathfrak{p}'} \otimes_{A'} (A'/\mathfrak{J}')$ est un (A'/\mathfrak{J}') -module plat, compte tenu de (0_I, 6.2.1 et 6.3.2). Reste donc à voir que $\text{Tor}_1^A(M'_{\mathfrak{p}'}, A'/\mathfrak{J}') = 0$; or ce $B'_{\mathfrak{p}'}$ -module est égal à $(\text{Tor}_1^A(M', A'/\mathfrak{J}'))_{\mathfrak{p}'}$ en vertu de la platitude de $B'_{\mathfrak{p}'}$ sur B' . Mais en vertu de l'hypothèse (ii), l'homomorphisme composé $\theta \circ \varphi_1 : \text{Tor}_1^A(M, A/\mathfrak{J}) \otimes_A A' \rightarrow (\text{Tor}_1^A(M', A'/\mathfrak{J}'))_{\mathfrak{p}'}$ est nul; par ailleurs, (11.2.4) appliqué à $C = A/\mathfrak{J}$ et $N = C$ montre (compte tenu de l'hypothèse (i)) que φ_1 est *surjectif* (car $A'/\mathfrak{J}' = C \otimes_A A'$); donc l'homomorphisme θ est nul et comme l'image par θ de $\text{Tor}_1^A(M', A'/\mathfrak{J}')$ engendre le $B'_{\mathfrak{p}'}$ -module $(\text{Tor}_1^A(M', A'/\mathfrak{J}'))_{\mathfrak{p}'}$, ce dernier est nul. C.Q.F.D.

Théorème (11.2.6). — Les notations étant celles de (8.5.1) et (8.8.1), on suppose S_α quasi-compact, X_α et Y_α de présentation finie sur S_α ; soient $f_\alpha : X_\alpha \rightarrow Y_\alpha$ un S_α -morphisme, \mathcal{F}_α un \mathcal{O}_{X_α} -Module quasi-cohérent de présentation finie.

(i) Soient x un point de X , x_λ sa projection canonique dans X_λ . Pour que \mathcal{F} soit f -plat au point x , il faut et il suffit qu'il existe $\lambda \geq \alpha$ tel que \mathcal{F}_λ soit f_λ -plat au point x_λ .

(ii) Pour que \mathcal{F} soit f -plat, il faut et il suffit qu'il existe $\lambda \geq \alpha$ tel que \mathcal{F}_λ soit f_λ -plat.

On peut supposer que $S_\alpha = S_0$; comme Y_0 est de présentation finie sur S_0 , Y_0 est quasi-compact, et $f_0 : X_0 \rightarrow Y_0$ est un morphisme de présentation finie (1.6.2, (v)), donc on peut aussi se borner au cas où $S_0 = Y_0$. En outre, en vertu de la quasi-compacité de S_0 et du fait que l'ensemble d'indices L est filtrant, on peut se borner au cas où $S_0 = \text{Spec}(A_0)$ est affine. De plus X_0 est quasi-compact, donc le même raisonnement montre qu'on peut aussi supposer $X_0 = \text{Spec}(B_0)$ affine; on a alors $\mathcal{F}_0 = \widetilde{M}_0$, où M_0 est un B_0 -module de présentation finie, et l'énoncé (11.2.6) est dans ce cas équivalent au suivant (compte tenu de (0_I, 6.3.1)) :

Corollaire (11.2.6.1). — Soient A_0 un anneau, $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ un système inductif filtrant de A_0 -algèbres, B_0 une A_0 -algèbre de présentation finie, M_0 un B_0 -module de présentation finie. On pose $B_\lambda = B_0 \otimes_{A_0} A_\lambda$, $M_\lambda = M_0 \otimes_{A_0} A_\lambda = M_0 \otimes_{B_0} B_\lambda$, $A = \varinjlim A_\lambda$, $B = \varinjlim B_\lambda = B_0 \otimes_{A_0} A$, $M = \varinjlim M_\lambda = M_0 \otimes_{A_0} A = M_0 \otimes_{B_0} B$.

(i) Soit \mathfrak{p} un idéal premier de B , et pour tout λ , soit \mathfrak{p}_λ son image réciproque dans B_λ . Pour que $M_\mathfrak{p}$ soit un A -module plat, il faut et il suffit qu'il existe λ tel que $(M_\lambda)_{\mathfrak{p}_\lambda}$ soit un A_λ -module plat.

(ii) Pour que M soit un A -module plat, il faut et il suffit qu'il existe λ tel que M_λ soit un A_λ -module plat.

On doit seulement démontrer que les conditions sont nécessaires (2.1.4). Nous procéderons en plusieurs étapes.

1) *Réduction au cas où les A_λ sont noethériens.* En vertu de (8.9.1), il existe un sous-anneau A'_0 de A_0 , qui est une \mathbf{Z} -algèbre de type fini, une A'_0 -algèbre de type fini B'_0 et un B'_0 -module de type fini M'_0 tels que l'on ait $B_0 = B'_0 \otimes_{A'_0} A_0$ et $M_0 = M'_0 \otimes_{A'_0} A_0$; comme on a $B_\lambda = B'_0 \otimes_{A'_0} A_\lambda$ et $M_\lambda = M'_0 \otimes_{A'_0} A_\lambda$, on peut remplacer A_0 , B_0 , M_0 par A'_0 , B'_0 , M'_0 dans l'énoncé de (11.2.6.1), en considérant les A_λ comme des A'_0 -algèbres; on peut donc déjà supposer que A_0 est *noethérien*. Soit H l'ensemble des couples (λ, C_λ) , où C_λ est une sous- A_0 -algèbre de type fini de A_λ ; ordonnons H en posant $(\lambda, C_\lambda) \leq (\mu, D_\mu)$ si $\lambda \leq \mu$ et si l'homomorphisme $\varphi_{\mu\lambda} : A_\lambda \rightarrow A_\mu$ est tel que $\varphi_{\mu\lambda}(C_\lambda) \subset D_\mu$; pour cet ordre H est filtrant croissant, car si (λ, C_λ) et (μ, D_μ) sont deux éléments quelconques de H , on les majorera par un (ν, E_ν) en prenant $\nu \geq \lambda$, $\nu \geq \mu$ dans L , puis E_ν égal à la sous- A_0 -algèbre de A_ν engendrée par $\varphi_{\nu\lambda}(C_\lambda)$ et $\varphi_{\nu\mu}(D_\mu)$. Pour un élément $\xi = (\lambda, C_\lambda)$ de H , on posera $A_\xi = C_\lambda$, et pour $\xi \leq \eta = (\mu, D_\mu)$ (donc $\lambda \leq \mu$ et $\varphi_{\mu\lambda}(C_\lambda) \subset D_\mu$), $\varphi_{\eta\xi} : A_\xi \rightarrow A_\eta$ sera la restriction à C_λ de $\varphi_{\mu\lambda}$, considéré comme homomorphisme dans D_μ ; il est clair que l'on obtient ainsi un système inductif filtrant de A_0 -algèbres. On pose $B_\xi = B_0 \otimes_{A_0} A_\xi$, $M_\xi = M_0 \otimes_{A_0} A_\xi$; cette fois les A_ξ sont *noethériens*; en outre la formule de la double limite inductive (Bourbaki, *Alg.*, chap. II, 3^e éd., § 6, n^o 4, prop. 7) prouve que l'on a encore $\varinjlim_H A_\xi = A$, $\varinjlim_H B_\xi = B$, $\varinjlim_H M_\xi = M$. Supposons (11.2.6.1) prouvé pour le système inductif $(A_\xi)_{\xi \in H}$; soit \mathfrak{p} un idéal premier de B , tel que $M_\mathfrak{p}$ soit un A -module plat; il existe alors $\xi \in H$ tel que, si \mathfrak{p}_ξ est l'image

réciroque de \mathfrak{p} dans B_ξ , $(M_\xi)_{\mathfrak{p}_\xi}$ soit un A_ξ -module plat. Soit $\xi = (\lambda, C_\lambda)$, de sorte que l'injection $A_\xi = C_\lambda \rightarrow A_\lambda$ donne un homomorphisme $B_\xi = B_0 \otimes_{A_0} C_\lambda \rightarrow B_\lambda = B_0 \otimes_{A_0} A_\lambda$, et si \mathfrak{p}_λ est l'image réciroque de \mathfrak{p} dans B_λ , \mathfrak{p}_ξ est l'image réciroque de \mathfrak{p}_λ dans B_ξ ; on a par suite $(M_\lambda)_{\mathfrak{p}_\lambda} = (M_\xi \otimes_{C_\lambda} A_\lambda)_{\mathfrak{p}_\lambda} = ((M_\xi)_{\mathfrak{p}_\xi} \otimes_{C_\lambda} A_\lambda)_{\mathfrak{p}_\lambda}$, donc $(M_\lambda)_{\mathfrak{p}_\lambda}$ est un A_λ -module plat (0.1, 6.2.1 et 6.3.2). On traite de même le cas (ii) de l'énoncé. Nous pouvons donc par la suite supposer les A_λ *noethériens* pour $\lambda \in L$ (mais non nécessairement A lui-même).

II) *Réduction de l'énoncé global (ii) à l'énoncé ponctuel (i)*. Supposons que \mathcal{F} soit f -plat. Pour tout λ , soit U_λ l'ensemble des $x_\lambda \in X_\lambda$ tels que \mathcal{F}_λ soit f_λ -plat au point x_λ ; on sait que U_λ est *ouvert* dans X_λ puisque S_λ est noethérien et f_λ de type fini (11.1.1); soit $V_\lambda = v_\lambda^{-1}(U_\lambda)$ son image réciroque dans X . Comme, par hypothèse, pour tout $x \in X$, il y a un λ tel que \mathcal{F}_λ soit f_λ -plat au point x_λ , projection de x dans X_λ , cela signifie que $x \in V_\lambda$ pour un λ ; autrement dit, X est réunion des V_λ . D'ailleurs (2.1.4), pour $\lambda \leq \mu$, on a $V_\lambda \subset V_\mu$, donc, comme X est quasi-compact, il existe un indice μ tel que $X = V_\mu$. Comme les X_λ sont quasi-compacts, il résulte de (8.3.4) qu'il existe un indice $\nu \geq \mu$ tel que $v_\nu^{-1}(U_\nu) = X_\nu$; mais par (2.1.4), cela entraîne que \mathcal{F}_ν est f_ν -plat.

III) *Fin de la démonstration*. Il reste à prouver (i) en supposant S_0 affine et noethérien; si y_0 est la projection de x dans S_0 , on peut en outre, en vertu de (2.1.4) et de (1, 3.6.5), remplacer S_0 par $\text{Spec}(\mathcal{O}_{y_0})$, autrement dit on peut se borner au cas où A_0 est un anneau *local* noethérien, d'idéal maximal $\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{j}_{y_0}$; par définition, \mathfrak{m}_0 est l'image réciroque de l'idéal premier $\mathfrak{p} = \mathfrak{j}_x$ de B , et $M_\mathfrak{p}$ est supposé être un A -module plat; on a donc en particulier $\text{Tor}_1^A(A/\mathfrak{m}_0 A, M_\mathfrak{p}) = 0$, ce qui s'écrit aussi, puisque les $\text{Tor}_i^A(A/\mathfrak{m}_0 A, M)$ sont des B -modules et que $B_\mathfrak{p}$ est plat sur B , $(\text{Tor}_1^A(A/\mathfrak{m}_0 A, M))_\mathfrak{p} = 0$. Notons maintenant que $\text{Tor}_1^{A_0}(A_0/\mathfrak{m}_0, M_0)$ est un B_0 -module de type fini, car on peut le définir en prenant une résolution de A_0/\mathfrak{m}_0 par des A_0 -modules libres de type fini (A_0 étant noethérien) et en tensorisant par M_0 , ce qui donne des B_0 -modules de type fini; comme B_0 est noethérien, l'homologie du complexe ainsi obtenu est bien formée de B_0 -modules de type fini. Soit $(t_i^0)_{1 \leq i \leq m}$ un système de générateurs du B_0 -module $\text{Tor}_1^{A_0}(A_0/\mathfrak{m}_0, M_0)$ et soit t_i l'image canonique (11.2.1.1) de t_i^0 dans $\text{Tor}_1^A(A/\mathfrak{m}_0 A, M)$. L'hypothèse entraîne qu'il existe un $h \in B - \mathfrak{p}$ tel que $ht_i = 0$ pour $1 \leq i \leq m$. Or, on a (11.2.2.1) $\text{Tor}_1^A(A/\mathfrak{m}_0 A, M) = \varinjlim \text{Tor}_1^{A_\lambda}(A_\lambda/\mathfrak{m}_0 A_\lambda, M_\lambda)$; il existe donc un λ tel que, si les t_i^λ sont les images des t_i^0 dans $\text{Tor}_1^{A_\lambda}(A_\lambda/\mathfrak{m}_0 A_\lambda, M_\lambda)$, il existe $h_\lambda \in B_\lambda$ d'image h , tel que $h_\lambda t_i^\lambda = 0$ pour $1 \leq i \leq m$. Soit $\mathfrak{p}_\lambda = \mathfrak{j}_{x_\lambda}$ l'idéal premier de B_λ image réciroque de \mathfrak{p} ; on a $h_\lambda \in B_\lambda - \mathfrak{p}_\lambda$, donc les images canoniques des t_i^0 dans $(\text{Tor}_1^{A_\lambda}(A_\lambda/\mathfrak{m}_0 A_\lambda, M_\lambda))_{\mathfrak{p}_\lambda}$ sont nulles et par suite l'homomorphisme $\text{Tor}_1^{A_0}(A_0/\mathfrak{m}_0, M_0) \rightarrow (\text{Tor}_1^{A_\lambda}(A_\lambda/\mathfrak{m}_0 A_\lambda, M_\lambda))_{\mathfrak{p}_\lambda}$ est nul. Les conditions du lemme (11.2.5) sont donc remplies (A_0/\mathfrak{m}_0 étant un corps), et $(M_\lambda)_{\mathfrak{p}_\lambda}$ est un A_λ -module plat, ce qui achève de démontrer le théorème.

Corollaire (11.2.7). — Soient $S = \text{Spec}(A)$ un schéma affine, $f : X \rightarrow S$ un morphisme, \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -Module quasi-cohérent, x un point de X . Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) f est un morphisme de présentation finie, \mathcal{F} est un \mathcal{O}_X -Module de présentation finie et \mathcal{F} est f -plat au point x (resp. f -plat).

b) Il existe un schéma affine noethérien $S_0 = \text{Spec}(A_0)$, un morphisme de type fini $f_0 : X_0 \rightarrow S_0$, un \mathcal{O}_{X_0} -Module cohérent \mathcal{F}_0 , un morphisme $S \rightarrow S_0$ tels que le S -pré-schéma $X_0 \otimes_{S_0} S$ soit S -isomorphe à X et que, si on identifie X à $X_0 \otimes_{S_0} S$, \mathcal{F} soit isomorphe à $\mathcal{F}_0 \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} \mathcal{O}_S$, et \mathcal{F}_0 soit f_0 -plat au point x_0 projection de x dans X_0 (resp. f_0 -plat).

c) Les conditions de b) sont vérifiées et en outre A_0 est une sous- \mathbf{Z} -algèbre de type fini de A , le morphisme $S \rightarrow S_0$ correspondant à l'injection canonique $A_0 \rightarrow A$.

Il est clair que c) implique b) et b) implique a) en vertu de (2.1.4). D'autre part, on peut considérer A comme limite inductive de ses sous- \mathbf{Z} -algèbres de type fini, et on sait par (8.9.1) qu'il y a une telle sous-algèbre A_0 et un morphisme de type fini $f_0 : X_0 \rightarrow S_0$ tels que X soit S -isomorphe à $X_0 \times_{S_0} S$ et \mathcal{F} isomorphe à $\mathcal{F}_0 \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} \mathcal{O}_S$; on peut donc écrire $X = \varprojlim X_\lambda$, où $X_\lambda = X_0 \otimes_{A_0} A_\lambda$, A_λ parcourant l'ensemble des sous- \mathbf{Z} -algèbres de type fini de A contenant A_0 , et $\mathcal{F} = v_\lambda^*(\mathcal{F}_\lambda)$, où $v_\lambda : X \rightarrow X_\lambda$ est la projection canonique et $\mathcal{F}_\lambda = \mathcal{F}_0 \otimes_{A_0} A_\lambda$. Il résulte de (11.2.6) qu'il existe λ tel que \mathcal{F}_λ soit f_λ -plat au point $x_\lambda = v_\lambda(x)$ (resp. f_λ -plat); alors le sous-anneau A_λ de A vérifie les conditions de c).

Proposition (11.2.8). — Soient $g : X \rightarrow S$, $h : Y \rightarrow S$ deux morphismes de présentation finie, $f : X \rightarrow Y$ un S -morphisme, \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -Module quasi-cohérent de présentation finie; pour tout $s \in S$, soient $X_s = g^{-1}(s) = X \times_S \text{Spec}(\mathbf{k}(s))$, $Y_s = h^{-1}(s) = Y \times_S \text{Spec}(\mathbf{k}(s))$, f_s le morphisme $f \times 1 : X_s \rightarrow Y_s$, $\mathcal{F}_s = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathbf{k}(s)$. Alors l'ensemble E des $s \in S$ tels que \mathcal{F}_s soit f_s -plat est localement constructible.

La propriété dont nous voulons démontrer qu'elle est constructible vérifie la condition (9.2.1, (i)), en vertu de (2.2.13) et (2.5.1). Compte tenu de (9.2.3), on peut donc se limiter au cas où S est affine, noethérien et intègre de point générique η et à prouver que E ou $S - E$ est un voisinage de η dans S . Si $\eta \in S - E$, cela résulte aussitôt du lemme (9.4.7.1). Si au contraire $\eta \in E$, il résulte tout d'abord de (11.2.6), appliqué suivant la méthode de (8.1.2, a)), qu'il y a un voisinage ouvert U de η dans S tel que $\mathcal{F}|_{g^{-1}(U)}$ soit $h^{-1}(U)$ -plat; a fortiori (2.1.4) \mathcal{F}_s est f_s -plat pour tout $s \in U$, ce qui achève la démonstration.

Le théorème suivant généralise (11.2.6.1, (ii)) :

Théorème (11.2.9) (Raynaud). — Soient A_0 un anneau, $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ un système inductif filtrant de A_0 -algèbres, B_0 une A_0 -algèbre de présentation finie, \mathfrak{J}_0 un idéal de type fini de B_0 , M_0 un B_0 -module de présentation finie. On pose $B_\lambda = B_0 \otimes_{A_0} A_\lambda$, $\mathfrak{J}_\lambda = \mathfrak{J}_0 B_\lambda$, $M_\lambda = M_0 \otimes_{A_0} A_\lambda = M_0 \otimes_{B_0} B_\lambda$, $A = \varinjlim A_\lambda$, $B = \varinjlim B_\lambda = B_0 \otimes_{A_0} A$, $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_0 B$, $M = \varinjlim M_\lambda = M_0 \otimes_{A_0} A = M_0 \otimes_{B_0} B$. Pour que $\text{gr}_{\mathfrak{J}}^*(M)$ soit un A -module plat, il faut et il suffit qu'il existe λ tel que $\text{gr}_{\mathfrak{J}_\lambda}^*(M_\lambda)$ soit un A_λ -module plat; les homomorphismes canoniques

$$(11.2.9.1) \quad \begin{cases} \text{gr}_{\mathfrak{J}_\lambda}^*(M_\lambda) \otimes_{A_\lambda} A \rightarrow \text{gr}_{\mathfrak{J}}^*(M) \\ \text{gr}_{\mathfrak{J}_\lambda}^*(M_\lambda) \otimes_{A_\lambda} A_\mu \rightarrow \text{gr}_{\mathfrak{J}_\mu}^*(M_\mu) \end{cases} \quad \text{pour } \lambda \leq \mu$$

sont alors bijectifs et $\text{gr}_{\mathfrak{J}_\mu}^*(M_\mu)$ est un A_λ -module plat pour $\lambda \leq \mu$.

Montrons d'abord que les conditions sont suffisantes, ce qui revient à prouver la bijectivité de (11.2.9.1). Cela résulte du lemme suivant :

Lemme (11.2.9.2). — Soient A un anneau, B une A -algèbre, M un B -module, \mathfrak{J} un idéal de B . Soient A' une A -algèbre; posons $B' = B \otimes_A A'$, $M' = M \otimes_A A' = M \otimes_B B'$, $\mathfrak{J}' = \mathfrak{J}B'$. Si $\text{gr}_{\mathfrak{J}}^{\bullet}(M)$ est un A -module plat, l'homomorphisme canonique

$$(\text{gr}_{\mathfrak{J}}^{\bullet}(M)) \otimes_A A' \rightarrow \text{gr}_{\mathfrak{J}'}^{\bullet}(M')$$

est bijectif.

En effet, par récurrence sur k , l'hypothèse que les $\mathfrak{J}^k M / \mathfrak{J}^{k+1} M$ sont des A -modules plats pour $k \geq 0$ entraîne d'abord, par (01, 6.1.2) que $M / \mathfrak{J}^{k+1} M$ est un A -module plat; en outre (01, 6.1.2), la suite

$$0 \rightarrow (\mathfrak{J}^{k+1} M) \otimes_A A' \rightarrow M \otimes_A A' \rightarrow (M / \mathfrak{J}^{k+1} M) \otimes_A A' \rightarrow 0$$

est alors exacte, autrement dit $(\mathfrak{J}^{k+1} M) \otimes_A A'$ s'identifie à son image canonique $\mathfrak{J}'^{k+1} M'$ dans $M' = M \otimes_A A'$. D'autre part, toujours en vertu de (01, 6.1.2), la suite

$$0 \rightarrow (\mathfrak{J}^{k+1} M) \otimes_A A' \rightarrow (\mathfrak{J}^k M) \otimes_A A' \rightarrow (\mathfrak{J}^k M / \mathfrak{J}^{k+1} M) \otimes_A A' \rightarrow 0$$

est exacte, ce qui prouve le lemme.

Pour démontrer la nécessité des conditions de (11.2.9), nous procéderons en plusieurs étapes.

I) *Réduction au cas où les A_{λ} sont noethériens.* — On procède comme dans la réduction I) de (11.2.6.1), dont nous gardons les notations; il faut simplement commencer par remplacer A'_0 par une sous- A'_0 -algèbre de type fini A''_0 de A_0 telle que, si l'on pose $B''_0 = B'_0 \otimes_{A_0} A''_0$, il y ait dans B''_0 un idéal de type fini \mathfrak{J}''_0 tel que $\mathfrak{J}''_0 B_0 = \mathfrak{J}_0$. On considère pour cela les sous- A'_0 -algèbres A'_{α} de type fini de A_0 , qui forment une famille filtrante, et l'on a $B_0 = \varinjlim B'_{\alpha}$, où $B'_{\alpha} = B'_0 \otimes_{A_0} A'_{\alpha}$; il y a donc un indice β tel qu'un système fini de générateurs de \mathfrak{J}_0 soit formé d'images dans B_0 d'éléments de B'_{β} ; on prendra alors $A''_0 = A'_{\beta}$, $B''_0 = B'_{\beta}$ et pour \mathfrak{J}''_0 l'idéal engendré par ces éléments. On peut donc supposer que A_0 (donc aussi B_0) est noethérien. On définit ensuite comme *loc. cit.* l'ensemble filtrant H et les A_{ξ} , B_{ξ} , M_{ξ} pour $\xi \in H$; on posera aussi $\mathfrak{J}_{\xi} = \mathfrak{J}_0 B_{\xi}$ pour tout $\xi \in H$. Supposons alors que l'on ait démontré qu'il existe un $\xi = (\lambda, C_{\lambda})$ tel que $\text{gr}_{\mathfrak{J}_{\xi}}^{\bullet}(M_{\xi})$ soit un C_{λ} -module plat; comme $M_{\lambda} = M_{\xi} \otimes_{C_{\lambda}} A_{\lambda}$, il résulte de (11.2.9.2) que $\text{gr}_{\mathfrak{J}_{\lambda}}^{\bullet}(M_{\lambda})$ est un A_{λ} -module plat.

II) *Lemmes préliminaires.*

Lemme (11.2.9.3). — Soient A un anneau, $B = \bigoplus_{i \geq 0} B_i$ une A -algèbre graduée à degrés positifs, $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M_i$ un B -module gradué. On suppose que B_0 est un anneau local, et que chacun des M_i est un B_0 -module de type fini. Pour que M soit un B -module de type fini, il faut et il suffit que, si \mathfrak{q} est l'image réciproque dans A de l'idéal maximal \mathfrak{m} de B_0 , $M \otimes_A \mathbb{k}(\mathfrak{q})$ soit un $(B \otimes_A \mathbb{k}(\mathfrak{q}))$ -module de type fini.

La condition étant évidemment nécessaire, prouvons qu'elle est suffisante. Comme B_0 (et par suite B) est une $A_{\mathfrak{q}}$ -algèbre, on peut remplacer A par $A_{\mathfrak{q}}$, autrement dit supposer que A est aussi un anneau local dont \mathfrak{q} est l'idéal maximal. Par hypothèse, il existe un entier N tel que l'homomorphisme canonique

$$\bigoplus_{-N \leq i \leq N} (M_i \otimes_B B) \otimes_A \mathbb{k}(\mathfrak{q}) \rightarrow M \otimes_A \mathbb{k}(\mathfrak{q})$$

soit *surjectif*; cela signifie aussi que, pour tout entier n , l'homomorphisme canonique de $\mathbf{k}(q)$ -modules

$$\bigoplus_{-N \leq i \leq N} (M_i \otimes_{B_0} B_{n-i}) \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{k}(q) \rightarrow M_n \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{k}(q)$$

est surjectif. Or, M_n est un B_0 -module de type fini, B_0 un anneau local et $qB_0 \subset \mathfrak{m}$; donc le lemme de Nakayama prouve que chacun des homomorphismes canoniques

$$\bigoplus_{-N \leq i \leq N} (M_i \otimes_{B_0} B_{n-i}) \rightarrow M_n$$

est surjectif, d'où la conclusion.

Corollaire (11.2.9.4). — *Sous les hypothèses de (11.2.9.3), on suppose en outre que chacun des B_i et chacun des M_i soit un B_0 -module de présentation finie, et que M soit un \mathbf{A} -module plat. Pour que M soit un B -module de présentation finie, il faut et il suffit que $M \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{k}(q)$ soit un $(B \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{k}(q))$ -module de présentation finie.*

En vertu de (11.2.9.3), si la condition de l'énoncé est vérifiée, M est un B -module de type fini, donc il existe un B -module *libre gradué* de type fini L (ayant donc une base finie formée d'éléments homogènes) et un homomorphisme gradué surjectif de degré 0, $u : L \rightarrow M$. Soit $R = \text{Ker}(u)$, qui est un B -module gradué; il y a donc un nombre fini d'entiers m_j ($1 \leq j \leq r$) tels que pour chaque entier i , R_i soit le noyau d'un homomorphisme surjectif $\bigoplus_{1 \leq j \leq r} B_{i+m_j} \rightarrow M_i$; on conclut alors de l'hypothèse sur les M_i et les B_i que R_i est un B_0 -module de type fini (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. I, § 2, n° 8, lemme 9). Pour prouver que R est un B -module de type fini, notons qu'en vertu de l'hypothèse de platitude et de ($\mathbf{0}_1$, 6.1.2) la suite

$$0 \rightarrow R \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{k}(q) \rightarrow L \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{k}(q) \rightarrow M \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{k}(q) \rightarrow 0$$

est exacte, et l'hypothèse entraîne donc (Bourbaki, *loc. cit.*) que $R \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{k}(q)$ est un $(B \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{k}(q))$ -module de type fini; il suffit donc d'appliquer à R le lemme (11.2.9.3).

III) *Réduction au cas où les homomorphismes de transitions $\varphi_{\mu\lambda} : A_\lambda \rightarrow A_\mu$ (pour $\lambda \leq \mu$) sont injectifs.* — Soit A'_λ l'image de A_λ par l'homomorphisme canonique $\varphi_\lambda : A_\lambda \rightarrow A$; il est clair que les A'_λ forment un système inductif de sous-anneaux *noethériens* de A , dont la limite inductive est A , et les homomorphismes de transition $A'_\lambda \rightarrow A'_\mu$ (pour $\lambda \leq \mu$) sont injectifs. Posons $B'_\lambda = B_0 \otimes_{A_0} A'_\lambda$, $\mathfrak{J}'_\lambda = \mathfrak{J}_0 B'_\lambda$, $M'_\lambda = M_0 \otimes_{A_0} A'_\lambda = M_\lambda \otimes_{A_\lambda} A'_\lambda$; on a encore $B = \varinjlim B'_\lambda$, $M = \varinjlim M'_\lambda$. Supposons que l'on ait prouvé qu'il existe un λ tel que, pour $\mu \geq \lambda$, $\text{gr}_{\mathfrak{J}'_\mu}^*(M'_\mu)$ soit un A'_μ -module plat. Soit \mathfrak{a}_λ le noyau de l'homomorphisme φ_λ , qui est donc un idéal de type fini de l'anneau noethérien A_λ . Il résulte de la définition de la limite inductive qu'il existe un indice $\mu \geq \lambda$ tel que $\varphi_{\mu\lambda}(\mathfrak{a}_\lambda) = 0$, autrement dit l'homomorphisme $\varphi_{\mu\lambda}$ se factorise en $\varphi_{\mu\lambda} : A_\lambda \rightarrow A'_\lambda \rightarrow A_\mu$, et l'on peut écrire $B_\mu = B'_\lambda \otimes_{A'_\lambda} A_\mu$, $\mathfrak{J}_\mu = \mathfrak{J}'_\lambda B_\mu$ et $M_\mu = M'_\lambda \otimes_{A'_\lambda} A_\mu$; on déduit donc de (11.2.9.2) que $\text{gr}_{\mathfrak{J}_\mu}^*(M_\mu)$ est un A_μ -module plat.

IV) *Réduction au cas où $B_0 = A_0[T_1, \dots, T_n]$ et $\text{gr}_{\mathfrak{J}_0}^*(B_0) = B_0$.* — En vertu de l'hypothèse, il y a un système $(t_i)_{1 \leq i \leq n}$ de générateurs de la A_0 -algèbre de type fini B_0 , tel que les t_i pour $i \leq m$ engendrent l'idéal \mathfrak{J}_0 de B_0 . Posons $B'_0 = A_0[T_1, \dots, T_n]$,

algèbre de polynômes (donc noethérienne), et soit \mathfrak{J}'_0 l'idéal de B'_0 engendré par les T_i d'indice $i \leq m$; on a alors un A_0 -homomorphisme surjectif $u_0 : B'_0 \rightarrow B_0$ transformant chaque T_i en t_i ($1 \leq i \leq n$), donc tel que $u_0(\mathfrak{J}'_0) = \mathfrak{J}_0$; cet homomorphisme permet de considérer M_0 comme un B'_0 -module de type fini. On pose alors $B'_\lambda = B'_0 \otimes_{A_0} A_\lambda = A_\lambda[T_1, \dots, T_n]$, $\mathfrak{J}'_\lambda = \mathfrak{J}'_0 B'_\lambda$, $B' = B'_0 \otimes_{A_0} A = A[T_1, \dots, T_n]$, $\mathfrak{J}' = \mathfrak{J}'_0 B'$, de sorte que \mathfrak{J}' est l'idéal de B' engendré par les T_i d'indice $i \leq m$; en outre, il est clair que pour tout entier $k \geq 0$, on a $\mathfrak{J}'^k M = \mathfrak{J}'^k M$ et $\mathfrak{J}'^k M_\lambda = \mathfrak{J}'^k M_\lambda$ pour tout λ ; donc $\text{gr}_{\mathfrak{J}'_0}^*(M) = \text{gr}_{\mathfrak{J}'_0}^*(M)$ en tant que A_0 -module et $\text{gr}_{\mathfrak{J}'_\lambda}^*(M_\lambda) = \text{gr}_{\mathfrak{J}'_\lambda}^*(M_\lambda)$ en tant que A_λ -module; on peut donc substituer B' , B'_λ , \mathfrak{J}' , \mathfrak{J}'_λ à B , B_λ , \mathfrak{J} , \mathfrak{J}_λ respectivement dans la démonstration; on notera en outre que par construction $\text{gr}_{\mathfrak{J}'_0}^*(B')$ s'identifie à B' et $\text{gr}_{\mathfrak{J}'_\lambda}^*(B'_\lambda)$ à B'_λ .

V) *Preuve du fait que $\text{gr}_{\mathfrak{J}}^*(M)$ est un $\text{gr}_{\mathfrak{J}}^*(B)$ -module de présentation finie.* — Nous supposons donc désormais A_0 et les A_λ noethériens, les homomorphismes de transition $A_\lambda \rightarrow A_\mu$ injectifs, $B_0 = A_0[T_1, \dots, T_n]$, \mathfrak{J}_0 étant engendré par les T_i d'indice $i \leq m$; l'anneau $C_0 = \text{gr}_{\mathfrak{J}_0}^*(B_0)$ s'identifie donc à B_0 et $C = \text{gr}_{\mathfrak{J}}^*(B)$ s'identifie à B ; nous utiliserons seulement tout d'abord dans ce qui suit le fait que $C \cong C_0 \otimes_{A_0} A$.

Nous aurons besoin de la variante suivante de (6.9.3) :

Lemme (II.2.9.5). — *Soient A_0 un anneau noethérien, B_0 une A_0 -algèbre de type fini, \mathfrak{J}_0 un idéal de B_0 , M_0 un B_0 -module de type fini. Il existe alors une suite $(S_{0i})_{1 \leq i \leq m}$ de sous-schémas de $S_0 = \text{Spec}(A_0)$ ayant les propriétés suivantes :*

1° *Les espaces sous-jacents aux S_{0i} sont deux à deux disjoints et forment un recouvrement de S_0 .*

2° *Pour chaque i , l'ensemble S_{0i} est ouvert dans $\bigcup_{j \geq i} S_{0j}$.*

3° *Chaque schéma S_{0i} est affine.*

4° *Si A_{0i} est l'anneau de S_{0i} et si l'on pose $B_{0i} = B_0 \otimes_{A_0} A_{0i}$, $\mathfrak{J}_{0i} = \mathfrak{J}_0 B_{0i}$, alors $\text{gr}_{\mathfrak{J}_{0i}}^*(M_0 \otimes_{A_0} A_{0i})$ est un A_{0i} -module plat.*

On procède comme dans (6.9.3) par récurrence noethérienne, en supposant le lemme vrai lorsqu'on y remplace A_0 par $A'_0 = A_0/\mathfrak{a}_0$, où l'idéal \mathfrak{a}_0 est tel que $V(\mathfrak{a}_0) \neq S_0$, B_0 par $B'_0 = B_0 \otimes_{A_0} A'_0$, \mathfrak{J}_0 par $\mathfrak{J}'_0 = \mathfrak{J}_0 B_0$ et M_0 par $M_0 \otimes_{A_0} A'_0$. On considère le nilradical \mathfrak{N}_0 de A_0 , et il suffit évidemment de prouver le lemme en remplaçant A_0 par A_0/\mathfrak{N}_0 et B_0 , J_0 , M_0 par les objets correspondants comme ci-dessus. Autrement dit, on peut supposer que A_0 est réduit; d'autre part, $\text{gr}_{\mathfrak{J}_0}^*(B_0)$ est une A_0 -algèbre de type fini et $\text{gr}_{\mathfrak{J}_0}^*(M_0)$ un $\text{gr}_{\mathfrak{J}_0}^*(B_0)$ -module de type fini; en vertu du théorème de platitude générique (6.9.1), il existe un ouvert $D(t_0) \subset S_0$ tel que si l'on pose $A_{01} = (A_0)_{t_0}$, $\text{gr}_{\mathfrak{J}_0}^*(M_0) \otimes_{A_0} A_{01}$ soit un A_{01} -module plat; mais puisque A_{01} est un A_0 -module plat, $\text{gr}_{\mathfrak{J}_0}^*(M_0) \otimes_{A_0} A_{01}$ s'identifie à $\text{gr}_{\mathfrak{J}_{01}}^*(M_0 \otimes_{A_0} A_{01})$, où $B_{01} = B_0 \otimes_{A_0} A_{01}$ et $\mathfrak{J}_{01} = \mathfrak{J}_0 B_{01}$. Le complémentaire de $D(t_0)$ dans S_0 est alors de la forme $V(\mathfrak{a}_0)$, et on conclut en appliquant l'hypothèse de récurrence noethérienne.

Appliquons ce lemme à la situation actuelle, en gardant les mêmes notations; posons $U_{0i} = \bigcup_{j \leq i} S_{0j}$, qui est un ouvert quasi-compact de S_0 . Il y a donc une famille finie $(f_{ik})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq k \leq n}$ d'éléments de A_0 tels que pour chaque i , U_{0i} soit réunion des $D(f_{ik})$ ($1 \leq k \leq n$).

Le C_0 -module $\text{gr}_{\mathfrak{Z}_0}^*(M_0)$ est engendré par un nombre fini d'éléments homogènes de degré 1, de sorte qu'il y a un épimorphisme de C_0 -modules gradués $u_0 : C_0^r \rightarrow \text{gr}_{\mathfrak{Z}_0}^*(M_0)$. Comme $C = C_0 \otimes_{A_0} A$ et que l'homomorphisme canonique $\text{gr}_{\mathfrak{Z}_0}^*(M_0) \otimes_{A_0} A \rightarrow \text{gr}_{\mathfrak{Z}}^*(M)$ est surjectif, on déduit donc de u_0 un épimorphisme de C -modules gradués

$$u : C^r \xrightarrow{u_0 \otimes 1_A} \text{gr}_{\mathfrak{Z}_0}^*(M_0) \otimes_{A_0} A \rightarrow \text{gr}_{\mathfrak{Z}}^*(M),$$

et tout revient à voir que le C -module gradué $Q = \text{Ker}(u)$ est de type fini.

Lemme (II.2.9.6). — *Sous les hypothèses précédentes, soit \mathfrak{R}_0 un idéal de A_0 ; posons $A'_0 = A_0/\mathfrak{R}_0$, $B'_0 = B_0 \otimes_{A_0} A'_0 = B_0/\mathfrak{R}_0 B_0$, $\mathfrak{Z}'_0 = \mathfrak{Z}_0 B'_0$, $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_0 A$, $A' = A/\mathfrak{R}$, et supposons en outre que $\text{gr}_{\mathfrak{Z}'_0}^*(M_0 \otimes_{A_0} A'_0)$ soit un A'_0 -module plat. Alors il existe un nombre fini d'éléments q_h ($1 \leq h \leq s$) de Q tels que, pour tout idéal premier $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{R}B$ de B , les images canoniques des q_h dans $Q_{\mathfrak{p}}$ engendrent le $C_{\mathfrak{p}}$ -module $Q_{\mathfrak{p}}$.*

Supposons ce lemme démontré, et notons qu'on peut encore l'appliquer en remplaçant A_0 par $(A_0)_{i_0}$, B_0 , \mathfrak{Z}_0 , M_0 , A_λ et A par les objets correspondants $(B_0)_{i_0}$, $(\mathfrak{Z}_0)_{i_0}$, $(M_0)_{i_0}$, $(A_\lambda)_{i_0}$ et A_{i_0} pour tout $t_0 \in A_0$, puisque $(A_0)_{i_0}$ est un A_0 -module plat. On appliquera alors ce lemme en remplaçant successivement A_0 par chacun des anneaux $(A_0)_{f_{ik}}$, \mathfrak{R}_0 étant remplacé par l'idéal \mathfrak{R}_{ik} définissant le sous-schéma fermé de $D(f_{ik})$ induit par S_{0i} sur l'ouvert $S_{0i} \cap D(f_{ik})$ de S_{0i} . Comme l'hypothèse de platitude de (II.2.9.6) est vérifiée dans chacun de ces cas en raison de (II.2.9.5), on obtient ainsi pour chaque couple (i, k) une famille finie $(a_{ikh})_{1 \leq h \leq l}$ d'éléments de $Q_{f_{ik}}$ dont les images dans $Q_{\mathfrak{p}_{ik}}$ engendrent ce $C_{\mathfrak{p}_{ik}}$ -module, pour tout idéal premier \mathfrak{p}_{ik} de $B_{f_{ik}}$ contenant $\mathfrak{R}_{ik} B_{f_{ik}}$. On peut écrire, pour un entier $d > 0$ convenable, $a_{ikh} = b_{ikh}/f_{ik}^d$ pour tous les indices i, k, h , avec $b_{ikh} \in Q$. Puisque les S_{0i} recouvrent S_0 , tout idéal premier \mathfrak{p} de B est tel que son image dans S_0 appartienne à un ensemble $S_{0i} \cap D(f_{ik})$, donc l'image \mathfrak{p}_{ik} de \mathfrak{p} dans $B_{f_{ik}}$ contient $\mathfrak{R}_{ik} B_{f_{ik}}$. Comme les images des b_{ikh} ($1 \leq h \leq l$) dans $Q_{\mathfrak{p}_{ik}} = Q_{\mathfrak{p}}$ engendrent ce $C_{\mathfrak{p}}$ -module, on en conclut que les b_{ikh} ($1 \leq i \leq m$, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq h \leq l$) engendrent le C -module Q (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 3, n° 3, th. 1).

Reste à démontrer le lemme (II.2.9.6). Posons $C' = C \otimes_A A' = C/\mathfrak{R}C$, $B' = B \otimes_A A'$, $\mathfrak{Z}' = \mathfrak{Z}B'$, $M' = M \otimes_A A'$. Par hypothèse $\text{gr}_{\mathfrak{Z}'}^*(M')$ est un A' -module plat, donc $\text{gr}_{\mathfrak{Z}'}^*(M')$ s'identifie à $\text{gr}_{\mathfrak{Z}'}^*(M) \otimes_A A'$ (II.2.9.2), et on a la suite exacte ($\mathbf{0}_1, 6.1.2$)

$$(II.2.9.7) \quad 0 \rightarrow Q \otimes_A A' \rightarrow C'^r \xrightarrow{u \otimes 1_{A'}} \text{gr}_{\mathfrak{Z}'}^*(M') \rightarrow 0.$$

Posons $C'_0 = C_0 \otimes_{A_0} A'_0 = C_0/\mathfrak{R}_0 C_0$ et considérons l'épimorphisme de C'_0 -modules gradués

$$u'_0 : C_0'^r \xrightarrow{u_0 \otimes 1_{A'_0}} \text{gr}_{\mathfrak{Z}'_0}^*(M_0) \otimes_{A_0} A'_0 \rightarrow \text{gr}_{\mathfrak{Z}'_0}^*(M_0 \otimes_{A_0} A'_0).$$

Soit $Q_0 = \text{Ker}(u'_0)$; utilisant le fait que $\text{gr}_{\mathfrak{Z}'_0}^*(M_0 \otimes_{A_0} A'_0)$ est un A'_0 -module plat, on voit que $\text{gr}_{\mathfrak{Z}'_0}^*(M_0 \otimes_{A_0} A'_0) \otimes_{A_0} A'$ s'identifie à $\text{gr}_{\mathfrak{Z}'}^*(M')$ (II.2.9.2) et on a la suite exacte ($\mathbf{0}_1, 6.1.2$)

$$(II.2.9.8) \quad 0 \rightarrow Q_0 \otimes_{A'_0} A' \rightarrow C_0'^r \xrightarrow{u \otimes 1_{A'}} \text{gr}_{\mathfrak{Z}'}^*(M') \rightarrow 0,$$

d'où, par comparaison avec (11.2.9.7), un isomorphisme de C' -modules gradués $Q \otimes_A A' \xrightarrow{\sim} Q_0 \otimes_{A_0} A'$.

Comme C'_0 est noethérien, Q_0 est un C'_0 -module de type fini, donc $Q_0 \otimes_{A_0} A'$ est un C' -module gradué de type fini, et il en est par suite de même de $Q \otimes_A A'$; soient q_h ($1 \leq h \leq s$) des éléments homogènes de Q dont les images dans $Q \otimes_A A'$ engendrent ce C' -module.

Considérons maintenant un idéal premier quelconque $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{R}B$ de B ; on a $C_{\mathfrak{p}} = \text{gr}_{\mathfrak{S}_{\mathfrak{p}}}^{\bullet}(B_{\mathfrak{p}})$ par platitude, et $\text{gr}_{\mathfrak{S}_{\mathfrak{p}}}^0(B_{\mathfrak{p}}) = B_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{S}_{\mathfrak{p}}$ est réduit à 0 ou est un anneau local; pour prouver le lemme, on peut évidemment se borner au second cas. Il est clair alors que chacun des $(B_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{S}_{\mathfrak{p}})$ -modules $\text{gr}_{\mathfrak{S}_{\mathfrak{p}}}^i(B_{\mathfrak{p}})$ est de présentation finie. D'autre part, pour tout indice i , $M/\mathfrak{S}^i M$ s'identifie à $(M_0/\mathfrak{S}_0^i M_0) \otimes_{A_0} A$, et est donc un B -module de présentation finie. Par récurrence sur i , l'hypothèse que $\text{gr}_{\mathfrak{S}}^i(M)$ est un A -module plat entraîne, en vertu de (0_I, 6.1.2) que $M/\mathfrak{S}^i M$ est un A -module plat. L'application de (11.2.6.1) où l'on remplace M_0 par $M_0/\mathfrak{S}_0^k M_0$ pour $k \leq i$ montre qu'il existe un indice λ_i tel que, pour $\mu \geq \lambda_i$, chacun des $M_{\mu}/\mathfrak{S}_{\mu}^{k+1} M_{\mu}$ soit un A_{μ} -module plat, et par suite aussi (0_I, 6.1.2) chacun des $\text{gr}_{\mathfrak{S}_{\mu}}^k(M_{\mu})$ est un A_{μ} -module plat pour $k \leq i$. On déduit par suite de (11.2.9.2) que chacun des (B/\mathfrak{S}) -modules $\text{gr}_{\mathfrak{S}}^i(M)$ est de présentation finie, donc $\text{gr}_{\mathfrak{S}_{\mathfrak{p}}}^i(M_{\mathfrak{p}})$ est un $(B_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{S}_{\mathfrak{p}})$ -module de présentation finie. Par ailleurs les images des q_h dans $Q_{\mathfrak{p}} \otimes_{B_{\mathfrak{p}}} \mathbf{k}(\mathfrak{p}) = (Q \otimes_A A')_{\mathfrak{p}} \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} \mathbf{k}(\mathfrak{p})$ engendrent ce $(C_{\mathfrak{p}} \otimes_{B_{\mathfrak{p}}} \mathbf{k}(\mathfrak{p}))$ -module (car $C_{\mathfrak{p}} \otimes_{B_{\mathfrak{p}}} \mathbf{k}(\mathfrak{p}) = C'_{\mathfrak{p}} \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} \mathbf{k}(\mathfrak{p})$); comme on a la suite exacte

$$Q_{\mathfrak{p}} \otimes_{B_{\mathfrak{p}}} \mathbf{k}(\mathfrak{p}) \rightarrow C'_{\mathfrak{p}} \otimes_{B_{\mathfrak{p}}} \mathbf{k}(\mathfrak{p}) \rightarrow \text{gr}_{\mathfrak{S}_{\mathfrak{p}}}^{\bullet}(M_{\mathfrak{p}}) \otimes_{B_{\mathfrak{p}}} \mathbf{k}(\mathfrak{p}) \rightarrow 0$$

on en conclut que $\text{gr}_{\mathfrak{S}_{\mathfrak{p}}}^{\bullet}(M_{\mathfrak{p}}) \otimes_{B_{\mathfrak{p}}} \mathbf{k}(\mathfrak{p})$ est un $(C_{\mathfrak{p}} \otimes_{B_{\mathfrak{p}}} \mathbf{k}(\mathfrak{p}))$ -module de présentation finie. Appliquant le lemme (11.2.9.4) où A, B, M sont remplacés respectivement par $B_{\mathfrak{p}}, C_{\mathfrak{p}}$ et $\text{gr}_{\mathfrak{S}_{\mathfrak{p}}}^{\bullet}(M_{\mathfrak{p}})$, on en conclut que $Q_{\mathfrak{p}}$ est un $C_{\mathfrak{p}}$ -module *de type fini*. Utilisant maintenant le lemme de Nakayama (et le fait que $C=B$) on en déduit que les images des q_h dans $Q_{\mathfrak{p}}$ engendrent ce $C_{\mathfrak{p}}$ -module. Ceci achève de prouver le lemme (11.2.9.6) et le fait que $\text{gr}_{\mathfrak{S}}^{\bullet}(M)$ est un C -module de présentation finie.

VI) *Fin de la démonstration.* — Posons pour abréger $C_{\lambda} = C_0 \otimes_{A_0} A_{\lambda}$ (égal en fait à B_{λ}), $N_{\lambda} = \text{gr}_{\mathfrak{S}_{\lambda}}^{\bullet}(M_{\lambda})$ et $N = \text{gr}_{\mathfrak{S}}^{\bullet}(M)$. Notons d'abord que pour chaque entier k , $\mathfrak{S}^k M$ s'identifie à $\varinjlim \mathfrak{S}_{\lambda}^k M_{\lambda}$ par exactitude du foncteur \varinjlim , l'image de $\mathfrak{S}_{\lambda}^k M_{\lambda}$ dans M_{μ} pour $\lambda \leq \mu$ (resp. dans M) engendrant $\mathfrak{S}_{\mu}^k M_{\mu}$ (resp. $\mathfrak{S}^k M$); utilisant encore l'exactitude de \varinjlim , on en conclut que N s'identifie canoniquement à $\varinjlim N_{\lambda}$. Faisant cette identification, nous allons d'abord prouver que :

(11.2.9.9) *Pour λ assez grand, l'homomorphisme canonique $v_{\lambda} : N_{\lambda} \otimes_{A_{\lambda}} A \rightarrow N$ est bijectif.*

Comme les C_{λ} sont noethériens et N_{λ} un C_{λ} -module de type fini, les C -modules $N_{\lambda} \otimes_{A_{\lambda}} A$ sont de présentation finie et forment un système inductif filtrant, dont la limite inductive s'identifie canoniquement à N en vertu du fait que \varinjlim commute aux produits tensoriels. En outre, les homomorphismes de transition $v_{\mu\lambda} : N_{\lambda} \otimes_{A_{\lambda}} A \rightarrow N_{\mu} \otimes_{A_{\mu}} A$

pour $\lambda \leq \mu$ et les homomorphismes v_λ sont *surjectifs*. Pour un λ fixé, considérons les sous-C-modules $\text{Ker}(v_{\mu\lambda}) = N'_\mu$ de $N_\lambda \otimes_{A_\lambda} A$; par définition de la limite inductive, ils forment une famille filtrante croissante de sous-C-modules de $\text{Ker}(v_\lambda)$, dont la réunion est $\text{Ker}(v_\lambda)$; mais on a vu dans V) que N est un C-module de présentation finie, donc (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. I, § 2, n° 8, lemme 9) $\text{Ker}(v_\lambda)$ est un C-module *de type fini*; il existe par suite un indice $\mu \geq \lambda$ tel que $N'_\mu = \text{Ker}(v_\lambda)$, ce qui signifie (vu le fait que $v_{\mu\lambda}$ est surjectif) que v_μ est *injectif*; comme il est surjectif, cela prouve (II.2.9.9).

Quitte à remplacer A_0 et M_0 par A_λ et M_λ pour λ assez grand, on peut donc supposer que l'homomorphisme canonique v_λ est bijectif pour *tout* λ . Posons alors $P_\lambda = N_0 \otimes_{C_0} C_\lambda = N_0 \otimes_{A_0} A_\lambda$, de sorte que $N = \varinjlim P_\lambda$. Comme C_0 est une A_0 -algèbre de présentation finie et P_0 un C_0 -module de présentation finie, on peut appliquer à C et N le résultat de (II.2.6.1) et on voit donc qu'il existe un indice λ tel que, pour $\mu \geq \lambda$, P_μ soit un A_μ -module *plat*. Or, pour $\mu \geq \lambda$, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} P_\mu & \longrightarrow & N \\ w_\mu \downarrow & & \parallel \\ N_\mu & \longrightarrow & N \end{array}$$

où il résulte des définitions que w_μ est *surjectif*. Comme, en vertu de III), les homomorphismes $A_\mu \rightarrow A$ sont injectifs et que P_μ est un A_μ -module *plat*, l'homomorphisme canonique $P_\mu \rightarrow N = P_\mu \otimes_{A_\mu} A$ est *injectif*; on conclut donc du diagramme commutatif précédent que w_μ est aussi *injectif*, donc bijectif, et par suite N_μ est un A_μ -module *plat* pour $\mu \geq \lambda$, ce qui achève de prouver (II.2.9).

Remarque (II.2.10). — Nous ignorons si la généralisation de (II.2.6, (i)) analogue au th. de Raynaud, est valable.

II.3. Application à l'élimination d'hypothèses noethériennes.

Théorème (II.3.1). — Soient $f : X \rightarrow Y$ un morphisme localement de présentation finie, \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -Module quasi-cohérent de présentation finie. Alors l'ensemble U des points $x \in X$ tels que \mathcal{F} soit f -plat au point x est ouvert dans X . Si de plus $\text{Supp}(\mathcal{F}) = X$, $f|_U$ est un morphisme ouvert.

La seconde assertion a déjà été démontrée (2.4.6) et n'a été insérée que pour mémoire.

La question étant locale sur X et Y , on peut supposer que X et Y sont affines, et que f est un morphisme de présentation finie. Soit $x \in X$ un point tel que \mathcal{F} soit f -plat au point x . Appliquant (II.2.7), on peut supposer que $X = X_0 \times_{Y_0} Y$, $f = f_0 \times 1$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \otimes_{\mathcal{O}_{Y_0}} \mathcal{O}_Y$, où Y_0 est noethérien, $f_0 : X_0 \rightarrow Y_0$ un morphisme de type fini, \mathcal{F}_0 un \mathcal{O}_{X_0} -Module cohérent; en outre, si x_0 est la projection canonique de x dans X_0 , on peut supposer que \mathcal{F}_0 est f_0 -plat au point x_0 . Alors, en vertu de (II.1.1), l'ensemble U_0 des points de X_0 où \mathcal{F}_0 est f_0 -plat est un voisinage de x_0 ; donc \mathcal{F} est f -plat aux points de l'image réciproque de U_0 dans X (2.1.4), et cela prouve que U est un voisinage de x .

Corollaire (II.3.2). — Soient $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ deux morphismes de présentation finie, \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -Module quasi-cohérent de présentation finie. Alors l'ensemble U des $y \in Y$ tels que, pour toute générisation y' de y , \mathcal{F} soit $(g \circ f)$ -plat en tous les points de $f^{-1}(y')$ (i.e. tels que $\mathcal{F} \otimes_Y \text{Spec}(\mathcal{O}_{Y,y})$ soit plat relativement au morphisme $X \times_Y \text{Spec}(\mathcal{O}_{Y,y}) \rightarrow Z$) est ouvert dans Y .

Le même raisonnement que dans (II.1.5) montre que si V est l'ensemble des $x \in X$ où \mathcal{F} est $(g \circ f)$ -plat, U est l'ensemble des $y \in Y$ dont toute générisation appartient à $E = Y - f(X - V)$. Comme $g \circ f$ est de présentation finie, V est ouvert dans X en vertu de (II.3.1), donc ind-constructible (I.9.6), et par suite $X - V$ est pro-constructible; mais comme f est quasi-compact, $f(X - V)$ est pro-constructible dans Y (I.9.5, (vii)), et par suite E est ind-constructible dans Y . Mais il résulte alors de (I.10.1) que U est l'intérieur de E , donc ouvert dans Y .

Corollaire (II.3.3). — Soient A un anneau, B une A -algèbre de présentation finie, C une B -algèbre de présentation finie, M un C -module de présentation finie. Alors l'ensemble des $q \in \text{Spec}(B)$ tels que M_q soit un A -module plat est ouvert dans $\text{Spec}(B)$.

Proposition (II.3.4). — Soient $f: X \rightarrow S$ un morphisme localement de présentation finie, \mathcal{I} un idéal quasi-cohérent de type fini de \mathcal{O}_X , Y le sous-préschéma fermé de X défini par \mathcal{I} , \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -Module de présentation finie. On suppose que $\text{gr}_{\mathcal{I}}^*(\mathcal{F})$ est f -plat. Dans ces conditions :

- (i) \mathcal{F} est f -plat aux points de Y .
- (ii) Si $\text{gr}_{\mathcal{I}}^*(\mathcal{O}_X)$ est f -plat, $\text{gr}_{\mathcal{I}}^*(\mathcal{O}_X)$ est une $(\mathcal{O}_X/\mathcal{I})$ -Algèbre de présentation finie et $\text{gr}_{\mathcal{I}}^*(\mathcal{F})$ est un $(\text{gr}_{\mathcal{I}}^*(\mathcal{O}_X))$ -Module de présentation finie.
- (iii) Supposons $\text{gr}_{\mathcal{I}}^*(\mathcal{O}_X)$ f -plat (ce qui entraîne que $\mathcal{O}_X/\mathcal{I}$ est f -plat). Alors l'ensemble W des $y \in Y$ tels que $(\text{gr}_{\mathcal{I}}^*(\mathcal{F}))_y$ soit un $(\mathcal{O}_X/\mathcal{I})_y$ -module plat est ouvert dans Y .
- (iv) Supposons $\text{gr}_{\mathcal{I}}^*(\mathcal{O}_X)$ f -plat. Soit $S' \rightarrow S$ un morphisme quelconque; soient $X' = X \times_S S'$, $p: X' \rightarrow X$ la projection canonique, $Y' = p^{-1}(Y) = Y \times_S S'$ le sous-préschéma fermé de X' , défini par $\mathcal{I}' = p^*(\mathcal{I})\mathcal{O}_{X'}$, $\mathcal{F}' = p^*(\mathcal{F}) = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S'}$; alors, si $W' = p^{-1}(W)$, on a $\text{gr}_{\mathcal{I}'}^*(\mathcal{F}')|_{W'} \cong p^*(\text{gr}_{\mathcal{I}}^*(\mathcal{F})|_W)$, et $\text{gr}_{\mathcal{I}'}^*(\mathcal{F}')$ est un $(\mathcal{O}_{X'}/\mathcal{I}')$ -Module plat aux points de W' .

Les questions étant locales sur X et S , on peut supposer que $S = \text{Spec}(A)$ et $X = \text{Spec}(B)$ sont affines, B étant une A -algèbre de présentation finie, et $\mathcal{F} = \widetilde{M}$, où M est un B -module de présentation finie, $\mathcal{I} = \widetilde{\mathfrak{I}}$, où \mathfrak{I} est un idéal de type fini de B ; en vertu de (8.9.1) et (8.5.11), il existe un sous-anneau noethérien A_0 de A , une A_0 -algèbre de type fini B_0 tels que $B = B_0 \otimes_{A_0} A$, un idéal \mathfrak{I}_0 de B_0 tel que $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_0 B$, un B_0 -module de type fini M_0 tel que $M = M_0 \otimes_{A_0} A = M_0 \otimes_{B_0} B$. En outre, A est limite inductive de ses sous- A_0 -algèbres de type fini A_λ ; on pose $B_\lambda = B_0 \otimes_{A_0} A_\lambda$, $M_\lambda = M_0 \otimes_{A_0} A_\lambda = M_0 \otimes_{B_0} B_\lambda$, $\mathfrak{I}_\lambda = \mathfrak{I}_0 B_\lambda$, de sorte que $B = \varinjlim B_\lambda$, $M = \varinjlim M_\lambda$. Cela étant, par hypothèse $\text{gr}_{\mathfrak{I}}^*(M)$ est un A -module plat; donc il résulte de (II.2.9) qu'il existe un λ tel que $\text{gr}_{\mathfrak{I}_\lambda}^*(M_\lambda)$ soit un A_λ -module plat. Pour prouver que \mathcal{F} est f -plat aux points de Y , on peut donc se borner au cas où S est noethérien; mais alors (0_I, 6.1.2), appliqué par récurrence sur n , prouve que les $\mathcal{F}/\mathcal{I}^{n+1}\mathcal{F}$ sont f -plats, et on conclut par (0_{III}, 10.2.6).

La démonstration de (ii) se ramène de la même façon au cas où S est noethérien,

en utilisant (11.2.9); la conclusion est alors évidente, $\text{gr}_{\mathfrak{S}}^{\bullet}(\mathcal{B})$ étant dans ce cas une $(\mathcal{B}/\mathfrak{S})$ -algèbre de type fini et $\text{gr}_{\mathfrak{S}}^{\bullet}(\mathcal{M})$ un $\text{gr}_{\mathfrak{S}}^{\bullet}(\mathcal{B})$ -module de type fini.

Pour prouver (iii), on se ramène comme dans (i) au cas où S et X sont affines; avec les mêmes notations, on peut supposer, en vertu de (11.2.9) que $\text{gr}_{\mathfrak{S}_{\lambda}}^{\bullet}(\mathcal{B}_{\lambda})$ et $\text{gr}_{\mathfrak{S}_{\lambda}}^{\bullet}(\mathcal{M}_{\lambda})$ sont des A_{λ} -modules plats et que l'on a $\text{gr}_{\mathfrak{S}}^{\bullet}(\mathcal{B}) = \text{gr}_{\mathfrak{S}_{\lambda}}^{\bullet}(\mathcal{B}_{\lambda}) \otimes_{A_{\lambda}} A$ et $\text{gr}_{\mathfrak{S}}^{\bullet}(\mathcal{M}) = \text{gr}_{\mathfrak{S}_{\lambda}}^{\bullet}(\mathcal{M}_{\lambda}) \otimes_{A_{\lambda}} A$. Par suite $\text{gr}_{\mathfrak{S}}^{\bullet}(\mathcal{B})$ est une $(\mathcal{B}/\mathfrak{S})$ -algèbre de présentation finie et $\text{gr}_{\mathfrak{S}}^{\bullet}(\mathcal{M})$ un $\text{gr}_{\mathfrak{S}}^{\bullet}(\mathcal{B})$ -module de présentation finie. Si W^m est l'ensemble des $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(\mathcal{B}/\mathfrak{S})$ tels que $\text{gr}_{\mathfrak{S}}^{\bullet}(\mathcal{M})_{\mathfrak{p}}$ soit un $(\mathcal{B}/\mathfrak{S})$ -module plat, W^m est ouvert dans $\text{Spec}(\mathcal{B}/\mathfrak{S})$ (11.3.1) et l'on a $W = \bigcap_m W^m$, donc W est stable par généralisation. L'assertion (iii) résulte alors de (11.3.2) appliqué en y prenant $X = \text{Spec}(\text{gr}_{\mathfrak{S}}^{\bullet}(\mathcal{B}))$, $Y = Z = \text{Spec}(\mathcal{B}/\mathfrak{S})$ et $\mathcal{F} = (\text{gr}_{\mathfrak{S}}^{\bullet}(\mathcal{M}))^{\sim}$.

Enfin, (iv) découle aussitôt de (11.2.9.2).

Généralisant la définition de (6.10.1), on dit que pour un préschéma X , un sous-préschéma fermé Y de X défini par un idéal quasi-cohérent \mathcal{I} de \mathcal{O}_X , et un \mathcal{O}_X -Module quasi-cohérent \mathcal{F} , \mathcal{F} est *normalement plat le long de Y en un point y* si $(\text{gr}_{\mathfrak{y}}^{\bullet}(\mathcal{F}))_y$ est un $\mathcal{O}_{X,y}$ -module plat. On dit que \mathcal{F} est *normalement plat le long de Y* s'il l'est en tous les points de Y .

Corollaire (11.3.5). — *Sous les hypothèses générales de (11.3.4), on suppose que $\text{gr}_{\mathfrak{y}}^{\bullet}(\mathcal{O}_X)$ et $\text{gr}_{\mathfrak{y}}^{\bullet}(\mathcal{F})$ soient f -plats. Alors l'ensemble W des $y \in Y$ tels que \mathcal{F} soit normalement plat le long de Y au point y est ouvert dans Y , et (avec les notations de (11.3.4, (iv))) \mathcal{F}' est normalement plat le long de Y' en tous les points de $W' = \mathfrak{p}^{-1}(W)$.*

Proposition (11.3.6). — *Les notations étant celles de (8.5.1) et (8.8.1), on suppose S_{α} quasi-compact, X_{α} de présentation finie sur S_{α} , Y_{α} un sous-préschéma fermé de X_{α} défini par un idéal quasi-cohérent \mathcal{I}_{α} de type fini de $\mathcal{O}_{X_{\alpha}}$ tel que $\text{gr}_{\mathfrak{y}_{\alpha}}^{\bullet}(\mathcal{O}_{X_{\alpha}})$ soit plat sur S_{α} ; enfin on suppose que \mathcal{F}_{α} est un $\mathcal{O}_{X_{\alpha}}$ -Module de présentation finie. Pour que \mathcal{F} soit normalement plat le long de Y , il faut et il suffit qu'il existe λ tel que \mathcal{F}_{λ} soit normalement plat le long de Y_{λ} .*

Notons que Y (resp. Y_{λ}) est le sous-préschéma fermé de X (resp. X_{λ}) défini par $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{\alpha} \mathcal{O}_X$ (resp. $\mathcal{I}_{\lambda} = \mathcal{I}_{\alpha} \mathcal{O}_{X_{\lambda}}$); en vertu de l'hypothèse et de (11.2.9.2), on a $\text{gr}_{\mathfrak{y}_{\alpha}}^{\bullet}(\mathcal{O}_X) = \text{gr}_{\mathfrak{y}_{\alpha}}^{\bullet}(\mathcal{O}_{X_{\alpha}}) \otimes_{\mathcal{O}_{S_{\alpha}}} \mathcal{O}_S$ et $\text{gr}_{\mathfrak{y}_{\lambda}}^{\bullet}(\mathcal{O}_{X_{\lambda}}) = \text{gr}_{\mathfrak{y}_{\alpha}}^{\bullet}(\mathcal{O}_{X_{\alpha}}) \otimes_{\mathcal{O}_{S_{\alpha}}} \mathcal{O}_{S_{\lambda}}$ pour $\lambda \geq \alpha$, et $\text{gr}_{\mathfrak{y}}^{\bullet}(\mathcal{O}_X)$ (resp. $\text{gr}_{\mathfrak{y}_{\lambda}}^{\bullet}(\mathcal{O}_{X_{\lambda}})$) est plat sur S (resp. S_{λ}), ce qui entraîne que Y est plat sur S (resp. Y_{λ} plat sur S_{λ}). Si \mathcal{F}_{λ} est normalement plat le long de Y_{λ} , $\text{gr}_{\mathfrak{y}_{\lambda}}^{\bullet}(\mathcal{F}_{\lambda})|_{Y_{\lambda}}$ est plat sur Y_{λ} , donc aussi sur S_{λ} , et comme $(\text{gr}_{\mathfrak{y}_{\lambda}}^{\bullet}(\mathcal{F}_{\lambda}))_{x_{\lambda}} = 0$ pour $x_{\lambda} \notin Y_{\lambda}$, $\text{gr}_{\mathfrak{y}_{\lambda}}^{\bullet}(\mathcal{F}_{\lambda})$ est plat sur S_{λ} . On en conclut (11.2.9.2) que $\text{gr}_{\mathfrak{y}}^{\bullet}(\mathcal{F}) = \text{gr}_{\mathfrak{y}_{\lambda}}^{\bullet}(\mathcal{F}_{\lambda}) \otimes_{\mathcal{O}_{S_{\lambda}}} \mathcal{O}_S$, donc \mathcal{F} est normalement plat le long de Y . Pour prouver la réciproque, on peut supposer que S_{α} et X_{α} sont affines et adopter les notations de (11.2.9); puisque $\text{gr}_{\mathfrak{S}}^{\bullet}(\mathcal{B})$ est un A -module plat, il en est de même de $\text{gr}_{\mathfrak{S}}^{\bullet}(\mathcal{M})$, donc, en vertu de (11.2.9), il existe $\lambda \geq \alpha$ tel que $\text{gr}_{\mathfrak{S}_{\lambda}}^{\bullet}(\mathcal{M}_{\lambda})$ soit un A_{λ} -module plat, d'où $\text{gr}_{\mathfrak{S}}^{\bullet}(\mathcal{M}) = \text{gr}_{\mathfrak{S}_{\lambda}}^{\bullet}(\mathcal{M}_{\lambda}) \otimes_{A_{\lambda}} A$. En outre (11.3.4, (ii)), $\text{gr}_{\mathfrak{S}_{\lambda}}^{\bullet}(\mathcal{M}_{\lambda})$ est un $\text{gr}_{\mathfrak{S}_{\lambda}}^{\bullet}(\mathcal{B}_{\lambda})$ -module de présentation finie et $\text{gr}_{\mathfrak{S}_{\lambda}}^{\bullet}(\mathcal{B}_{\lambda})$ une $(\mathcal{B}_{\lambda}/\mathfrak{S}_{\lambda})$ -algèbre de présentation finie. La conclusion résulte alors de (11.2.6).

Proposition (II.3.7). — Soient $f : X \rightarrow Y$ un morphisme localement de présentation finie, $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ deux \mathcal{O}_X -Modules quasi-cohérents de présentation finie, $u : \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F}$ un \mathcal{O}_X -homomorphisme, x un point de X et $y=f(x)$; on suppose que \mathcal{F} est f -plat au point x . Les conditions suivantes sont alors équivalentes :

- a) On a $(\text{Ker } u)_x = 0$ et $\text{Coker } u$ est un \mathcal{O}_X -Module f -plat au point x .
- b) L'homomorphisme $(u \otimes 1)_x : (\mathcal{F}' \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathbf{k}(y))_x \rightarrow (\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathbf{k}(y))_x$ est injectif.

Si de plus \mathcal{F} est f -plat, l'ensemble des points x vérifiant les conditions équivalentes précédentes est ouvert dans X .

La condition a) entraîne b) en vertu de (0_I, 6.1.2), sans hypothèse sur \mathcal{F} . Pour démontrer la réciproque, on peut se borner au cas où X et Y sont affines, puis, en vertu de (8.9.1) et (11.2.7), supposer que l'on a $X = X_0 \times_Y Y, f = f_0 \times 1, \mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \otimes_{\mathcal{O}_{Y_0}} \mathcal{O}_Y, \mathcal{F}' = \mathcal{F}'_0 \otimes_{\mathcal{O}_{Y_0}} \mathcal{O}_Y, u = u_0 \otimes 1_Y$, où Y_0 est noethérien, $f_0 : X_0 \rightarrow Y_0$ un morphisme de type fini, $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}'_0$ deux \mathcal{O}_{X_0} -Modules cohérents, $u_0 : \mathcal{F}'_0 \rightarrow \mathcal{F}_0$ un homomorphisme; en outre, si x_0 est la projection de x dans X_0 , on peut supposer que \mathcal{F}_0 est f_0 -plat au point x_0 . Posons $y_0 = f_0(x_0)$; en vertu de la transitivité des fibres (I, 3.6.4), le morphisme projection $f^{-1}(y) \rightarrow f_0^{-1}(y_0)$ est fidèlement plat (2.2.13), et comme $(u \otimes 1)_x = ((u_0 \otimes 1)_{x_0}) \otimes_{\mathbf{k}(y)}$, l'hypothèse que $(u \otimes 1)_x$ est injectif entraîne qu'il en est de même de $(u_0 \otimes 1)_{x_0}$ (2.2.7). Or, cela entraîne, par (0_{III}, 10.2.4) appliqué aux anneaux locaux noethériens \mathcal{O}_{y_0} et \mathcal{O}_{x_0} et aux \mathcal{O}_{x_0} -modules $(\mathcal{F}'_0)_{x_0}$ et $(\mathcal{F}_0)_{x_0}$ (dont le second est plat sur \mathcal{O}_{y_0}) que l'on a $(\text{Ker } u_0)_{x_0} = 0$ et que $\text{Coker } u_0$ est f_0 -plat au point x_0 . On déduit d'abord de là que $\text{Coker } u$ est f -plat au point x (2.1.4); en vertu de l'exactitude à droite du produit tensoriel, on a d'ailleurs $\text{Coker } u = (\text{Coker } u_0) \otimes_{\mathcal{O}_{Y_0}} \mathcal{O}_Y$; appliquant alors (0_I, 6.1.2) à la suite (exacte par hypothèse)

$$0 \rightarrow (\mathcal{F}'_0)_{x_0} \rightarrow (\mathcal{F}_0)_{x_0} \rightarrow (\text{Coker } u_0)_{x_0} \rightarrow 0$$

on en déduit que u_x est un homomorphisme injectif.

Enfin, il résulte de (11.1.2) que l'ensemble U_0 des points $z_0 \in X_0$ tels que le morphisme $(u_0 \otimes 1)_{z_0}$ soit injectif est ouvert; par platitude on en déduit que pour tout $z \in X$ au-dessus de $z_0 \in U_0$ le morphisme $(u \otimes 1)_z$ est injectif, donc l'ensemble de ces points contient l'image réciproque U de U_0 dans X et est par suite un voisinage de x , ce qui achève la démonstration.

Théorème (II.3.8). — Soient $f : X \rightarrow Y$ un morphisme localement de présentation finie, \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -Module quasi-cohérent de présentation finie, $(g_i)_{1 \leq i \leq n}$ une suite de sections de \mathcal{O}_X au-dessus de X ; posons $\mathcal{F}_i = \mathcal{F} / \sum_{j=1}^i g_j \mathcal{F}$ pour $0 \leq i \leq n$ (avec $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}$). Soient x un point de $X, y=f(x)$, et posons $X_y = f^{-1}(y) = X \times_Y \text{Spec}(\mathbf{k}(y)), \mathcal{F}_y = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathbf{k}(y)$, qui est un \mathcal{O}_{X_y} -Module. On suppose que les $(g_i)_x$ appartiennent à l'idéal maximal \mathfrak{m}_x . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) La suite $((g_i)_x)$ est \mathcal{F}_x -régulière et les $\mathcal{F}_i (0 \leq i \leq n)$ sont f -plats au point x .
- b) La suite $((g_i)_x)$ est \mathcal{F}_x -régulière et \mathcal{F}_n est f -plat au point x .

b') Il existe un voisinage U de x tel que la suite $(g_i|U)$ soit $(\mathcal{F}|U)$ -quasi-régulière, et \mathcal{F}_n est f -plat au point x .

c) \mathcal{F} est f -plat au point x , et la suite $((g_i \otimes 1)_x)$ d'éléments de $\mathcal{O}_{X_y, x}$ images des $(g_i)_x$ est $(\mathcal{F}_y)_x$ -régulière.

d) \mathcal{F} est f -plat au point x , et pour tout morphisme $Y' \rightarrow Y$ et tout point $x' \in X' = X \times_Y Y'$ au-dessus de x , si l'on pose $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \otimes_Y Y'$, la suite $(g_i \otimes 1)_{x'}$ d'éléments de $\mathcal{O}_{X', x'}$ est $\mathcal{F}'_{x'}$ -régulière.

En outre l'ensemble des $x \in X$ vérifiant ces conditions est ouvert dans l'ensemble Z des x tels que $g_i(x) = 0$ pour tout i .

Le fait que a) entraîne d) résulte aussitôt de (0, 15.1.15), et c) est un cas particulier de d); par ailleurs a) implique b) trivialement. Montrons que b) ou c) entraîne a). Les \mathcal{F}_i sont de présentation finie; le fait que c) implique a) résulte alors aussitôt de (11.3.7) par récurrence sur n , et cela montre aussi que l'ensemble des $x \in X$ vérifiant c) est ouvert dans Z . Pour montrer que b) entraîne a), on est aussitôt ramené, par récurrence sur n , au cas $n = 1$; nous écrirons g au lieu de g_1 . La question étant locale sur X et Y , on peut supposer $Y = \text{Spec}(A)$, $X = \text{Spec}(B)$ affines, B étant une A -algèbre de présentation finie, $\mathcal{F} = \widetilde{M}$, où M est un B -module de présentation finie. On peut alors (8.9.1) écrire $B = B_0 \otimes_{A_0} A$, $M = M_0 \otimes_{A_0} A$, où A_0 est un sous-anneau noethérien de A , B_0 une A_0 -algèbre de type fini et M_0 un B_0 -module de type fini. En outre A est limite inductive filtrante de ses sous-anneaux A_λ qui sont des A_0 -algèbres de type fini (donc noethériennes), et si l'on pose $B_\lambda = B_0 \otimes_{A_0} A_\lambda$, $M_\lambda = M_0 \otimes_{A_0} A_\lambda$, B_λ est une A_λ -algèbre de type fini, M_λ un B_λ -module de type fini et l'on a $B = \varinjlim B_\lambda$, $M = \varinjlim M_\lambda$. Il existe donc un indice λ et un élément $g_\lambda \in B_\lambda$ tels que $g = g_\lambda \otimes 1$; revenant aux notations géométriques et posant $Y_\lambda = \text{Spec}(A_\lambda)$, $X_\lambda = \text{Spec}(B_\lambda)$ et $\mathcal{F}_\lambda = \widetilde{M}_\lambda$, il nous suffira de prouver qu'il y a un $\mu \geq \lambda$ tel qu'au point $x_\mu \in X_\mu$ projection de x , $(g_\mu)_{x_\mu}$ soit $(\mathcal{F}_\mu)_{x_\mu}$ -régulier et $\mathcal{F}_\mu / g_\mu \mathcal{F}_\mu$ plat sur Y_μ au point x_μ . On en déduira en effet, par (0, 15.1.16) que \mathcal{F}_μ est plat sur Y_μ au point x_μ , donc \mathcal{F} plat sur Y au point x .

Le fait que b) entraîne a) résultera donc de la proposition suivante :

Proposition (11.3.9). — Les notations et hypothèses générales étant celles de (8.5.1) et (8.8.1), supposons que $f_\alpha : X_\alpha \rightarrow Y_\alpha$ soit un morphisme localement de présentation finie. Soient \mathcal{F}_α , \mathcal{G}_α deux \mathcal{O}_{X_α} -Modules quasi-cohérents de présentation finie, $h_\alpha : \mathcal{F}_\alpha \rightarrow \mathcal{G}_\alpha$ un \mathcal{O}_{X_α} -homomorphisme, \mathcal{H}_α son conoyau. Soient enfin x un point de X , x_λ sa projection dans X_λ pour $\lambda \geq \alpha$. Pour que h_x soit injectif et que $\mathcal{H} = \text{Coker } h$ soit f -plat au point x , il faut et il suffit qu'il existe $\lambda \geq \alpha$ tel que $(h_\lambda)_{x_\lambda}$ soit injectif et que $\mathcal{H}_\lambda = \text{Coker } h_\lambda$ soit f_λ -plat au point x_λ . En outre, l'ensemble des $x \in X$ ayant les propriétés précédentes est ouvert dans X .

Rappelons qu'en vertu de l'exactitude à droite du produit tensoriel, on a $\mathcal{H}_\mu = v_{\lambda\mu}^*(\mathcal{H}_\lambda)$ pour $\lambda \leq \mu$ et $\mathcal{H} = v_\lambda^*(\mathcal{H}_\lambda)$, ce qui justifie les notations.

La suffisance de la condition provient de ce que, si la suite

$$0 \rightarrow (\mathcal{F}_\lambda)_{x_\lambda} \rightarrow (\mathcal{G}_\lambda)_{x_\lambda} \rightarrow (\mathcal{H}_\lambda)_{x_\lambda} \rightarrow 0$$

est exacte et $(\mathcal{H}_\lambda)_{x_\lambda}$ un $\mathcal{O}_{f_\lambda(x_\lambda)}$ -module plat, \mathcal{H}_x est un $\mathcal{O}_{f(x)}$ -module plat par changement de base (2.1.4) et la suite $0 \rightarrow \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x \rightarrow \mathcal{H}_x \rightarrow 0$ est exacte (2.1.8). Pour prouver que

la condition est nécessaire, notons que \mathcal{H} est de présentation finie; la question étant locale sur X , on peut supposer X et Y affines, et, en vertu de (11.3.1), supposer que \mathcal{H} est f -plat. Notons maintenant le

Lemme (11.3.9.1). — Soient $f : X \rightarrow Y$ un morphisme localement de présentation finie, \mathcal{G}, \mathcal{H} deux \mathcal{O}_X -Modules quasi-cohérents de présentation finie tels que \mathcal{H} soit f -plat, $p : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ un homomorphisme surjectif. Alors $\text{Ker}(p)$ est un \mathcal{O}_X -Module de présentation finie.

On peut en effet supposer X, Y affines, et qu'il existe un morphisme $Y \rightarrow Y_0$ où Y_0 est noethérien, un morphisme $f_0 : X_0 \rightarrow Y_0$ de type fini tels que $X = X_0 \times_{Y_0} Y, f = (f_0)_{(Y)}$, deux \mathcal{O}_{X_0} -Modules cohérents $\mathcal{G}_0, \mathcal{H}_0$ et un homomorphisme $p_0 : \mathcal{G}_0 \rightarrow \mathcal{H}_0$ tels que \mathcal{G}, \mathcal{H} et p se déduisent de $\mathcal{G}_0, \mathcal{H}_0$ et p_0 par changement de base (8.9.1 et 8.5.2). En outre, on peut supposer p_0 surjectif (8.5.7) et \mathcal{H}_0 f_0 -plat (11.2.7). Alors, si $\mathcal{K}_0 = \text{Ker}(p_0)$, \mathcal{K}_0 est un \mathcal{O}_{X_0} -Module cohérent (0_I, 5.3.4) et en vertu de (0_I, 6.1.2), $\mathcal{K} = \text{Ker}(p)$ se déduit de \mathcal{K}_0 par changement de base, donc est de présentation finie.

Ce lemme étant démontré, posons $\mathcal{K} = \text{Ker}(\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H})$, qui est donc de présentation finie. On a un homomorphisme canonique $q : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{K}$, et par hypothèse $q_x : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{K}_x$ est un isomorphisme; par suite (0_I, 5.2.7) il existe un voisinage U de x tel que $q|_U$ soit un isomorphisme, et en restreignant X , on peut supposer que la suite

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{h} \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$$

est exacte. Cela étant, il résulte de (11.2.6) que pour un λ assez grand, \mathcal{H}_λ est un \mathcal{O}_{X_λ} -Module plat; posons $\mathcal{K}_\lambda = \text{Ker}(\mathcal{G}_\lambda \rightarrow \mathcal{H}_\lambda)$ et $\mathcal{K}_\mu = v_{\lambda\mu}^*(\mathcal{K}_\lambda)$ pour $\mu \geq \lambda$; il résulte de (0_I, 6.1.2) que l'on a $\mathcal{K}_\mu = \text{Ker}(\mathcal{G}_\mu \rightarrow \mathcal{H}_\mu)$ et $\mathcal{K} = v_\lambda^*(\mathcal{K}_\lambda) = \text{Ker}(\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}) = \mathcal{F}$. On a d'autre part pour tout $\mu \geq \lambda$ un homomorphisme canonique $q_\mu : \mathcal{F}_\mu \rightarrow \mathcal{K}_\mu$ avec $q_\mu = v_{\lambda\mu}^*(q_\lambda)$ pour $\lambda \leq \mu$, et $q = v_\mu^*(q_\mu)$. Comme q est un isomorphisme, il résulte de (8.5.2.4) et (11.3.9.1) qu'il existe $\mu \geq \lambda$ tel que q_μ soit un isomorphisme, et par suite $u_\mu : \mathcal{F}_\mu \rightarrow \mathcal{G}_\mu$ un homomorphisme injectif.

Revenons à la démonstration de (11.3.8).

Puisque l'ensemble des $x \in X$ vérifiant $b)$ est ouvert dans X , il est clair que $b)$ entraîne $b')$. Montrons enfin que $b')$ entraîne $c)$. En premier lieu, \mathcal{F}_n est f -plat dans un voisinage de x (11.3.1), et on peut donc se borner au cas où $U = X$ et où \mathcal{F}_n est f -plat. Comme par définition $\text{gr}_j^*(\mathcal{F})$ est isomorphe à $\mathcal{F}_n \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_Y[T_1, \dots, T_n]$ (0, 15.2.2), il est f -plat, et on en conclut par (11.3.4, (i)) que \mathcal{F} lui-même est f -plat au voisinage de x . D'autre part, si $(\mathcal{I}_y)_x$ est l'idéal de $\mathcal{O}_{X_y, x}$ engendré par les $(g_i \otimes 1)_x$, il résulte de (11.2.9.2) que, dans le diagramme

$$\begin{array}{ccc} ((\text{gr}_{j_x}^0(\mathcal{F}_x))[T_1, \dots, T_n]) \otimes_{\mathcal{O}_y} \mathbf{k}(y) & \longrightarrow & \text{gr}_{j_x}^*(\mathcal{F}_x) \otimes_{\mathcal{O}_y} \mathbf{k}(y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\text{gr}_{(j_y)_x}^0((\mathcal{F}_y)_x))[T_1, \dots, T_n] & \longrightarrow & \text{gr}_{(j_y)_x}^*((\mathcal{F}_y)_x) \end{array}$$

les flèches verticales sont des isomorphismes; comme la première ligne est un isomorphisme, il en est de même de la seconde, donc la suite $((g_i \otimes 1)_x)$ est $(F_y)_x$ -quasi-régulière, et par suite aussi $(F_y)_x$ -régulière, puisque X_y est localement de type fini sur $k(y)$. C.Q.F.D.

Théorème (II.3.10) (critère de platitude par fibres). — Soient S un préschéma, $g : X \rightarrow S$, $h : Y \rightarrow S$ deux morphismes, $f : X \rightarrow Y$ un S -morphisme, \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -Module quasi-cohérent, x un point de X , $y=f(x)$, $s=h(y)=g(x)$. On suppose vérifiée l'une des deux hypothèses suivantes :

1° S , X et Y sont localement noethériens et \mathcal{F} est cohérent.

2° g et h sont localement de présentation finie et \mathcal{F} est de présentation finie.

Alors, avec les notations de (9.4.1), si $\mathcal{F}_x \neq 0$, les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) \mathcal{F} est g -plat au point x et \mathcal{F}_s est f_s -plat au point x .
- b) h est plat au point y et \mathcal{F} est f -plat au point x .

En outre, dans l'hypothèse 2°, l'ensemble des $x \in X$ vérifiant la condition b) est ouvert dans X .

La dernière assertion résulte de (II.3.1) appliqué à \mathcal{O}_Y et au morphisme h d'une part, à \mathcal{F} et au morphisme f (qui est localement de présentation finie) de l'autre.

Comme $g=h \circ f$, il est clair que b) implique a) sans supposer 1° ni 2° (2.1.6 et 2.1.4). Pour prouver que a) entraîne b), on peut se borner au cas où S , X et Y sont affines; sous l'hypothèse 2°, en appliquant (II.2.7), on se ramène au cas où de plus S est noethérien, c'est-à-dire qu'on peut se borner à considérer le cas où l'hypothèse 1° est satisfaite. Alors l'assertion équivaut au lemme suivant, qui améliore (0_{III}, 10.2.5) :

Lemme (II.3.10.1). — Soient $\rho : A \rightarrow B$, $\sigma : B \rightarrow C$ des homomorphismes locaux d'anneaux locaux noethériens, k le corps résiduel de A , M un C -module $\neq 0$ de type fini. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) M est un A -module plat et $M \otimes_A k$ est un $(B \otimes_A k)$ -module plat.
- b) B est un A -module plat et M est un B -module plat.

Nous établirons d'abord le lemme plus général suivant :

Lemme (II.3.10.2). — Soient A un anneau commutatif, B une A -algèbre commutative, \mathfrak{J} un idéal de A , M un B -module. On considère d'une part les conditions suivantes :

- (i) \mathfrak{J} est nilpotent.
- (ii) B est noethérien et M est idéalement séparé pour la topologie $\mathfrak{J}B$ -préadique (0_{III}, 10.2.1).
- (iii) $\mathfrak{J}B$ est contenu dans le radical de B .

On considère d'autre part les quatre propriétés :

- a) M est un B -module plat.
- b) B est un A -module plat.
- c) M est un A -module plat et $M/\mathfrak{J}M$ un $(B/\mathfrak{J}B)$ -module plat.
- d) $B/\mathfrak{J}B$ est un (A/\mathfrak{J}) -module plat et pour tout idéal maximal $\mathfrak{m} \supset \mathfrak{J}B$ de B on a $\mathfrak{m}M \neq M$.

Alors :

1° Si l'une des conditions (i), (ii) est vérifiée, la conjonction de a) et b) implique c), et c) implique a).

2° Si la condition (i) ou la conjonction de (ii) et (iii) est vérifiée, la conjonction de c) et d) implique la conjonction de a) et b).

1° La première assertion est immédiate ($\mathbf{0}_I$, 6.2.1). Supposons donc c) vérifiée, et prouvons a). Considérons les anneaux gradués $\text{gr}_{\mathfrak{J}}^*(A)$, $\text{gr}_{\mathfrak{J}}^*(B)$ et le module gradué $\text{gr}_{\mathfrak{J}}^*(M)$ (à la fois sur $\text{gr}_{\mathfrak{J}}^*(A)$ et $\text{gr}_{\mathfrak{J}}^*(B)$) relatifs aux filtrations \mathfrak{J} -préadiques, ainsi que les applications canoniques surjectives ($\mathbf{0}_{III}$, 10.1.1.2)

$$\begin{aligned} u &: \text{gr}^0(B) \otimes_{\text{gr}^0(A)} \text{gr}^*(A) \rightarrow \text{gr}^*(B) \\ v &: \text{gr}^0(M) \otimes_{\text{gr}^0(A)} \text{gr}^*(A) \rightarrow \text{gr}^*(M) \\ w &: \text{gr}^0(M) \otimes_{\text{gr}^0(B)} \text{gr}^*(B) \rightarrow \text{gr}^*(M) \end{aligned}$$

Il est clair qu'on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \text{gr}^0(M) \otimes_{\text{gr}^0(A)} \text{gr}^*(A) & \xrightarrow{v} & \text{gr}^*(M) \\ \downarrow 1 \otimes u & & \uparrow w \\ \text{gr}^0(M) \otimes_{\text{gr}^0(B)} \text{gr}^*(B) & & \end{array}$$

(11.3.10.3)

L'hypothèse c) entraîne que v est bijective ($\mathbf{0}_{III}$, 10.2.1); comme les deux autres applications du diagramme sont surjectives, elles sont aussi bijectives. Mais comme en vertu de l'hypothèse c), $M/\mathfrak{J}M$ est un $(B/\mathfrak{J}B)$ -module plat, il résulte de ($\mathbf{0}_{III}$, 10.2.1) que M est un B -module plat.

2° L'une ou l'autre des conditions (i), (iii) implique que tout idéal maximal de B contient $\mathfrak{J}B$. Il résulte donc de 1° et de la conjonction de c) et d) que M est un B -module fidèlement plat, et par suite $\text{gr}^0(M)$ un $\text{gr}^0(B)$ -module fidèlement plat ($\mathbf{0}_I$, 6.2.1). On a vu dans 1° que l'hypothèse c) entraîne que les trois applications du diagramme (11.3.10.3) sont bijectives; le fait que $\text{gr}^0(M)$ soit un $\text{gr}^0(B)$ -module fidèlement plat implique donc que u est aussi bijective ($\mathbf{0}_I$, 6.4.1). D'autre part, les conditions (ii) et (iii) impliquent que B est un A -module idéalement séparé pour la filtration \mathfrak{J} -préadique (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 5, n° 4, prop. 2); on déduit donc encore de ($\mathbf{0}_{III}$, 10.2.1) que si la condition (i), ou la conjonction de (ii) et (iii), est vérifiée, B est un A -module plat.

(11.3.10.4) Le lemme (11.3.10.2) étant établi, on en déduit (11.3.10.1) en prenant pour \mathfrak{J} l'idéal maximal de A , et en remarquant qu'alors les conditions (ii) et (iii) de (11.3.10.2) sont satisfaites (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 5, n° 4, prop. 2). Ceci achève donc aussi la démonstration de (11.3.7).

Corollaire (11.3.11). — Soient $g : X \rightarrow S$, $h : Y \rightarrow S$ deux morphismes localement de présentation finie, $f : X \rightarrow Y$ un S -morphisme. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) g est plat et $f_s : X_s \rightarrow Y_s$ est plat pour tout $s \in S$.
- b) h est plat en tous les points de $f(X)$ et f est plat.

Il suffit d'appliquer (11.3.10) pour $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$.

Remarque (11.3.12). — Il serait intéressant de pouvoir donner de (11.3.2) et (11.3.10) des démonstrations n'utilisant pas le passage à la limite inductive; il suffirait pour cela de démontrer le critère suivant :

Soient A un anneau, B une A -algèbre de présentation finie, M un B -module de présentation finie, \mathfrak{J} un

idéal de A , \mathfrak{p} un idéal premier de B contenant $\mathfrak{Z}B$. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :

- a) $M_{\mathfrak{p}}$ est un A -module plat.
- b) $M_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{Z}M_{\mathfrak{p}}$ est un (A/\mathfrak{Z}) -module plat et $\text{Tor}_1^A(A/\mathfrak{Z}, M_{\mathfrak{p}}) = 0$.

Lorsque A est *noethérien*, c'est une conséquence de (0_{III}, 10.2.2) appliqué à la A -algèbre noethérienne $B_{\mathfrak{p}}$; peut-on en déduire l'énoncé général par un passage à la limite inductive ?

Il convient de noter à ce propos qu'une telle généralisation n'est certainement pas possible lorsqu'on remplace la condition b) ci-dessus par l'une des conditions c), d) de (0_{III}, 10.2.1) où M est remplacé par $M_{\mathfrak{p}}$. Prenons par exemple pour A un anneau local dont l'idéal maximal \mathfrak{Z} est principal et tel que l'intersection $\mathfrak{R} = \bigcap_{n \geq 0} \mathfrak{Z}^{n+1}$ ne soit pas réduite à 0 (par exemple l'anneau des germes de fonctions numériques indéfiniment différentiables au voisinage de 0 dans \mathbf{R}). Prenons $B = A$, $\mathfrak{p} = \mathfrak{Z}$, et $M = A/\mathfrak{R}$, où \mathfrak{R} est un sous-module monogène $\neq 0$ de \mathfrak{R} ; M est donc de présentation finie. Il est clair que M n'est pas un A -module plat, car étant de présentation finie, il serait libre (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 3, n° 2, cor. 2 de la prop. 5), ce qui est absurde puisque $\mathfrak{R} \neq 0$. Cependant, $\mathfrak{Z}^k M/\mathfrak{Z}^{k+n} M$ est isomorphe à A/\mathfrak{Z}^n quels que soient k et n positifs, donc M vérifie bien les conditions c) et d) de (0_{III}, 10.2.1) puisque A/\mathfrak{Z} est un corps.

Proposition (II.3.13). — Soient $f: X \rightarrow Y$ un morphisme de préschémas, x un point de X tel que f soit plat au point x ; posons $y = f(x)$.

- (i) Si X est réduit (resp. normal) au point x , alors Y est réduit (resp. normal) au point y .
- (ii) On suppose de plus que f soit de présentation finie au point x . Alors, si Y est réduit (resp. normal) au point y et si le morphisme f est réduit (resp. normal) au point x (6.8.1), X est réduit (resp. normal) au point x .

La première assertion n'est mise que pour mémoire, ayant été démontrée dans (2.1.13). Pour prouver (ii), on peut se borner au cas où $X = \text{Spec}(B)$, $Y = \text{Spec}(A)$, où A est un anneau local réduit (resp. intègre et intégralement clos) et B une A -algèbre de présentation finie. On peut alors (8.9.1) écrire $B = B_0 \otimes_{A_0} A$, où A_0 est une sous- \mathbf{Z} -algèbre de type fini de A et B_0 une A -algèbre de type fini. Soit (C_α) la famille filtrante croissante des sous- A_0 -algèbres de type fini de A , qui sont donc des \mathbf{Z} -algèbres de type fini; on a $A = \varinjlim C_\alpha$. Distinguons maintenant les deux cas :

1° Supposons A réduit et f réduit au point x . Si \mathfrak{m} est l'idéal maximal de A , soit \mathfrak{p}_α l'idéal premier $\mathfrak{m} \cap C_\alpha$, et posons $A'_\alpha = (C_\alpha)_{\mathfrak{p}_\alpha}$, de sorte que l'on a aussi $A = \varinjlim A'_\alpha$ (5.13.3). Posons $Y_\alpha = \text{Spec}(A'_\alpha)$, $X_\alpha = \text{Spec}(B_0 \otimes_{A_0} A'_\alpha)$ et soient $f_\alpha: X_\alpha \rightarrow Y_\alpha$, x_α (resp. y_α) la projection de x (resp. y) dans X_α (resp. Y_α). Puisque f est réduit au point x , il existe α_0 tel que f_α soit réduit au point x_α pour $\alpha \geq \alpha_0$ ((6.7.8) et (11.2.6)); comme Y_α et X_α sont noethériens et que A'_α est réduit (puisque'il en est ainsi de C_α) on déduit de (3.3.5) que X_α est réduit au point x_α . Mais puisque $B = \varinjlim (B_0 \otimes_{A_0} A'_\alpha)$, on a aussi $\mathcal{O}_{X,x} = \varinjlim \mathcal{O}_{X_\alpha, x_\alpha}$ (5.13.3) et par suite $\mathcal{O}_{X,x}$ est réduit (5.13.2).

2° Supposons A intégralement clos et f normal au point x . Comme C_α est universellement japonais (7.7.4), sa clôture intégrale C'_α est une C_α -algèbre finie, évidemment contenue dans A . Soit \mathfrak{p}'_α l'idéal premier $\mathfrak{m} \cap C'_\alpha$, et posons $A''_\alpha = (C'_\alpha)_{\mathfrak{p}'_\alpha}$, de sorte que A''_α est un anneau local noethérien intègre et intégralement clos, et que l'on a $A = \varinjlim A''_\alpha$ (5.13.3). Posons $Y'_\alpha = \text{Spec}(A''_\alpha)$, $X'_\alpha = \text{Spec}(B_0 \otimes_{A_0} A''_\alpha)$ et soient $f'_\alpha: X'_\alpha \rightarrow Y'_\alpha$, x'_α (resp. y'_α) la projection de x (resp. y) dans X'_α (resp. Y'_α). Puisque f est normal au point x , il existe α_0 tel que, pour $\alpha \geq \alpha_0$, f'_α soit normal au point x'_α ((6.7.8) et (11.2.6));

comme X'_α et Y'_α sont noethériens et que A'_α est intégralement clos, on déduit de (6.5.4) que X'_α est normal au point x'_α . Mais les morphismes $\text{Spec}(A'_\beta) \rightarrow \text{Spec}(A'_\alpha)$ pour $\alpha \leq \beta$ sont dominants, donc, comme en vertu de (11.3.1) on peut supposer que les f'_α sont plats pour $\alpha \geq \alpha_0$, il résulte de (2.3.7) que toute composante irréductible de X'_β domine une composante irréductible de X'_α . On conclut alors de (5.13.4), appliqué aux préschémas $\text{Spec}(\mathcal{O}_{X_\alpha, x_\alpha} \otimes_{A_\alpha} A'_\alpha)$, que X est normal au point x .

Corollaire (11.3.14). — Soient $f: X \rightarrow Y$ un morphisme localement de présentation finie, x un point de X , $y=f(x)$. Si Y est géométriquement unibranche au point y (6.15.1) et si le morphisme f est normal au point x (6.8.1), alors X est géométriquement unibranche au point x .

On peut évidemment se borner au cas où $Y=\text{Spec}(A)$, A étant un anneau local intègre géométriquement unibranche, y étant le point fermé de Y . Soit A' la clôture intégrale de A ; posons $Y'=\text{Spec}(A')$ et soit y' le point fermé de Y' , de sorte que le morphisme $g: Y' \rightarrow Y$ est radiciel au point y (6.15.3), entier et birationnel. Si l'on pose $X'=X \times_Y Y'$, et si $f': X' \rightarrow Y'$ et $g': X' \rightarrow X$ sont les projections, g' est entier et radiciel au point x (6.15.3.1). Soit donc x' l'unique point de $g'^{-1}(x)$, qui est au-dessus de y' . Le morphisme f' est de présentation finie et normal au point x' (6.7.8), et par suite l'anneau local $\mathcal{O}_{X', x'}$ est intègre et intégralement clos (11.3.13). D'autre part, on peut supposer f plat (11.3.1), donc g' est un morphisme birationnel (6.15.4.1); par suite $\text{Spec}(\mathcal{O}_{X, x})$ est irréductible, et comme $\mathcal{O}_{X, x}$ est réduit (11.3.13) il est intègre et géométriquement unibranche en vertu de (6.15.5).

Proposition (11.3.15). — Soient A un anneau, B une A -algèbre de présentation finie, M un B -module de présentation finie, qui est un A -module plat. Alors il existe une suite finie $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ d'éléments de A , tels que l'idéal engendré par les f_i soit égal à A , et que, pour $0 \leq i < n$, $M_{f_{i+1}} / (\sum_{j=1}^i f_j M_{f_{i+1}})$ soit un $(A_{f_{i+1}} / (\sum_{j=1}^i f_j A_{f_{i+1}}))$ -module libre.

On peut encore dire que les $D(f_i)$ forment un recouvrement ouvert de $X=\text{Spec}(A)$, et que si l'on pose $Z_1=D(f_1)$, puis, par récurrence, $Z_{i+1}=D(f_{i+1}) \cap V(f_1 A + \dots + f_i A)$, les Z_i forment une *partition* de X en ensembles localement fermés, $A_{f_{i+1}} / (\sum_{j=1}^i f_j A_{f_{i+1}})$ étant l'anneau d'un sous-schéma affine de X ayant Z_{i+1} pour espace sous-jacent.

Pour démontrer la proposition, on peut d'abord, en vertu de (11.2.7), supposer qu'il existe un sous-anneau noethérien A_0 de A , une A_0 -algèbre de type fini B_0 et un B_0 -module de type fini M_0 , plat sur A_0 et tels que $B=B_0 \otimes_{A_0} A$, $M=M_0 \otimes_{A_0} A$; il est clair qu'il suffira de prouver la proposition pour A_0 , B_0 et M_0 , car si les éléments $f_i \in A_0$ vérifient dans ce cas les conditions de l'énoncé, ils les vérifieront aussi pour A , B , M , puisque $M_{f_{i+1}} / (\sum_{j=1}^i f_j M_{f_{i+1}}) = ((M_0)_{f_{i+1}} / (\sum_{j=1}^i f_j (M_0)_{f_{i+1}})) \otimes_{A_0} A$ (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 2, n° 7, prop. 18). On peut donc se borner désormais au cas où A est noethérien.

Notons maintenant que si C est un anneau noethérien, \mathfrak{N} son nilradical et P un C -module plat, alors il résulte de (0_{III}, 10.1.2) que pour que P soit un C -module libre,

il faut et il suffit que $P \otimes_C (C/\mathfrak{M})$ soit un (C/\mathfrak{M}) -module libre. Notons d'autre part que si C est un anneau noethérien réduit, il existe $g \in C$ tel que C_g soit un anneau intègre. Utilisons maintenant le lemme (6.9.2) : on peut définir par récurrence une suite $(f_i)_{i \geq 1}$ d'éléments de A de la façon suivante :

1° f_1 est tel que $A_1 = (A_{\text{red}})_{f_1}$ soit intègre et $M \otimes_A A_1$ un A_1 -module libre;

2° si l'idéal \mathfrak{J}_i engendré par f_1, \dots, f_i est A , $f_{i+1} = f_i$;

3° si au contraire $\mathfrak{J}_i \neq A$, f_{i+1} est un élément n'appartenant pas à \mathfrak{J}_i tel que $A_{i+1} = ((A/\mathfrak{J}_i)_{\text{red}})_{f_{i+1}}$ soit intègre et $M \otimes_A A_{i+1}$ un A_{i+1} -module libre.

Comme A est noethérien, la suite croissante (\mathfrak{J}_i) est stationnaire, donc il existe n tel que f_1, \dots, f_n engendrent l'idéal A , et les f_i répondent à la question puisque

$$((A/\mathfrak{J}_i)_{\text{red}})_{f_{i+1}} = ((A/\mathfrak{J}_i)_{f_{i+1}})_{\text{red}}.$$

Proposition (II.3.16). — Soient $f : X \rightarrow Y$ un morphisme fidèlement plat de présentation finie, $g : Y \rightarrow Z$ un morphisme tel que $g \circ f : X \rightarrow Z$ soit un morphisme de type fini (resp. de présentation finie). Alors g est un morphisme de type fini (resp. de présentation finie).

Comme f est surjectif et $g \circ f$ quasi-compact, g est quasi-compact (I.1.3). Montrons d'abord que si $g \circ f$ est de présentation finie, g est quasi-séparé. En effet, considérons un ouvert affine $W \subset Z$, et soit (V_i) un recouvrement affine fini de $g^{-1}(W)$; il s'agit de voir que les $V_i \cap V_j$ sont quasi-compacts (I.2.6 et I.2.7). Pour chaque i , soit (U_{ih}) un recouvrement ouvert affine fini de $f^{-1}(V_i)$; comme f est de présentation finie, les $U_{ih} \cap U_{jk}$ sont tous quasi-compacts; or, puisque f est surjectif, $V_i \cap V_j$ est réunion des images $f(U_{ih} \cap U_{jk})$ pour h, k variables, donc est quasi-compact puisque f est continue.

La question est donc locale sur Y et on peut supposer que $Y = \text{Spec}(B)$ et $Z = \text{Spec}(A)$ sont affines, X étant réunion finie d'ouverts affines $X_i = \text{Spec}(C_i)$, où les C_i sont des B -algèbres de type fini (resp. de présentation finie). Si X' est le préschéma somme des X_i , $p : X' \rightarrow X$ le morphisme qui coïncide avec l'injection canonique dans chaque X_i , p est un morphisme fidèlement plat de présentation finie (I.6.5), donc $g \circ f \circ p$ est un morphisme de type fini (resp. de présentation finie) et $f \circ p$ un morphisme fidèlement plat de présentation finie. On peut par suite supposer aussi que $X = \text{Spec}(C)$ est affine, et on est donc ramené à prouver le

Corollaire (II.3.17). — Soient A un anneau, B une A -algèbre, C une B -algèbre de présentation finie et qui soit un B -module fidèlement plat. Alors, si C est une A -algèbre de type fini (resp. de présentation finie), B est une A -algèbre de type fini (resp. de présentation finie).

Supposons d'abord que $g \circ f$ soit de type fini. Soit (B_λ) la famille filtrante croissante des sous- A -algèbres de type fini de B ; en vertu de (8.8.2), il existe un indice α tel que $C = C_\alpha \otimes_{B_\alpha} B$, où C_α est une B_α -algèbre de présentation finie; en outre (8.10.5 et II.2.6) on peut supposer que C_α est un B_α -module fidèlement plat. Pour $\lambda \geq \alpha$, on a donc $C = C_\lambda \otimes_{B_\lambda} B$, où C_λ est un B_λ -module fidèlement plat; comme l'application $B_\lambda \rightarrow B$ est injective, on en déduit qu'il en est de même de $C_\lambda \rightarrow C$. En outre, comme $C = \varinjlim C_\lambda$, tout élément de C appartient à un C_λ , et par suite il existe λ tel que l'application $C_\lambda \rightarrow C$

soit bijective, puisque C est une B -algèbre de type fini. Mais alors l'application $B_\lambda \rightarrow B$ est bijective par fidèle platitude, donc $B = B_\lambda$ est une A -algèbre de type fini.

Supposons maintenant que $g \circ f$ soit de présentation finie, C étant donc une A -algèbre de présentation finie. D'après la première partie du raisonnement, on a $B = A[T_1, \dots, T_n]/\mathfrak{J}$ pour un idéal \mathfrak{J} ; soit (\mathfrak{J}_λ) la famille filtrante des idéaux de type fini de $A[T_1, \dots, T_n]$ contenus dans \mathfrak{J} , de sorte que $\mathfrak{J} = \varinjlim \mathfrak{J}_\lambda$ et $B = \varinjlim B_\lambda$, avec $B_\lambda = A[T_1, \dots, T_n]/\mathfrak{J}_\lambda$. Appliquant comme ci-dessus (8.8.2), (8.10.5) et (11.2.6), on a $C = C_\alpha \otimes_{B_\alpha} B$, où C_α est une B_α -algèbre de présentation finie et un B_α -module fidèlement plat; on posera encore $C_\lambda = C_\alpha \otimes_{B_\alpha} B_\lambda$ pour $\lambda \geq \alpha$ de sorte que $C_\lambda = C_\alpha / (C_\alpha \otimes_{B_\alpha} (\mathfrak{J}_\lambda/\mathfrak{J}_\alpha))$ par platitude, et de même $C = C_\alpha / (C_\alpha \otimes_{B_\alpha} (\mathfrak{J}/\mathfrak{J}_\alpha))$. Comme par hypothèse C est une A -algèbre de présentation finie ainsi que C_α , $C_\alpha \otimes_{B_\alpha} (\mathfrak{J}/\mathfrak{J}_\alpha)$ est un idéal de type fini de C_α (1.4.4), et les $C_\alpha \otimes_{B_\alpha} (\mathfrak{J}_\lambda/\mathfrak{J}_\alpha)$ s'identifient à des idéaux de type fini de C_α dont $C_\alpha \otimes_{B_\alpha} (\mathfrak{J}/\mathfrak{J}_\alpha)$ est la réunion. Il existe par suite un $\lambda \geq \alpha$ tel que $C_\alpha \otimes_{B_\alpha} (\mathfrak{J}/\mathfrak{J}_\alpha) = C_\alpha \otimes_{B_\alpha} (\mathfrak{J}_\lambda/\mathfrak{J}_\alpha)$, d'où $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_\lambda$ par fidèle platitude, ce qui prouve que B est une A -algèbre de présentation finie.

11.4. Descente de la platitude par des morphismes quelconques : cas d'un préschéma de base artinien.

Théorème (11.4.1). — Soient A un anneau, \mathfrak{J} un idéal nilpotent de A , $u_\lambda : A \rightarrow B_\lambda$ ($\lambda \in L$) une famille d'homomorphismes d'anneaux telle que l'intersection des noyaux des u_λ soit réduite à 0. Soit M un A -module tel que pour tout $\lambda \in L$, $M \otimes_A B_\lambda$ soit un B_λ -module libre et que $M \otimes_A (A/\mathfrak{J})$ soit un (A/\mathfrak{J}) -module libre. Alors M est un A -module libre. Si de plus l'ensemble d'indices L est fini, on peut remplacer partout « libre » par « plat » dans l'énoncé précédent.

Dans les deux cas il suffira de prouver que M est un A -module plat : en effet, lorsque $M \otimes_A (A/\mathfrak{J})$ est un (A/\mathfrak{J}) -module libre, il en résultera que M est un A -module libre en vertu de ($\mathbf{0}_{III}$, 10.1.2).

Nous utiliserons le lemme suivant, qui généralise ($\mathbf{0}_{III}$, 10.2.1) :

Lemme (11.4.1.1). — Soit A un anneau muni d'une filtration finie $(\mathfrak{J}_n)_{0 \leq n \leq N+1}$ avec $\mathfrak{J}_0 = A$, $\mathfrak{J}_{N+1} = 0$. Soit M un A -module muni de la filtration $(\mathfrak{J}_n M)_{0 \leq n \leq N+1}$, et désignons par $\text{gr}(A)$ et $\text{gr}(M)$ l'anneau et le module gradués correspondants. Supposons que $M \otimes_A (A/\mathfrak{J}_1)$ soit un (A/\mathfrak{J}_1) -module plat et que l'homomorphisme canonique

$$(11.4.1.2) \quad \text{gr}_0(M) \otimes_{\text{gr}_0(A)} \text{gr}(A) \rightarrow \text{gr}(M)$$

soit injectif. Alors M est un A -module plat.

L'homomorphisme canonique (11.4.1.2) se définit de la même façon que celui de ($\mathbf{0}_{III}$, 10.1.1) comme étant en degré n l'homomorphisme

$$(M/\mathfrak{J}_1 M) \otimes (\mathfrak{J}_n/\mathfrak{J}_{n+1}) = (M \otimes \mathfrak{J}_n) / (\text{Im}(M \otimes \mathfrak{J}_{n+1}) + \text{Im}(\mathfrak{J}_1 M \otimes \mathfrak{J}_n)) \rightarrow \mathfrak{J}_n M / \mathfrak{J}_{n+1} M$$

provenant de l'homomorphisme canonique $M \otimes \mathfrak{J}_n \rightarrow \mathfrak{J}_n M$ par passage aux quotients. Le lemme se démontre par récurrence sur N , puisqu'il n'y a rien à démontrer pour $N = 0$.

Les conditions sur M entraînent, en vertu de l'hypothèse de récurrence, que $M \otimes_A (A/\mathfrak{I}_N)$ est un (A/\mathfrak{I}_N) -module plat. Notons maintenant que l'on a $\mathfrak{I}_N^2 \subset \mathfrak{I}_{N+1} = 0$ si $N \geq 1$, et $(M/\mathfrak{I}_1 M) \otimes (\mathfrak{I}_N/\mathfrak{I}_{N+1}) = (M/\mathfrak{I}_N M) \otimes (\mathfrak{I}_N/\mathfrak{I}_{N+1}) = (M/\mathfrak{I}_N M) \otimes \mathfrak{I}_N$; donc l'homomorphisme canonique

$$(M/\mathfrak{I}_N M) \otimes \mathfrak{I}_N \rightarrow \mathfrak{I}_N M = \mathfrak{I}_N M / \mathfrak{I}_N^2 M$$

est injectif. Appliquant (0_{III}, 10.2.1) à la filtration \mathfrak{I}_N -préadique, on en conclut bien que M est un A -module plat.

Pour appliquer ce lemme à (11.4.1), nous désignerons par \mathfrak{I}_n l'idéal de A intersection des images réciproques $u_\lambda^{-1}(\mathfrak{I}^n B_\lambda)$: il est immédiat que l'on a $\mathfrak{I}_0 = A$, $\mathfrak{I}_m \mathfrak{I}_n \subset \mathfrak{I}_{m+n}$ pour $m \geq 0, n \geq 0$; en outre, si $\mathfrak{I}^{N+1} = 0$, on a aussi $\mathfrak{I}_{N+1} = 0$ puisque l'intersection des noyaux des u_λ est réduite à 0.

Munissons A de la filtration (\mathfrak{I}_n) , M de la filtration $(\mathfrak{I}_n M)$, et, pour chaque λ , munissons B_λ et $N_\lambda = M \otimes_A B_\lambda$ des filtrations \mathfrak{I} -préadiques; considérons pour chaque λ le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \text{gr}^0(M) \otimes_{\text{gr}^0(A)} \text{gr}(A) & \xrightarrow{\varphi} & \text{gr}(M) \\ \downarrow f_\lambda & & \downarrow g_\lambda \\ \text{gr}_{\mathfrak{I}}^0(N_\lambda) \otimes_{\text{gr}_{\mathfrak{I}}^0(B_\lambda)} \text{gr}_{\mathfrak{I}}(B_\lambda) & \xrightarrow{\varphi_\lambda} & \text{gr}_{\mathfrak{I}}(N_\lambda) \end{array}$$

où les flèches horizontales sont les homomorphismes canoniques (11.4.1.2) et les flèches verticales sont déduites des homomorphismes canoniques $A \rightarrow B_\lambda$ et $M \rightarrow N_\lambda$. L'hypothèse que N_λ est un B_λ -module plat entraîne que φ_λ est injective (0_{III}, 10.2.1), donc $\text{Ker}(\varphi) \subset \text{Ker}(f_\lambda)$. Posant $A_0 = A/\mathfrak{I}_1$, $M_0 = M \otimes_A A_0$, notons que

$$\text{gr}_{\mathfrak{I}}^0(N_\lambda) = N_\lambda / \mathfrak{I} N_\lambda = (M/\mathfrak{I} M) \otimes_A B_\lambda = (M/\mathfrak{I}_1 M) \otimes_A (B_\lambda / \mathfrak{I} B_\lambda)$$

car ce dernier produit tensoriel est égal à

$$(M \otimes_A B_\lambda) / (\text{Im}(M \otimes_A \mathfrak{I} B_\lambda) + \text{Im}(\mathfrak{I}_1 M \otimes_A B_\lambda))$$

et l'on a $\text{Im}(\mathfrak{I}_1 M \otimes_A B) = \text{Im}(M \otimes_A \mathfrak{I}_1 B_\lambda) \subset \text{Im}(M \otimes_A \mathfrak{I} B_\lambda)$ puisque $\mathfrak{I}_1 B_\lambda \subset \mathfrak{I} B_\lambda$ par définition; enfin, la relation $\mathfrak{I}_1 B_\lambda \subset \mathfrak{I} B_\lambda$ montre que l'on a aussi

$$(M/\mathfrak{I}_1 M) \otimes_A (B_\lambda / \mathfrak{I} B_\lambda) = (M/\mathfrak{I}_1 M) \otimes_{A/\mathfrak{I}_1} (B_\lambda / \mathfrak{I} B_\lambda)$$

si bien que finalement on a

$$\text{gr}_{\mathfrak{I}}^0(N_\lambda) = M_0 \otimes_{A_0} (B_\lambda / \mathfrak{I} B_\lambda)$$

et par suite

$$\text{gr}_{\mathfrak{I}}^0(N_\lambda) \otimes_{\text{gr}_{\mathfrak{I}}^0(B_\lambda)} \text{gr}_{\mathfrak{I}}(B_\lambda) = M_0 \otimes_{A_0} \text{gr}_{\mathfrak{I}}(B_\lambda).$$

L'homomorphisme f_λ peut donc s'écrire

$$1 \otimes \text{gr}(u_\lambda) : M_0 \otimes_{A_0} \text{gr}(A) \rightarrow M_0 \otimes_{A_0} \text{gr}_{\mathfrak{I}}(B_\lambda)$$

et comme M_0 est par hypothèse un A_0 -module *plat*, le noyau de f_λ est égal à $M_0 \otimes_{A_0} R_\lambda$, où R_λ est le noyau de $\text{gr}(u_\lambda) : \text{gr}(A) \rightarrow \text{gr}_{\mathfrak{J}}(B_\lambda)$. Tout revient donc à prouver que $\bigcap_{\lambda \in L} (M_0 \otimes_{A_0} R_\lambda) = 0$. Or, par définition des \mathfrak{J}_n , l'intersection des noyaux des homomorphismes $\mathfrak{J}_n A / \mathfrak{J}_{n+1} A \rightarrow \mathfrak{J}_n B_\lambda / \mathfrak{J}_{n+1} B_\lambda$, lorsque λ parcourt L , est réduite à 0, autrement dit $\bigcap_{\lambda \in L} R_\lambda = 0$. Cela étant, supposons d'abord que M_0 soit un A_0 -module libre; prenant une base de M_0 , on voit aussitôt que l'on a $M_0 \otimes_{A_0} (\bigcap_{\lambda \in L} R_\lambda) = \bigcap_{\lambda \in L} (M_0 \otimes_{A_0} R_\lambda)$, d'où la proposition dans ce cas. Lorsque L est fini, la formule précédente est encore vraie sous la seule hypothèse que M_0 est un A_0 -module plat (0_{I} , 6.1.3), ce qui termine la démonstration.

Remarque (11.4.2). — La conclusion de (11.4.1) peut être inexacte si L est infini et si l'on suppose seulement que $M \otimes_A (A/\mathfrak{J})$ est un (A/\mathfrak{J}) -module plat. Par exemple, soient V un anneau de valuation discrète, K son corps des fractions, et soit $A = V[T]/(T^2)$ (T indéterminée); prenons pour \mathfrak{J} l'image de (T) dans A , de sorte que $A/\mathfrak{J} = V$, et prenons $M = K$, qui est un (A/\mathfrak{J}) -module, donc égal à $M \otimes_A (A/\mathfrak{J})$; en outre M est un (A/\mathfrak{J}) -module plat, mais non un A -module plat, car puisque \mathfrak{J} est nilpotent, il résulterait de (0_{III} , 10.1.2) que M serait un A -module libre, ce qui est absurde puisque $\mathfrak{J}K = 0$. Considérons d'autre part l'idéal maximal \mathfrak{m} de l'anneau local noethérien A ; on a $\mathfrak{m}K = K$, donc $M \otimes_A (A/\mathfrak{m}^n) = 0$ quel que soit l'entier n ; les (A/\mathfrak{m}^n) -modules $M \otimes_A (A/\mathfrak{m}^n)$ sont donc plats pour tout n , et l'intersection des \mathfrak{m}^n est réduite à 0.

Corollaire (11.4.3). — Soient A un anneau semi-local dont le radical \mathfrak{J} est nilpotent (par exemple un anneau artinien), $u_\lambda : A \rightarrow B_\lambda$ ($\lambda \in L$) une famille d'homomorphismes d'anneaux telle que l'intersection des noyaux des u_λ soit réduite à 0. Pour qu'un A -module M soit plat, il faut et il suffit que pour tout $\lambda \in L$, $M \otimes_A B_\lambda$ soit un B_λ -module plat.

Comme A/\mathfrak{J} est composé direct d'un nombre fini de corps (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 3, n° 5, prop. 16) et que \mathfrak{J} est nilpotent, A est composé direct d'un nombre fini d'anneaux locaux A_i dont le radical est nilpotent (*loc. cit.*, § 4, n° 3, cor. 1 de la prop. 15) et M est par suite somme directe de A_i -modules M_i , chaque M_i étant annihilé par les A_j d'indice $j \neq i$; pour que M soit un A -module plat, il faut et il suffit que chacun des M_i soit un A_i -module plat; d'ailleurs l'intersection des noyaux des homomorphismes $A_i \rightarrow A \xrightarrow{u_\lambda} B_\lambda$ est réduite à 0, et $M_i \otimes_{A_i} B_\lambda$ est facteur direct de $M \otimes_A B_\lambda$. On peut donc se borner au cas où A est en outre local. Alors A/\mathfrak{J} est un corps, donc $M \otimes_A (A/\mathfrak{J})$ est un (A/\mathfrak{J}) -module libre, et il suffit de voir que pour tout λ , $M \otimes_A B_\lambda$ est un B_λ -module libre, en vertu de (11.4.1). Mais si l'on pose $\mathfrak{J}_\lambda = \mathfrak{J}B_\lambda$, $(M \otimes_A B_\lambda) \otimes_{B_\lambda} (B_\lambda/\mathfrak{J}_\lambda) = (M \otimes_A (A/\mathfrak{J})) \otimes_{A/\mathfrak{J}} (B_\lambda/\mathfrak{J}_\lambda)$ est un $(B_\lambda/\mathfrak{J}_\lambda)$ -module libre, et \mathfrak{J}_λ est nilpotent. La conclusion résulte donc de l'hypothèse que $M \otimes_A B_\lambda$ est un B_λ -module plat et de (0_{III} , 10.1.2).

Corollaire (11.4.4). — Soient A un anneau, M un A -module; on suppose qu'il existe un idéal nilpotent \mathfrak{J} de A tel que $M \otimes_A (A/\mathfrak{J})$ soit un (A/\mathfrak{J}) -module libre. Alors l'ensemble des idéaux \mathfrak{R} de A tels que $M \otimes_A (A/\mathfrak{R})$ soit un (A/\mathfrak{R}) -module libre admet un plus petit élément \mathfrak{R}_0 (qui est aussi le plus petit des idéaux \mathfrak{R} tels que $M \otimes_A (A/\mathfrak{R})$ soit un (A/\mathfrak{R}) -module plat).

Pour qu'un homomorphisme $u : A \rightarrow A'$ soit tel que $M \otimes_A A'$ soit un A' -module libre (resp. un A' -module plat), il faut et il suffit que u se factorise en $A \rightarrow A/\mathfrak{R}_0 \rightarrow A'$ (ou encore que $\mathfrak{R}_0 A' = 0$).

Le fait que l'intersection \mathfrak{R}_0 des idéaux \mathfrak{R} pour lesquels $M \otimes_A (A/\mathfrak{R})$ est un (A/\mathfrak{R}) -module libre soit le plus petit de ces idéaux résulte de (II.4.1) appliqué à l'anneau A/\mathfrak{R}_0 , à son idéal nilpotent $\mathfrak{J}/\mathfrak{R}_0$ et aux homomorphismes $A/\mathfrak{R}_0 \rightarrow A/\mathfrak{R}$, dont les noyaux ont 0 pour intersection. Si A' est une (A/\mathfrak{R}_0) -algèbre, on a $M \otimes_A A' = (M \otimes_A (A/\mathfrak{R}_0)) \otimes_{A/\mathfrak{R}_0} A'$, donc $M \otimes_A A'$ est un A' -module libre. Réciproquement, si A' est une A -algèbre telle que $M \otimes_A A'$ soit un A' -module libre et si \mathfrak{R} est le noyau de l'homomorphisme $A \rightarrow A'$, il résulte de (II.4.1) appliqué à l'anneau A/\mathfrak{R} , au (A/\mathfrak{R}) -module $M \otimes_A (A/\mathfrak{R})$, à l'idéal nilpotent $\mathfrak{J}\mathfrak{R}/\mathfrak{R}$ et à l'homomorphisme injectif $A/\mathfrak{R} \rightarrow A'$, que $M \otimes_A (A/\mathfrak{R})$ est un (A/\mathfrak{R}) -module libre, donc que $\mathfrak{R} \supset \mathfrak{R}_0$. Le fait que l'on puisse remplacer « libre » par « plat » dans ce qui précède (en conservant naturellement l'hypothèse que $M \otimes_A (A/\mathfrak{J})$ est un (A/\mathfrak{J}) -module libre) résulte de (0III, 10.1.2), comme on l'a vu au début de la démonstration de (II.4.1).

Proposition (II.4.5). — Soient Y un préschéma irréductible, $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de présentation finie, \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -Module de présentation finie. Il existe alors un ouvert non vide U dans Y et un sous-schéma fermé Z de U , de présentation finie sur U , ayant la propriété suivante : pour tout changement de base $U' \rightarrow U$, si l'on pose $X' = X \times_Y U'$, $f' = f_{(U')}$ et $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{U'}$, alors, pour que \mathcal{F}' soit f' -plat, il faut et il suffit que le morphisme $U' \rightarrow U$ se factorise en $U' \rightarrow Z \rightarrow U$. Un tel schéma Z a même espace sous-jacent que U . Supposons de plus Y affine, et soit (W_i) un recouvrement fini de X par des ouverts affines ; alors, on peut supposer U choisi de sorte que, si $U' = \text{Spec}(A')$ est un schéma affine et $U' \rightarrow U$ un morphisme qui se factorise en $U' \rightarrow Z \rightarrow U$, chacun des $\Gamma(W_i \times_Y U', \mathcal{F}')$ est un A' -module libre.

On peut évidemment se borner au cas où $Y = \text{Spec}(A)$ est affine. Utilisant (8.9.1), il y a un sous-anneau noethérien A_1 de A , un morphisme de type fini $f_1 : X_1 \rightarrow Y_1 = \text{Spec}(A_1)$ et un \mathcal{O}_{X_1} -Module cohérent \mathcal{F}_1 tels que $f = f_{(Y)}$ et $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \otimes_{\mathcal{O}_{Y_1}} \mathcal{O}_Y$; on peut en outre supposer que les W_i sont images réciproques d'ouverts affines de X_1 . Notons en outre que Y_1 est irréductible, le morphisme $Y \rightarrow Y_1$ étant dominant (I, 1.2.7). Supposons la proposition démontrée pour Y_1 , X_1 et \mathcal{F}_1 , et soient U_1 l'ouvert de Y_1 et Z_1 le sous-schéma fermé de U_1 ayant les propriétés voulues, $U = U_1 \times_{Y_1} Y$ et $Z = Z_1 \times_{Y_1} Y$ leurs images réciproques. Alors, si $U' \rightarrow U$ est un changement de base tel que $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{U'} = \mathcal{F}_1 \otimes_{\mathcal{O}_{Y_1}} \mathcal{O}_{U'}$ soit f' -plat, le morphisme $U' \rightarrow U_1$ se factorise en $U' \rightarrow Z_1 \rightarrow U_1$; mais comme $U' \rightarrow U_1$ se factorise aussi en $U' \rightarrow U \rightarrow U_1$, la définition du produit de préschémas montre que $U' \rightarrow U$ se factorise en $U' \rightarrow Z \rightarrow U$.

On peut donc se borner au cas où A est noethérien ; soit \mathfrak{N} son nilradical, qui est nilpotent, et posons $A_0 = A_{\text{red}} = A/\mathfrak{N}$, $Y_0 = \text{Spec}(A_0) = Y_{\text{red}}$, $X_0 = X \times_Y Y_0$, $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y_0}$, $W_{i0} = W_i \times_Y Y_0$; si $M_i = \Gamma(W_i, \mathcal{F})$, $M_{i0} = \Gamma(W_{i0}, \mathcal{F}_0)$ est donc égal à $M_i \otimes_A A_0$. Comme A_0 est intègre, on peut, en vertu du théorème de platitude générique (6.9.2), en remplaçant au besoin Y par un ouvert non vide de Y , supposer que les M_{i0} soient des A_0 -modules libres. En vertu de (II.4.4), il y a donc pour chaque i un idéal $\mathfrak{J}_i \subset \mathfrak{N}$ tel

que les A -algèbres A' pour lesquelles les $M_i \otimes_A A'$ sont des A' -modules libres (ou plats) sont exactement celles pour lesquelles $\mathfrak{J}_i A' = 0$. Soit $\mathfrak{J} = \sum_i \mathfrak{J}_i$, qui est un idéal contenu dans \mathfrak{N} ; dire que $\mathcal{F} \otimes_A A'$ est A' -plat équivaut à dire que les $M_i \otimes_A A'$ sont tous des A' -modules plats, donc que $\mathfrak{J}A' = 0$. Il en résulte que si l'on prend $Z = V(\mathfrak{J})$, on répond à la question, car pour qu'un morphisme $U' \rightarrow U$ ait la propriété de l'énoncé, il faut et il suffit évidemment que pour tout ouvert affine $V' \subset U'$, le morphisme $V' \rightarrow U$ ait la même propriété.

Corollaire (II.4.6). — Soient A un anneau tel que $\text{Spec}(A)$ soit irréductible, \mathfrak{p} son unique idéal premier minimal, B une A -algèbre de présentation finie, M un B -module de présentation finie. Supposons que $M_{\mathfrak{p}}$ soit un $A_{\mathfrak{p}}$ -module plat; alors il existe $t \in A - \mathfrak{p}$ tel que M_t soit un A_t -module libre.

Appliquant (II.4.5) à $Y = \text{Spec}(A)$, $X = \text{Spec}(B)$, $\mathcal{F} = \widetilde{M}$, on peut (en remplaçant au besoin A par A_h , où $h \in A - \mathfrak{p}$) supposer qu'il existe un idéal de type fini \mathfrak{J} dans A tel que les A -algèbres A' pour lesquelles $M \otimes_A A'$ soit un A' -module libre (ou plat) sont exactement celles telles que $\mathfrak{J}A' = 0$. En particulier, l'hypothèse que $M_{\mathfrak{p}}$ soit un $A_{\mathfrak{p}}$ -module plat entraîne $\mathfrak{J}A_{\mathfrak{p}} = 0$, ou encore $\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}} = 0$. Mais comme \mathfrak{J} est de type fini, il existe $t \in A - \mathfrak{p}$ tel que $\mathfrak{J}_i = 0$, ou encore $\mathfrak{J}A_i = 0$, et par suite M_t est un A_t -module libre.

Proposition (II.4.7). — Soient A un anneau noethérien, \mathfrak{J} un idéal de A , M un A -module idéalement séparé ($\mathbf{0}_{\text{III}}$, 10.2.1) pour la topologie \mathfrak{J} -préadique. Soit $(\mathfrak{p}_i)_{1 \leq i \leq r}$ une famille finie d'idéaux premiers de A contenant \mathfrak{J} ; pour tout entier $n \geq 0$, soit $\mathfrak{p}_i^{(n)}$ la puissance symbolique n -ième de \mathfrak{p}_i (noyau de l'homomorphisme $A \rightarrow A_{\mathfrak{p}_i}/\mathfrak{p}_i^n A_{\mathfrak{p}_i}$); posons $\mathfrak{J}_n = \bigcap_{i=1}^r \mathfrak{p}_i^{(n)}$, de sorte que $\mathfrak{J}_n \supset \mathfrak{J}^n$, et supposons que la topologie définie par la filtration (\mathfrak{J}_n) soit identique à la topologie \mathfrak{J} -préadique (autrement dit que, pour tout n , il existe m tel que $\mathfrak{J}^n \supset \mathfrak{J}_m$). Pour que M soit un A -module plat, il faut et il suffit que $M \otimes_A (A/\mathfrak{J})$ soit un (A/\mathfrak{J}) -module plat et que, pour tout i , $M \otimes_A A_{\mathfrak{p}_i} = M_{\mathfrak{p}_i}$ soit un $A_{\mathfrak{p}_i}$ -module plat.

Comme M est idéalement séparé, il suffit, en vertu de ($\mathbf{0}_{\text{III}}$, 10.2.1), de montrer que, pour tout $n \geq 0$, $M \otimes_A (A/\mathfrak{J}^n)$ est un (A/\mathfrak{J}^n) -module plat; puisque tout \mathfrak{J}^n contient un \mathfrak{J}_m , il revient au même de prouver que pour tout n , $M \otimes_A (A/\mathfrak{J}_n)$ est un (A/\mathfrak{J}_n) -module plat. Or, comme $\mathfrak{J}_1 \supset \mathfrak{J}$, $M \otimes_A (A/\mathfrak{J}_1)$ est un (A/\mathfrak{J}_1) -module plat; dans l'anneau A/\mathfrak{J}_n , l'idéal $\mathfrak{J}_1/\mathfrak{J}_n$ est nilpotent et enfin l'intersection des noyaux des homomorphismes $A/\mathfrak{J}_n \rightarrow A_{\mathfrak{p}_i}/\mathfrak{p}_i^n A_{\mathfrak{p}_i}$ est nulle dans A/\mathfrak{J}_n , par définition de \mathfrak{J}_n . Il suffit donc, par (II.4.1), de vérifier que $M \otimes_A (A_{\mathfrak{p}_i}/\mathfrak{p}_i^n A_{\mathfrak{p}_i})$ est un $(A_{\mathfrak{p}_i}/\mathfrak{p}_i^n A_{\mathfrak{p}_i})$ -module plat, ce qui résulte de l'hypothèse que $M \otimes_A A_{\mathfrak{p}_i}$ est un $A_{\mathfrak{p}_i}$ -module plat.

Remarque (II.4.8). — L'hypothèse faite dans (II.4.7) sur la topologie définie par les \mathfrak{J}_n est vérifiée si, pour tout n assez grand, $\text{Ass}(A/\mathfrak{J}^n)$ est contenu dans l'ensemble des \mathfrak{p}_i . En effet, \mathfrak{J}^n est alors intersection d'idéaux premiers pour les \mathfrak{p}_i , dont chacun contient une puissance symbolique de \mathfrak{p}_i , d'où la conclusion. En particulier :

Corollaire (II.4.9). — Soient A un anneau noethérien, \mathfrak{J} un idéal nilpotent de A , M un A -module. Pour que M soit un A -module plat (resp. libre), il faut et il suffit que $M \otimes_A (A/\mathfrak{J})$ soit un (A/\mathfrak{J}) -module plat (resp. libre) et que pour tout idéal premier $\mathfrak{p} \in \text{Ass}(A)$, $M_{\mathfrak{p}}$ soit un $A_{\mathfrak{p}}$ -module plat.

L'assertion relative au cas où $M \otimes_A (A/\mathfrak{J})$ est libre se déduit encore de l'assertion relative au cas où $M \otimes_A (A/\mathfrak{J})$ est plat par (0_{III}, 10.1.2).

Corollaire (II.4.10). — Soient A un anneau noethérien, \mathfrak{J} un idéal de A , M un A -module. On suppose que M est idéalement séparé pour la topologie \mathfrak{J} -préadique et que $\text{gr}_{\mathfrak{J}}(A)$ est un (A/\mathfrak{J}) -module plat. Pour que M soit un A -module plat, il faut et il suffit que $M \otimes_A (A/\mathfrak{J})$ soit un (A/\mathfrak{J}) -module plat et que pour tout $\mathfrak{p} \in \text{Ass}(A/\mathfrak{J})$, $M_{\mathfrak{p}}$ soit un $A_{\mathfrak{p}}$ -module plat.

Compte tenu de (II.4.8), tout revient à montrer que $\text{Ass}(A/\mathfrak{J}^n)$ est contenu dans $\text{Ass}(A/\mathfrak{J})$ pour tout n . Or, si $a \in A$ n'appartient à aucun des $\mathfrak{p} \in \text{Ass}(A/\mathfrak{J})$, l'homothétie de rapport a est injective dans A/\mathfrak{J} ; comme chacun des $\mathfrak{J}^k/\mathfrak{J}^{k+1}$ est un (A/\mathfrak{J}) -module plat, a est aussi un élément $(\mathfrak{J}^k/\mathfrak{J}^{k+1})$ -régulier, donc a est (A/\mathfrak{J}^n) -régulier pour tout n (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 2, n° 8, cor. 1 du th. 1), et par suite n'appartient à aucun idéal premier associé à A/\mathfrak{J}^n , d'où le corollaire (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 1, n° 1, prop. 2).

Proposition (II.4.11). — Soient A un anneau local artinien, d'idéal maximal \mathfrak{m} , $Y = \text{Spec}(A)$, y l'unique point de Y , $f: X \rightarrow Y$ un morphisme localement de type fini, \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -Module cohérent. Soient (A'_α) une famille d'anneaux locaux, et pour chaque α , $u_\alpha: A \rightarrow A'_\alpha$ un homomorphisme d'anneaux (nécessairement local). Posons $Y'_\alpha = \text{Spec}(A'_\alpha)$, $X'_\alpha = X \times_Y Y'_\alpha$, $\mathcal{F}'_\alpha = \mathcal{F} \otimes_A A'_\alpha$. Soit x un point de X , et supposons vérifiées les conditions suivantes :

- (i) L'intersection des noyaux des u_α est réduite à 0.
- (ii) L'extension $k(x)$ du corps résiduel k de A est primaire (4.3.1) (condition automatiquement vérifiée si k est séparablement clos).

(iii) Pour tout α , il existe un point $x'_\alpha \in X'_\alpha$ dont les projections respectives dans X et Y'_α sont x et le point fermé y'_α de Y'_α , et tel que \mathcal{F}'_α soit Y'_α -plat au point x'_α .

Dans ces conditions, \mathcal{F} est f -plat au point x .

La question étant locale sur X , on peut évidemment se borner au cas où f est un morphisme de type fini et supposer $\mathcal{F}_x \neq 0$. Nous procéderons en plusieurs étapes.

I) Réduction au cas où A'_α est un anneau local d'un Y -préschéma de type fini et où le corps résiduel k'_α de A'_α est une extension finie de k .

Comme la réduction se fait séparément sur chaque A'_α , on peut supprimer dans cette partie l'indice α . Soit \mathfrak{m}' l'idéal maximal de A' . Considérons A' comme limite inductive de ses sous- A -algèbres de type fini B_λ , et posons $\mathfrak{n}_\lambda = \mathfrak{m}' \cap B_\lambda$; A' est aussi limite inductive de ses sous-anneaux locaux $B'_\lambda = (B_\lambda)_{\mathfrak{n}_\lambda}$ (5.13.3), et on a évidemment $\mathfrak{m}' \cap B'_\lambda = \mathfrak{n}'_\lambda$, idéal maximal de B'_λ . Il existe donc (II.2.6) un indice λ tel que, en posant $Z'_\lambda = \text{Spec}(B'_\lambda)$, $\mathcal{F} \otimes_A B'_\lambda$ soit Z'_λ -plat au point x'_λ , projection de x' , la projection de x'_λ sur Z'_λ étant le point fermé z'_λ de Z'_λ .

On peut donc supposer qu'il existe un schéma affine Z' de type fini sur Y et un point z' de Z' tel que $A' = \mathcal{O}_{Z', z'}$, et que, si l'on pose $T' = X \times_Y Z'$, il existe un point $t' \in T'$ dont les projections dans Z' et X sont z' et x , et tel que $\mathcal{F} \otimes_Y Z'$ soit Z' -plat au point t' . Soient Z'_1 (resp. X_1) un sous-préschéma fermé de Z' (resp. X) ayant pour espace sous-jacent l'adhérence de $\{z'\}$ (resp. $\{x\}$), et posons $T'_1 = X_1 \times_Y Z'_1$. L'ensemble U des points de T' où $\mathcal{F} \otimes_Y Z'$ est Z' -plat est ouvert dans T' (II.1.1) et contient t' , donc

$V = U \cap T'_1$ est ouvert non vide dans T'_1 . L'anneau A , étant artinien, est un anneau de Jacobson, donc (10.4.6) Z'_1 et T'_1 sont des préschémas de Jacobson; il existe par suite dans V un point t'_0 fermé dans V , et son image z'_0 dans Z'_1 est un point fermé de Z'_1 (10.4.7). Soient f_1 la restriction de f à X_1 , $f'_1 : T'_1 \rightarrow Z'_1$ la projection canonique; $V \cap f_1'^{-1}(z'_0)$ est un ouvert non vide dans $f_1'^{-1}(y) \otimes_{k(y)} k(z'_0)$, et comme ce dernier préschéma est plat sur $f_1'^{-1}(y)$, un point maximal t'_1 de $V \cap f_1'^{-1}(z'_0)$ est nécessairement au-dessus de l'unique point maximal x de X_1 (2.3.4). Enfin, $k(z'_0)$ est une extension finie de k (I, 6.4.2) et l'homomorphisme $A = \mathcal{O}_{X,y} \rightarrow A' = \mathcal{O}_{Z',z'}$ se factorise en $\mathcal{O}_{X,y} \rightarrow \mathcal{O}_{Z',z'} \rightarrow \mathcal{O}_{Z',z'}$, donc son noyau est contenu dans celui de $\mathcal{O}_{X,y} \rightarrow \mathcal{O}_{Z',z'}$. Ceci achève la réduction annoncée.

II) Réduction au cas où les A'_α sont en nombre fini et sont des A -algèbres finies. — Soit \mathfrak{m}'_α l'idéal maximal de A'_α ; comme A'_α est un anneau local noethérien, l'intersection des \mathfrak{m}'_α^n est 0 (01, 7.3.5); l'intersection des $u_\alpha^{-1}(\mathfrak{m}'_\alpha^n)$, pour tous les indices n et α , est donc égale à l'intersection des noyaux des u_α , donc est réduite à 0 par l'hypothèse (i). Puisque A est artinien, il y a un nombre fini de ces idéaux dont l'intersection est déjà 0; notons-les $u_i^{-1}(\mathfrak{m}'_i)$ ($1 \leq i \leq r$). Comme les A'_i sont noethériens, les $\mathfrak{m}'_i^h / \mathfrak{m}'_i^{h+1}$ sont des (A'_i / \mathfrak{m}'_i) -modules de longueur finie, et comme A'_i / \mathfrak{m}'_i est un k -espace vectoriel de rang fini, on voit que $A'_i = A'_i / \mathfrak{m}'_i$ est une A -algèbre finie et un anneau local artinien. La réduction annoncée résulte donc de (2.1.4).

III) Fin de la démonstration. — Supposons désormais que les A'_i ($1 \leq i \leq r$) soient en nombre fini et soient des A -algèbres finies. Pour tout i , le corps résiduel k_i de A'_i est une extension finie de k ; utilisant l'hypothèse (ii), on en conclut que l'image réciproque de x dans X'_i est réduite au seul point x'_i (4.3.2). Soient Y' le préschéma somme des Y'_i , $X' = X \times_Y Y'$, somme des X'_i , $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \otimes_Y Y'$. L'hypothèse entraîne que \mathcal{F}' est Y' -plat aux points de l'image réciproque de x par la projection $p : X' \rightarrow X$. Comme p est de type fini, il existe par suite un ouvert $U' \supset p^{-1}(x)$ tel que \mathcal{F}' soit Y' -plat aux points de U' (11.1.1). En outre, le morphisme $Y' \rightarrow Y$ est fini puisque les A'_i sont des A -algèbres finies; donc p est un morphisme fini (II, 6.1.5), par suite fermé (II, 6.1.10), et il existe donc un voisinage affine U de x dans X tel que $p^{-1}(U) \subset U'$. Soient B et A' les anneaux des schémas U et Y' (A' étant le composé direct des A'_i); remplaçant X par U , on a donc $\mathcal{F} = \tilde{M}$, où M est un B -module, et par hypothèse $M' = M \otimes_A A'$ est un A' -module plat (2.1.2); comme l'homomorphisme $A \rightarrow A'$ est injectif par construction, on peut appliquer (11.4.3), qui prouve que M est un A -module plat, C.Q.F.D.

Proposition (11.4.12). — Soient A un anneau local artinien de corps résiduel k , $Y = \text{Spec}(A)$, $f : X \rightarrow Y$ un morphisme localement de type fini, \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -Module cohérent. Soient (A'_α) une famille d'anneaux locaux, et pour chaque α , $u_\alpha : A \rightarrow A'_\alpha$ un homomorphisme d'anneaux. Posons $Y'_\alpha = \text{Spec}(A'_\alpha)$, $X'_\alpha = X \times_Y Y'_\alpha$, $f'_\alpha = f|_{X'_\alpha}$, $\mathcal{F}'_\alpha = \mathcal{F} \otimes_A A'_\alpha$. Soit x un point de X , et supposons vérifiées les conditions suivantes :

(i) L'intersection des noyaux des u_α est réduite à 0.

(ii) Pour tout α , \mathcal{F}'_α est f'_α -plat en tous les points $x'_\alpha \in X'_\alpha$ dont les projections respectives dans X et Y' sont x et le point fermé y'_α de Y'_α .

Alors \mathcal{F} est f -plat au point x .

Par hypothèse, l'intersection des noyaux des u_α est réduite à 0 ; comme A est artinien, il y a déjà un nombre fini de ces noyaux dont l'intersection est 0, donc on peut se borner au cas où la famille (A'_α) est finie. Soit k' une clôture algébrique de k ; on sait (0_{III} , 10.3.1) qu'il existe un homomorphisme local $A \rightarrow B$ faisant de B un A -module plat, tel que B soit un anneau local artinien, entier sur A et que $B \otimes_A k$ soit isomorphe à k' . Par platitude, les noyaux des homomorphismes $B \rightarrow B'_\alpha = B \otimes_A A'_\alpha$ se déduisent de ceux des u_α par tensorisation avec B , et comme ils sont en nombre fini, leur intersection est réduite à 0 (0_I , 6.1.3). Considérons les anneaux $B'_{\alpha\beta}$, localisés de B'_α en ses idéaux maximaux ; on sait (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 3, n° 3, cor. 2 du th. 1) que l'intersection des noyaux des homomorphismes $B'_\alpha \rightarrow B'_{\alpha\beta}$ (pour un α donné) est réduite à 0 ; on en conclut que l'intersection des noyaux des homomorphismes composés $v_{\alpha\beta} : B \rightarrow B'_\alpha \rightarrow B'_{\alpha\beta}$ (α et β variables) est réduite à 0. D'autre part, comme B est entier sur A , B'_α est entier sur A'_α , donc ses idéaux maximaux sont au-dessus de l'idéal maximal de A'_α . Si l'on pose $Z'_{\alpha\beta} = \text{Spec}(B'_{\alpha\beta})$, $T'_{\alpha\beta} = X'_\alpha \times_{Y'_\alpha} Z'_{\alpha\beta}$, $f'_{\alpha\beta} = f_{(Z'_{\alpha\beta})}$, $\mathcal{G} = \mathcal{F} \otimes_A B$ et $\mathcal{G}'_{\alpha\beta} = \mathcal{G} \otimes_B B'_{\alpha\beta}$, on voit donc que les hypothèses (i) et (ii) sont encore vérifiées lorsqu'on remplace respectivement A , A'_α , u_α , \mathcal{F} et x par B , B'_α , $v_{\alpha\beta}$, \mathcal{G} et un point t de $T = X \otimes_A B$ au-dessus de x . Comme le corps résiduel de B est séparablement clos, on déduit de (11.4.11) que \mathcal{G} est plat sur B au point t . Mais puisque B est un A -module fidèlement plat, on conclut de (2.1.4) que \mathcal{F} est plat sur A au point x , ce qui prouve (11.4.12).

Corollaire (11.4.13). — Soient A un anneau artinien local, $Y = \text{Spec}(A)$, $f : X \rightarrow Y$ un morphisme localement de type fini, \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -Module cohérent. Soit (Y'_α) une famille de A -préschémas, et pour tout α , posons $X'_\alpha = X \times_Y Y'_\alpha$, $f'_\alpha = f_{(X'_\alpha)}$, $\mathcal{F}'_\alpha = \mathcal{F} \otimes_Y Y'_\alpha$. Soit x un point de X et supposons vérifiées les hypothèses suivantes :

(i) L'intersection des noyaux des homomorphismes $A \rightarrow \Gamma(Y'_\alpha, \mathcal{O}_{Y'_\alpha})$ correspondant aux morphismes structuraux est réduite à 0.

(ii) Pour tout α , \mathcal{F}'_α est f'_α -plat en tous les points $x'_\alpha \in X'_\alpha$ dont la projection dans X est x . Alors \mathcal{F} est f -plat au point x .

En effet, pour tout $y'_\alpha \in Y'_\alpha$, considérons le schéma local $Y''_{\alpha, y'_\alpha} = \text{Spec}(\mathcal{O}_{y'_\alpha})$; en vertu de (2.1.4), $\mathcal{F}'_\alpha \otimes_{Y'_\alpha} Y''_{\alpha, y'_\alpha}$ est Y''_{α, y'_α} -plat aux points dont les projections sur X et Y''_{α, y'_α} sont x et le point fermé de Y''_{α, y'_α} . En outre le noyau de l'homomorphisme $A \rightarrow \Gamma(Y'_\alpha, \mathcal{O}_{Y'_\alpha})$ est l'intersection des noyaux des homomorphismes $A \rightarrow \Gamma(Y''_{\alpha, y'_\alpha}, \mathcal{O}_{Y''_{\alpha, y'_\alpha}})$, car on se ramène aussitôt au cas où Y'_α est affine, et il suffit alors d'appliquer Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 3, n° 3, cor. 2 du th. 1. En remplaçant la famille (Y'_α) par la famille des Y''_{α, y'_α} , on est donc ramené à (11.4.12).

11.5. Descente de la platitude par des morphismes quelconques : cas général.

Théorème (11.5.1). — Soient Y un préschéma localement noethérien, $f : X \rightarrow Y$ un morphisme localement de type fini, \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -Module cohérent, x un point de X , $y = f(x)$. Soit (Y'_α) une famille de Y -préschémas locaux $Y'_\alpha = \text{Spec}(A'_\alpha)$ telle que les images des points fermés y'_α des Y'_α soient toutes égales à y . Pour tout α , soient m'_α l'idéal maximal de A'_α , et $u_\alpha : \mathcal{O}_y \rightarrow A'_\alpha$

l'homomorphisme canonique (I, 2.4.4); on suppose que les intersections finies des idéaux $u_\alpha^{-1}(\mathfrak{m}_\alpha^{n_\alpha})$ forment un système fondamental de voisinages de o dans \mathcal{O}_y . Posons $X'_\alpha = X \times_Y Y'_\alpha$, $f'_\alpha = f_{(x'_\alpha)}$, $\mathcal{F}'_\alpha = \mathcal{F} \otimes_Y Y'_\alpha$, et supposons vérifiée l'une des hypothèses suivantes :

(i) Pour tout α , \mathcal{F}'_α est f'_α -plat en tous les points dont la projection dans X est égale à x et la projection dans Y'_α égale à y'_α .

(ii) Pour tout α , il existe un $x'_\alpha \in X'_\alpha$ dont la projection sur X est x et la projection dans Y'_α égale à y'_α , tel que \mathcal{F}'_α soit f'_α -plat au point x'_α , et $\mathfrak{k}(x)$ est une extension primaire de $\mathfrak{k}(y)$.

Dans ces conditions, \mathcal{F} est f -plat au point x .

Soit \mathfrak{m}_y l'idéal maximal de \mathcal{O}_y ; comme \mathcal{O}_y et \mathcal{O}_x sont noethériens et $\mathcal{O}_y \rightarrow \mathcal{O}_x$ un homomorphisme local, il suffit, en vertu de (O_{III}, 10.2.2), de prouver que pour tout $n > 0$, $\mathcal{F}_x / \mathfrak{m}_y^n \mathcal{F}_x$ est un $(\mathcal{O}_y / \mathfrak{m}_y^n)$ -module plat. Désignons par (\mathfrak{J}_λ) la famille des intersections finies des $u_\alpha^{-1}(\mathfrak{m}_\alpha^{n_\alpha})$; par hypothèse, il existe λ tel que $\mathfrak{J}_\lambda \subset \mathfrak{m}_y^n$, et comme $\mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_y} (\mathcal{O}_y / \mathfrak{m}_y^n) = (\mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_y} (\mathcal{O}_y / \mathfrak{J}_\lambda)) \otimes_{\mathcal{O}_y / \mathfrak{J}_\lambda} (\mathcal{O}_y / \mathfrak{m}_y^n)$, il suffira de prouver que $\mathcal{F}_x / \mathfrak{J}_\lambda \mathcal{F}_x$ est un $(\mathcal{O}_y / \mathfrak{J}_\lambda)$ -module plat. Or, pour chaque α tel que $\mathfrak{J}_\lambda \subset u_\alpha^{-1}(\mathfrak{m}_\alpha^{n_\alpha})$, on a, par passage aux quotients, un homomorphisme $u'_\alpha : \mathcal{O}_y / \mathfrak{J}_\lambda \rightarrow A'_\alpha / \mathfrak{m}_\alpha^{n_\alpha}$, et l'intersection des noyaux des u'_α est réduite à o . Compte tenu de (I, 3.6.1), on voit qu'on est ramené à (II.4.11) dans le cas (ii), et à (II.4.12) dans le cas (i).

Corollaire (II.5.2). — Soient Y un préschéma localement noethérien, $f : X \rightarrow Y$ un morphisme localement de type fini, \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -Module cohérent, x un point de X , $y = f(x)$; posons $A = \mathcal{O}_y$. Soit $u : A \rightarrow A'$ un homomorphisme de A dans un anneau de Zariski A' , tel que l'image réciproque $u^{-1}(\mathfrak{r}')$ du radical \mathfrak{r}' de A' soit l'idéal maximal \mathfrak{m} de A ; supposons en outre que l'homomorphisme $\hat{u} : \hat{A} \rightarrow \hat{A}'$ soit injectif. Posons $Y' = \text{Spec}(A')$, $X' = X \times_Y Y'$, $f' = f_{(x')}$, $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \otimes_Y Y'$. Pour que \mathcal{F} soit f -plat au point x , il faut et il suffit que \mathcal{F}' soit f' -plat en tout point dont la projection dans X est égale à x et dont la projection dans Y' est égale à un point fermé de Y' .

Si en outre A' est une A -algèbre finie, on peut dans ce qui précède remplacer l'hypothèse que \hat{u} est injectif par l'hypothèse que u est injectif.

Comme A (resp. A') s'identifie à un sous-anneau de \hat{A} (resp. \hat{A}') (Bourbaki, Alg. comm., chap. III, § 3, n° 3, prop. 6), on voit d'abord que u lui-même est injectif et que \hat{u} est son prolongement par continuité à \hat{A} .

Soit (\mathfrak{m}'_α) la famille des idéaux maximaux de A' ; comme on a

$$\mathfrak{m}_\alpha^n \hat{A}' = \hat{\mathfrak{m}}_\alpha^n, \quad \text{et} \quad \hat{\mathfrak{m}}_\alpha^n \cap A' = \mathfrak{m}'_\alpha^n,$$

et que les \mathfrak{m}'_α^n sont ouverts dans A' , on a $u^{-1}(\mathfrak{m}'_\alpha^n) = A \cap \hat{u}^{-1}(\hat{\mathfrak{m}}_\alpha^n)$, et il suffira de montrer que dans \hat{A} , les intersections finies des $\hat{u}^{-1}(\hat{\mathfrak{m}}_\alpha^{n_\alpha})$ forment un système fondamental de voisinages de o , ce qui permettra d'appliquer (II.5.1) aux homomorphismes composés $v_\alpha \circ u : A \rightarrow A'_{\mathfrak{m}'_\alpha}$, où $v_\alpha : A' \rightarrow A'_{\mathfrak{m}'_\alpha}$ est l'homomorphisme canonique. Comme \hat{A} est complet, il suffira de montrer que l'intersection des $\hat{u}^{-1}(\hat{\mathfrak{m}}_\alpha^{n_\alpha})$ est réduite à o (Bourbaki, Alg. comm., chap. III, § 2, n° 7, prop. 8, où on peut dans la démonstration remplacer la suite décroissante par un ensemble filtrant quelconque). Or, pour tout α

fixé, l'intersection des $\hat{m}_\alpha^n \hat{A}'_{\hat{m}_\alpha}$ pour $n > 0$ est réduite à 0 dans l'anneau local noethérien $\hat{A}'_{\hat{m}_\alpha}$. D'autre part les \hat{m}_α sont les idéaux maximaux de \hat{A}' , donc l'homomorphisme canonique $\hat{A}' \rightarrow \prod_\alpha \hat{A}'_{\hat{m}_\alpha}$ est injectif (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 3, n° 3, cor. 2 du th. 1), et comme par hypothèse $\hat{u} : \hat{A} \rightarrow \hat{A}'$ est aussi injectif, cela achève la démonstration dans le cas général. La dernière assertion résulte de ce que \hat{A} est un A-module fidèlement plat (0_I, 7.3.5) et $\hat{A}' = A' \otimes_A \hat{A}$ puisque A' est par hypothèse un A-module de type fini (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 3, n° 4, th. 3 et chap. IV, § 2, n° 5, cor. 3 de la prop. 9).

Proposition (II.5.3). — Soient $f : X \rightarrow Y$ un morphisme localement de présentation finie, \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -Module quasi-cohérent de présentation finie, x un point de X, $y = f(x)$, $g = (\psi, \theta) : Y' \rightarrow Y$ un morphisme propre de présentation finie. On suppose que :

(i) L'homomorphisme $\theta_y : \mathcal{O}_y \rightarrow (g_*(\mathcal{O}_{Y'}))_y$ est injectif.

(ii) Pour tout $x' \in X' = X \times_Y Y'$ dont la projection dans X est x , $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \otimes_Y Y'$ est Y' -plat au point x' .

Alors \mathcal{F} est f -plat au point x .

La question étant locale sur X, on peut supposer f de présentation finie. Soit $p : X' \rightarrow X$ la projection canonique. Comme $f' = f_{(Y')} : X' \rightarrow Y'$ est de présentation finie (1.6.2) et que \mathcal{F}' est un $\mathcal{O}_{X'}$ -Module de présentation finie (0_I, 5.2.5), il résulte de (II.3.1) que l'ensemble U' des points de X' où \mathcal{F}' est f' -plat est ouvert. Comme U' contient $p^{-1}(x)$ par hypothèse, et que p est propre, donc fermé, U' contient un ensemble de la forme $p^{-1}(U)$, où U est un voisinage de x . Remplaçant X par U, on peut donc supposer déjà que \mathcal{F}' est f' -plat. D'autre part, tenant compte de (I, 3.6.5), (II, 5.4.2) et (2.1.4), on peut remplacer Y par $\text{Spec}(\mathcal{O}_y)$, autrement dit supposer que $Y = \text{Spec}(A)$, où A est un anneau local. Sous ces conditions, on va prouver que \mathcal{F} est f -plat. En vertu de (5.13.3), A est limite inductive de sous-anneaux locaux noethériens A_λ tels que l'injection canonique $A_\lambda \rightarrow A$ soit un homomorphisme local. En vertu de (8.9.1), on peut supposer que $X = X_\lambda \otimes_{A_\lambda} A$, $f = f_\lambda \otimes_{I_A}$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\lambda \otimes_{A_\lambda} A$, pour un λ convenable, $f_\lambda : X_\lambda \rightarrow Y_\lambda = \text{Spec}(A_\lambda)$ étant un morphisme de type fini, \mathcal{F}_λ un \mathcal{O}_{X_λ} -Module cohérent. De même, on peut supposer que $Y' = Y'_\lambda \otimes_{A_\lambda} A$, $g = g_\lambda \otimes_{I_A}$, où $g_\lambda : Y'_\lambda \rightarrow Y_\lambda$ est un morphisme de présentation finie; en outre (8.10.5, (xii)), on peut supposer que g_λ est propre. Comme par hypothèse l'homomorphisme $A \rightarrow \Gamma(Y', \mathcal{O}_{Y'})$ est injectif et que A_λ est un sous-anneau de A, l'homomorphisme $A_\lambda \rightarrow \Gamma(Y', \mathcal{O}_{Y'})$ est aussi injectif. Enfin, en vertu de (II.2.6), on peut supposer λ pris tel que $\mathcal{F}'_\lambda = \mathcal{F}_\lambda \otimes_{Y'_\lambda} Y'_\lambda$ soit f'_λ -plat, puisque $\mathcal{F}' = \mathcal{F}'_\lambda \otimes_{Y'_\lambda} Y'_\lambda$. Ces remarques prouvent que l'on peut désormais supposer l'anneau A noethérien, les autres hypothèses de (II.5.3) étant vérifiées. Posons alors $B = \hat{A}$, $Z = \text{Spec}(B)$; comme B est un A-module fidèlement plat (0_I, 7.3.5), il revient au même de dire que \mathcal{F} est f -plat ou que $\mathcal{F} \otimes_Y Z$ est Z-plat (2.1.4); de même, si l'on pose $Z' = Y' \times_Y Z$, le morphisme $Z' \rightarrow Y'$ est fidèlement plat (2.2.13), donc il revient au même de dire que \mathcal{F}' est f' -plat ou que $\mathcal{F}' \otimes_{Y'} Z'$ est Z' -plat; enfin $h = g_{(Z)} : Z' \rightarrow Z$ est propre (II, 5.4.2) et de type fini (1.5.2), \hat{A} est noethérien, et si z est son point

fermé, l'homomorphisme $\mathcal{O}_z \rightarrow (h_*(\mathcal{O}_Z))_z$ est *injectif*, car il résulte de (2.3.1) que $h_*(\mathcal{O}_Z) = g_*(\mathcal{O}_{Y'}) \otimes_Y Z$, et notre assertion résulte de l'hypothèse (i) et de la définition des modules plats ($\mathbf{0}_I$, 6.1.1).

On peut donc désormais supposer l'anneau local noethérien A *complet*; la démonstration sera achevée si l'on prouve que l'intersection des noyaux des homomorphismes $A = \mathcal{O}_y \rightarrow \mathcal{O}_{y'}$ (où y' parcourt $g^{-1}(y)$) est *réduite à 0*. En effet, les $\mathcal{O}_{y'}$ sont des anneaux locaux noethériens, donc pour chaque y' l'intersection des $\mathfrak{m}_{y'}^n$ ($n \geq 0$) est réduite à 0; si $\mathfrak{a}_{n,y'}$ est l'image réciproque dans A de $\mathfrak{m}_{y'}^n$, les intersections finies des $\mathfrak{a}_{n,y'}$ sont des voisinages de 0 dans A et l'intersection de tous les $\mathfrak{a}_{n,y'}$ est réduite à 0; les intersections finies des $\mathfrak{a}_{n,y'}$ formeront donc un système fondamental de voisinages de 0 dans A (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 2, n° 7, prop. 8, où on peut dans la démonstration remplacer la suite décroissante par un ensemble filtrant quelconque); on pourra par suite appliquer (11.5.1). Or, soit $s \in A$ un élément appartenant au noyau de chacun des homomorphismes $A \rightarrow \mathcal{O}_{y'}$; l'image s' de s dans $\Gamma(Y', \mathcal{O}_{Y'})$ est donc une section de $\mathcal{O}_{Y'}$ au-dessus de Y' telle que $s'_{y'} = 0$ pour tout $y' \in g^{-1}(y)$; il y a par suite un voisinage V' de $g^{-1}(y)$ dans Y' tel que $s'|_{V'} = 0$. Mais comme g est *fermé*, V' contient un ensemble de la forme $g^{-1}(V)$, où V est un voisinage ouvert de y dans Y ; or, Y est un schéma local, donc le seul voisinage du point fermé y de Y est Y tout entier, autrement dit $V' = Y'$, $s' = 0$, et comme $A \rightarrow \Gamma(Y', \mathcal{O}_{Y'})$ est injectif par hypothèse, $s = 0$. C.Q.F.D.

Le cas particulier suivant de (11.5.3) nous sera utile au chap. V :

Corollaire (11.5.4). — Soit $f = (\psi, \theta) : X \rightarrow Y$ un morphisme propre de présentation finie, et soit $p : X \times_Y X \rightarrow X$ la première projection. On suppose que $\theta : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*(\mathcal{O}_X)$ soit injectif. Alors, pour que f soit plat, il faut et il suffit que p le soit.

Proposition (11.5.5). — Soient A un anneau, $Y = \text{Spec}(A)$, $f : X \rightarrow Y$ un morphisme localement de présentation finie, \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -Module quasi-cohérent de présentation finie, x un point de X . Soit $A \rightarrow A'$ un homomorphisme injectif faisant de A' une algèbre entière sur A . Posons $Y' = \text{Spec}(A')$, $X' = X \times_Y Y'$, $f' = f \times 1$, $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \otimes_Y Y'$. Alors, si \mathcal{F}' est f' -plat en tout point de X' dont la projection dans X est égale à x , \mathcal{F} est f -plat au point x .

Supposons d'abord que A' soit une A -algèbre finie et de présentation finie; alors le morphisme $Y' \rightarrow Y$ est propre (\mathbf{II} , 6.1.11) et de présentation finie, donc les hypothèses de (11.5.3) sont vérifiées, d'où la conclusion. Dans le cas général, la proposition résultera de ce cas particulier, du fait que A' est limite inductive de ses sous- A -algèbres finies A'_λ et des deux lemmes suivants :

Lemme (11.5.5.1). — Toute A -algèbre finie A' est limite inductive de A -algèbres A'_λ qui sont finies et de présentation finie.

On raisonne comme dans (1.9.3.1). On a en effet $A' = B/\mathfrak{J}$, où B est une A -algèbre finie qui est un A -module libre, et \mathfrak{J} un idéal de B (1.4.7.1). Or, \mathfrak{J} est limite inductive des idéaux $\mathfrak{J}_\lambda \subset \mathfrak{J}$ de B qui sont de type fini (et a fortiori des A -modules de type fini), donc, par l'exactitude du foncteur \varinjlim , A' est limite inductive des A -algèbres B/\mathfrak{J}_λ ; or, B/\mathfrak{J}_λ est par définition un A -module de présentation finie, donc aussi (1.4.7) une A -algèbre de présentation finie.

Pour appliquer ce lemme à la situation de (11.5.5) on notera en outre que si l'homomorphisme $A \rightarrow A'$ est injectif, il en est ainsi *a fortiori* de $A \rightarrow A'_\lambda$ pour tout λ .

Lemme (11.5.5.2). — Soient A un anneau, A' une A -algèbre, (A'_λ) un système inductif de A -algèbres tel que $A' = \varinjlim A'_\lambda$; on pose $Y = \text{Spec}(A)$, $Y' = \text{Spec}(A')$, $Y'_\lambda = \text{Spec}(A'_\lambda)$. Soient $f: X \rightarrow Y$ un morphisme de présentation finie, \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -Module quasi-cohérent de présentation finie; on pose $X' = X \times_Y Y'$, $f' = f_{(Y')}$, $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \otimes_Y Y'$, $X'_\lambda = X \times_Y Y'_\lambda$, $f'_\lambda = f_{(Y'_\lambda)}$, $\mathcal{F}'_\lambda = \mathcal{F} \otimes_Y Y'_\lambda$. Soit x un point de X , tel que \mathcal{F}' soit f' -plat en tous les points $x' \in X'$ au-dessus de x ; alors il existe λ tel que \mathcal{F}'_λ soit f'_λ -plat en tous les points de X'_λ au-dessus de x .

Soit U' l'ensemble des $x' \in X'$ tels que \mathcal{F}' soit f' -plat au point x' ; on sait (11.3.1) que U' est ouvert dans X' puisque f' est de présentation finie (1.6.2); de même l'ensemble U'_λ des points de X'_λ où \mathcal{F}'_λ est f'_λ -plat est ouvert dans X'_λ , et on sait en outre (11.2.6) que U' est réunion des $v_\lambda^{-1}(U'_\lambda)$, où $v_\lambda: X' \rightarrow X'_\lambda$ est la projection canonique. Considérons le schéma $T = \text{Spec}(\mathbf{k}(x))$; posons $T' = T \times_Y Y'$, $T'_\lambda = T \times_Y Y'_\lambda$, et soient $w_\lambda: T' \rightarrow T'_\lambda$, $g': T' \rightarrow X'$, $g'_\lambda: T'_\lambda \rightarrow X'_\lambda$ les projections canoniques. Posons $V'_\lambda = g'^{-1}(U'_\lambda)$, $V' = g'^{-1}(U') = \bigcup_\lambda w_\lambda^{-1}(V'_\lambda)$. Par hypothèse on a (compte tenu de (1, 3.6.1)) $V' = T'$; comme T' est quasi-compact, il existe λ tel que $w_\lambda^{-1}(V'_\lambda) = T'$. On déduit alors de (8.3.3) appliqué aux parties fermées quasi-compactes $T'_\lambda - V'_\lambda$ de T'_λ , qu'il existe $\mu \geq \lambda$ tel que $T'_\mu = V'_\mu$; cela signifie que \mathcal{F}'_μ est f'_μ -plat en tous les points de X'_μ dont la projection dans X est x . C.Q.F.D.

11.6. Descente de la platitude par des morphismes quelconques : cas d'un préschéma de base unibranche.

Théorème (11.6.1). — Soient A un anneau local intègre géométriquement unibranche (0, 23.2.1), $Y = \text{Spec}(A)$, $f: X \rightarrow Y$ un morphisme localement de présentation finie, \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -Module quasi-cohérent de présentation finie. Soient A' un anneau local, $u: A \rightarrow A'$ un homomorphisme local injectif; on pose $Y' = \text{Spec}(A')$, $X' = X \times_Y Y'$, $f' = f_{(Y')}$, $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \otimes_Y Y'$. Soient x un point de X dont la projection $f(x) = y$ est le point fermé de Y , x' un point de X' dont les projections dans X et Y' sont respectivement x et le point fermé y' de Y' . Alors, si \mathcal{F}' est f' -plat au point x' , \mathcal{F} est f -plat au point x .

On peut se borner au cas où f est de présentation finie, la question étant locale sur X . Nous procéderons en plusieurs étapes.

1) Réduction au cas où A et A' sont des anneaux locaux intégralement clos.

Comme u est injectif et A intègre, il existe un idéal premier \mathfrak{p}' de A' tel que $u^{-1}(\mathfrak{p}') = 0$ (0_I, 1.5.8); l'homomorphisme composé $A \xrightarrow{u} A' \rightarrow A'' = A'/\mathfrak{p}'$ est donc injectif et local, et si $Y'' = \text{Spec}(A'')$, $X'' = X' \otimes_{A'} A'' = X \times_Y Y''$, $\mathcal{F}'' = \mathcal{F}' \otimes_{A'} A''$, \mathcal{F}'' est Y'' -plat aux points de X'' au-dessus de x' (2.1.4); remplaçant au besoin A' par A'' et tenant compte de (1, 3.4.7), on peut donc supposer d'abord que A' est intègre. Si K' est le corps des fractions de A' , il y a alors un anneau de valuation B' dans K' qui domine A' ; l'homomorphisme composé $A \xrightarrow{u} A' \rightarrow B'$ étant injectif et local, le même raisonnement que

précédemment permet de remplacer A' par B' ; on peut donc supposer l'anneau local A' *intégralement clos*, A étant un sous-anneau local de A' dominé par A' . Soit A_1 la clôture intégrale de A ; il est clair que $A \subset A_1 \subset A'$, et par hypothèse A_1 est un anneau *local*; si \mathfrak{m} , \mathfrak{m}_1 , \mathfrak{m}' sont les idéaux maximaux de A , A_1 , A' , on a $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}_1 \subset \mathfrak{m}'$; en effet, \mathfrak{m}_1 est le *seul* idéal premier de A_1 au-dessus de \mathfrak{m} , puisque A_1 est un anneau local (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. V, § 2, n° 1, prop. 1); comme $\mathfrak{m}' \cap A = \mathfrak{m}$, on a $\mathfrak{m}' \cap A_1 \cap A = \mathfrak{m}$, donc $\mathfrak{m}' \cap A_1 = \mathfrak{m}_1$. Posons $Y_1 = \text{Spec}(A_1)$, $X_1 = X \times_Y Y_1$, $f_1 = f_{(Y_1)}$, $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F} \otimes_Y Y_1$, et soit x_1 la projection de x' dans X_1 ; désignons d'autre part par y_1 l'unique point fermé de Y_1 , de sorte que $y_1 = f_1(x_1)$. Par hypothèse le morphisme $\text{Spec}(k(y_1)) \rightarrow \text{Spec}(k(y))$ est *radiciel*, d'où l'on conclut, par la transitivité des fibres (I, 3.6.4) et (I, 3.5.7), que le morphisme $f_1^{-1}(y_1) \rightarrow f^{-1}(y)$ est *radiciel*, et en particulier que x_1 est le *seul* point de X_1 dont les projections dans X et Y_1 soient x et y_1 respectivement; en outre, on a vu que y_1 est le *seul* point de Y_1 dont la projection dans Y soit y , donc x_1 est le *seul* point de X_1 dont la projection dans X soit x . Si l'on prouve que \mathcal{F}_1 est f_1 -plat au point x_1 , on pourra donc appliquer (II.5.5), d'où résultera la conclusion. On est donc ramené au cas où A lui aussi est *intégralement clos*.

II) *Réduction au cas où A et A' sont des anneaux locaux de \mathbf{Z} -algèbres de type fini intégralement closes.*

On peut considérer A' comme limite inductive filtrante de ses sous- \mathbf{Z} -algèbres (intégrales) de type fini B'_λ ; en outre, comme A' est *intégralement clos* et que la clôture intégrale d'une \mathbf{Z} -algèbre de type fini est aussi une \mathbf{Z} -algèbre de type fini (7.8.3), on voit que A' est limite inductive de ses sous- \mathbf{Z} -algèbres de type fini B'_λ *intégralement closes*; si $\mathfrak{m}'_\lambda = \mathfrak{m}' \cap B'_\lambda$, A' est aussi limite inductive des sous-anneaux locaux $(B'_\lambda)_{\mathfrak{m}'_\lambda} = A'_\lambda$ dominés par A' (5.13.3). Pour tout λ , $B'_\lambda \cap A$ est aussi limite inductive de ses sous- \mathbf{Z} -algèbres de type fini $B_{\alpha\lambda}$, donc $A = \varinjlim_{\alpha, \lambda} B_{\alpha\lambda}$, et comme plus haut on peut remplacer $B_{\alpha\lambda}$

dans cette formule par sa clôture intégrale (contenue par hypothèse dans $B'_\lambda \cap A$), puis par l'anneau local $A_{\alpha\lambda} = (B_{\alpha\lambda})_{\mathfrak{m}_{\alpha\lambda}}$, où $\mathfrak{m}_{\alpha\lambda} = \mathfrak{m} \cap B_{\alpha\lambda} = \mathfrak{m}'_\lambda \cap B_{\alpha\lambda}$, de sorte que $A_{\alpha\lambda}$ est dominé par A'_λ et par A . Posons $Y_{\alpha\lambda} = \text{Spec}(A_{\alpha\lambda})$; il résulte de (8.9.1) qu'il existe un couple (α, λ) assez grand, un morphisme $f_{\alpha\lambda} : X_{\alpha\lambda} \rightarrow Y_{\alpha\lambda}$ de type fini et un $\mathcal{O}_{X_{\alpha\lambda}}$ -Module cohérent $\mathcal{F}_{\alpha\lambda}$ tels que $X = X_{\alpha\lambda} \times_{Y_{\alpha\lambda}} Y$, $f = f_{\alpha\lambda} \times 1_Y$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\alpha\lambda} \otimes_{Y_{\alpha\lambda}} Y$; si $x_{\alpha\lambda}$ est la projection de x dans $X_{\alpha\lambda}$, il suffira de montrer que $\mathcal{F}_{\alpha\lambda}$ est $f_{\alpha\lambda}$ -plat au point $x_{\alpha\lambda}$. Comme A' est limite inductive des A'_μ pour $\mu \geq \lambda$, X' est limite projective des $X_{\alpha\lambda} \times_{Y_{\alpha\lambda}} Y'_\mu = X'_{\alpha\mu}$, et on a aussi $\mathcal{F}' = \mathcal{F}'_{\alpha\mu} \otimes_{Y'_\mu} Y'$, où $\mathcal{F}'_{\alpha\mu} = \mathcal{F}_{\alpha\lambda} \otimes_{Y_{\alpha\lambda}} Y'_\mu$. Appliquant (II.2.6), on voit qu'on peut prendre μ assez grand pour que $\mathcal{F}'_{\alpha\mu}$ soit Y'_μ -plat au point x'_μ , projection de x' dans X'_μ , et en outre, par construction des A'_μ , la projection de x'_μ dans Y'_μ est le point fermé de Y'_μ .

III) *Réduction au cas où le corps résiduel k' de A' est une extension finie et radicielle du corps résiduel k de A .*

On peut en premier lieu répéter le raisonnement de la partie I) de la démonstration de (II.4.11), tenant compte du fait que \mathbf{Z} est un anneau de

Jacobson; on se réduit ainsi au cas où k' est une extension *finie* de k , ce que l'on va supposer dans ce qui suit. Soient k'' la plus grande extension séparable de k contenue dans k' , k_1 une extension galoisienne finie de k contenant k'' , de sorte que $k'' \otimes_k k_1$ est composée directe de corps isomorphes à k_1 ; comme k' est une extension radicielle de k'' , $k' \otimes_k k_1$ est donc composée directe d'extensions radicielles de k_1 . Il existe un anneau local A_1 qui est une A -algèbre et un A -module *libre de type fini*, tel que $A_1/\mathfrak{m}A_1$ soit k -isomorphe à k_1 (0_{III}, 10.3.1.2); de façon précise, on peut supposer que $k_1 = k[T]/(r)$, où r est un polynôme unitaire irréductible et séparable de $k[T]$ de degré n ; si R est un polynôme unitaire de $A[T]$ dont l'image canonique est r (et qui est donc de degré n), on peut prendre $A_1 = A[T]/(R)$. Or, si K est le corps des fractions de A , il est clair que R est un polynôme irréductible et séparable de $K[T]$; on en déduit donc d'abord que A_1 est un anneau intègre dont le corps des fractions $K_1 = K[T]/(R)$ est une extension *séparable* de K . En outre, si t est l'image canonique de T dans A_1 , les t^j ($0 \leq j < n$) forment une base du A -module A_1 , et leurs images dans k_1 une base sur k ; on déduit de là que $d = \det(\text{Tr}_{A_1/A}(t^{i+j}))$ est un élément de A dont la classe dans k est $\neq 0$, et qui est par suite inversible. Le même raisonnement que dans (6.12.4.1, I) prouve alors que le morphisme $\text{Spec}(A_1) \rightarrow \text{Spec}(A)$ est plat et a ses fibres régulières; on conclut par suite de (6.5.4, (ii)) que A_1 est *intégralement clos*. Considérons alors l'anneau $A'_1 = A' \otimes_A A_1$; c'est un A' -module libre de type fini, donc un anneau semi-local (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. IV, § 2, n° 5, cor. 3 de la prop. 9); en outre, les idéaux maximaux de cette A' -algèbre finie sont tous au-dessus de l'idéal maximal \mathfrak{m}' de A' , et *a fortiori* contiennent $\mathfrak{m}A'_1$. Mais $A'_1/\mathfrak{m}A'_1 = (A'/\mathfrak{m}A') \otimes_k k_1$, et comme k_1 est une extension séparable et finie de k , le radical de $A'_1/\mathfrak{m}A'_1$ est égal à $(\mathfrak{m}'/\mathfrak{m}A') \otimes_k k_1$ (Bourbaki, *Alg.*, chap. VIII, § 7, n° 2, cor. 2 de la prop. 3); si \mathfrak{n}_i ($1 \leq i \leq r$) sont les idéaux maximaux de A'_1 , les corps A'_1/\mathfrak{n}_i sont donc les corps composant l'algèbre $k' \otimes_k k_1$, autrement dit ce sont des extensions finies *radicielles* de k_1 . D'ailleurs, comme $A \rightarrow A'$ est un homomorphisme injectif, il en est de même de $A_1 \rightarrow A'_1$, A_1 étant un A -module plat; l'homomorphisme canonique $A'_1 \rightarrow \prod_{i=1}^r (A'_1)_{\mathfrak{n}_i}$ étant lui aussi injectif (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 3, n° 3, th. 1), il en est de même du composé $A_1 \rightarrow \prod_{i=1}^r (A'_1)_{\mathfrak{n}_i}$. Mais A_1 est intègre, et les noyaux des homomorphismes $A_1 \rightarrow (A'_1)_{\mathfrak{n}_i}$ sont en nombre fini; comme leur intersection est nulle, c'est que l'un d'eux déjà est nul. En d'autres termes, il y a un $B_1 = (A'_1)_{\mathfrak{n}_i}$ tel que l'homomorphisme $A_1 \rightarrow B_1$ soit *injectif* et *local*. Posons $Y'_1 = \text{Spec}(B_1)$, $X'_1 = X' \times_{Y'} Y'_1$; $\mathcal{F}'_1 = \mathcal{F}' \otimes_{Y'} Y'_1$ est Y'_1 -plat en *tous* les points de X'_1 au-dessus de \mathfrak{x}' ; d'ailleurs l'idéal maximal de B_1 est le seul au-dessus de \mathfrak{m}' , par suite tous ces points ont pour projection dans Y'_1 le point fermé y'_1 . Soit x'_1 un de ces points. Posons d'autre part $Y_1 = \text{Spec}(A_1)$, $X_1 = X \times_Y Y_1$, $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F} \otimes_Y Y_1$; si x_1 est la projection de x'_1 dans X_1 , la projection de x_1 dans X est x et sa projection dans Y_1 est le point fermé y_1 . Si l'on prouve que $(\mathcal{F}_1)_{x_1}$ est un \mathcal{O}_{y_1} -module plat, il en résultera que \mathcal{F}_x est un \mathcal{O}_y -module plat; en effet \mathcal{O}_{y_1} est un \mathcal{O}_y -module plat, donc $(\mathcal{F}_1)_{x_1}$ est un \mathcal{O}_y -module plat (0_I, 6.2.1).

Mais $(\mathcal{F}_1)_{x_1} = \mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_x} \mathcal{O}_{x_1}$, et \mathcal{O}_{x_1} est un \mathcal{O}_x -module *fidèlement plat*; donc (2.2.11, (iii)) \mathcal{F}_x est un \mathcal{O}_y -module plat. Comme $X'_1 = X_1 \times_{Y_1} Y'_1$, $\mathcal{F}'_1 = \mathcal{F}_1 \otimes_{Y_1} Y'_1$, on est bien ramené à la situation de l'énoncé (11.6.1), avec A et A' remplacés par A_1 et B_1 respectivement.

IV) *Fin de la démonstration.* — On est finalement réduit à prouver (11.6.1) sous les hypothèses supplémentaires suivantes :

- (i) A et A' sont des anneaux locaux de \mathbf{Z} -algèbres de type fini (donc des anneaux *excellents* (7.8.3));
- (ii) A est *intégralement clos*;
- (iii) le corps résiduel k' de A' est une extension finie et radicielle du corps résiduel k de A .

On sait alors ((7.8.3) et (2.3.8)) que sous les conditions (i) et (ii), si \mathfrak{m} et \mathfrak{m}' sont les idéaux maximaux de A et A' respectivement, la topologie \mathfrak{m} -adique sur A est *induite* par la topologie \mathfrak{m}' -adique de A' . Le complété $\hat{u} : \hat{A} \rightarrow \hat{A}'$ est donc un homomorphisme *injectif*. D'autre part, comme le morphisme $\text{Spec}(k') \rightarrow \text{Spec}(k)$ est radiciel, il en est de même du morphisme $f'^{-1}(y') \rightarrow f^{-1}(y)$ (I, 3.5.7), et il n'y a donc qu'un *seul* point x' de X' dont les projections dans X et Y' soient x et y' respectivement. On peut donc appliquer le résultat de (11.5.2). C.Q.F.D.

Corollaire (11.6.2). — Soient A un anneau local intègre unibranche, $Y = \text{Spec}(A)$, $f : X \rightarrow Y$ un morphisme localement de présentation finie, \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -Module quasi-cohérent de présentation finie. Soient A' un anneau local, $A \rightarrow A'$ un homomorphisme local injectif; on pose $Y' = \text{Spec}(A')$, $X' = X \times_Y Y'$, $f' = f_{(Y')}$, $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \otimes_Y Y'$. Soit x un point de X dont la projection $f(x) = y$ est le point fermé de Y ; on suppose que \mathcal{F}' est f' -plat en tous les points x' de X' dont les projections dans X et Y' sont respectivement x et le point fermé y' de Y' . Alors \mathcal{F} est f -plat au point x .

On peut en effet reprendre la partie I) de la démonstration de (11.6.1), qui prouve (avec les mêmes notations) que si \mathcal{F}_1 est f_1 -plat en tous les points x_1 de X_1 dont les projections respectives dans X et Y_1 sont x et y_1 , alors \mathcal{F} est f -plat au point x ; on est ainsi ramené au cas où A est *intégralement clos*, donc géométriquement unibranche, et la conclusion résulte alors de (11.6.1).

11.7. Contre-exemples.

(11.7.1) Considérons d'abord le cas où A est un anneau local *artinien*, et où les hypothèses de (11.4.11) sont remplies *sauf* la condition (ii) concernant le corps résiduel k de A . Nous allons voir que la conclusion de (11.4.11) peut alors être en défaut. Soit k un corps admettant une extension *galoisienne* k' de degré $[k' : k] > 1$, et désignons par Γ le groupe de Galois de k' . Soit A une k -algèbre ayant une base de 3 éléments $1, a, b$ avec la table de multiplication $a^2 = ab = ba = b^2 = 0$, de sorte que A est un anneau local artinien dont l'idéal maximal $\mathfrak{m} = ka + kb$ est de carré nul. Soit $A' = A \otimes_k k'$, qui est une k' -algèbre de base $1, a, b$, anneau local artinien d'idéal maximal $\mathfrak{m}' = k'a + k'b = \mathfrak{m}A'$, de carré nul; A s'identifie canoniquement à un sous-anneau de A' . Soit \mathfrak{J} le sous- k' -espace vectoriel de \mathfrak{m}' engendré par $a + \gamma b$, où $\gamma \in k'$ n'appartient pas à k ; il est clair que \mathfrak{J} est un idéal de A' . Posons $B = A'/\mathfrak{J}$; c'est un anneau artinien qui est un A -module *non plat*; sinon (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 3, n° 2, cor. 2 de la prop. 5), B serait un A -module *libre*; comme A' est lui aussi un A -module libre, et que l'homomorphisme canonique $A'/\mathfrak{m}A' \rightarrow B/\mathfrak{m}B$ est bijectif, l'homomorphisme canonique $A' \rightarrow B = A'/\mathfrak{J}$ serait lui

aussi bijectif (*loc. cit.*, n° 2, cor. de la prop. 6) ce qui est absurde. Autrement dit, si l'on pose $Y = \text{Spec}(A)$, $X = \text{Spec}(B)$, \mathcal{O}_x n'est pas Y -plat en l'unique point x de X . Mais soit $A_1 = B$, et $Y_1 = \text{Spec}(A_1)$, et considérons l'homomorphisme canonique $A \rightarrow A_1$, qui est *local* et *injectif* puisque $\mathfrak{Z} \cap A = 0$; si $B_1 = B \otimes_A A_1 = B \otimes_A B$, nous allons voir qu'il y a un point de $X_1 = X \times_Y Y_1 = \text{Spec}(B_1)$ où \mathcal{O}_{x_1} est Y_1 -plat. Pour cela, remarquons que l'on a $B \otimes_A B = (A' \otimes_A A') / (\text{Im}(\mathfrak{Z} \otimes_A A') + \text{Im}(A' \otimes_A \mathfrak{Z}))$. Or la structure de $C' = A' \otimes_A A'$ s'obtient aisément; on considère la A -algèbre produit $C = \prod_{\sigma \in \Gamma} A'_\sigma$, où tous les A'_σ sont égaux à A' , et l'application canonique $\varphi : A' \otimes_A A' \rightarrow C$ telle que $\varphi(x \otimes y) = (\sigma(x)y)_{\sigma \in \Gamma}$ (le groupe Γ opérant canoniquement sur A'); en passant aux quotients, on en déduit un homomorphisme $C'/mC' \rightarrow C/mC$ qui n'est autre que l'homomorphisme canonique $k' \otimes_k k' \rightarrow \prod_{\sigma} k'_\sigma$ (avec $k'_\sigma = k'$ pour tout $\sigma \in \Gamma$); on sait que ce dernier est bijectif (Bourbaki, *Alg.*, chap. VIII, § 8, prop. 4), donc il en est de même de φ , puisque C' et C sont des A -modules *libres* (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 3, n° 2, cor. de la prop. 6). De ce qui précède, il résulte que $B \otimes_A B$ est une A -algèbre semi-locale, composée directe des A -algèbres locales $A' / (\sigma(\mathfrak{Z}) + \mathfrak{Z})$. Celle de ces algèbres correspondant à l'identité de Γ est isomorphe à A' / \mathfrak{Z} , donc est un A_1 -module *plat*, mais comme $\gamma \notin k$, il y a au moins un $\sigma \in \Gamma$ tel que $\sigma(\mathfrak{Z}) \neq \mathfrak{Z}$; alors $\sigma(\mathfrak{Z}) + \mathfrak{Z} = m'$, et A' / m' n'est pas un (A' / \mathfrak{Z}) -module plat, puisque c'est le quotient de A' / \mathfrak{Z} par un idéal non nul.

(11.7.2) Nous allons maintenant montrer que le résultat de (11.5.4) perd sa validité lorsqu'on ne suppose plus que f soit un morphisme *propre* (et *a fortiori* (11.5.3) cesse d'être exact lorsqu'on ne suppose plus g *propre*). Soient k un corps, A_0 l'anneau de polynômes $k[S, T]$, A l'anneau quotient $A_0 / A_0 \mathfrak{S} T$; $Y = \text{Spec}(A)$ est donc la courbe réductible formée des deux « axes de coordonnées » dans le plan affine $\mathbf{V}_k^2 = \text{Spec}(A_0)$. L'anneau A admet deux idéaux premiers minimaux $\mathfrak{p}_1 = A_0 S / A_0 \mathfrak{S} T$, $\mathfrak{p}_2 = A_0 T / A_0 \mathfrak{S} T$, et comme A est réduit, il se plonge canoniquement dans $B = B_1 \oplus B_2$, où $B_1 = A / \mathfrak{p}_1$, $B_2 = A / \mathfrak{p}_2$; d'ailleurs B_1 s'identifie à $k[T]$ et B_2 à $k[S]$, donc ce sont des anneaux intègres intégralement clos et par suite $Z = \text{Spec}(B)$ n'est autre que le *normalisé* du préschéma Y par rapport à $R(Y)$ (II, 6.3.8), somme des deux schémas $Z_1 = \text{Spec}(B_1)$, $Z_2 = \text{Spec}(B_2)$. Désignons par y le « point double » de Y , correspondant à l'idéal maximal $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2$ de A , par z_1 et z_2 les points de Z qui se projettent en y , correspondant respectivement aux idéaux maximaux $\mathfrak{m}_1 = (T)$ et $\mathfrak{m}_2 = (S)$ de B_1 et B_2 . Nous désignerons par X le sous-préschéma de Z induit sur le complémentaire de z_2 dans Z ; on a donc $X = \text{Spec}(B_1 \oplus (B_2)_S)$; il est immédiat que l'homomorphisme $A \rightarrow A' = B_1 \oplus (B_2)_S$ est *injectif*, mais le morphisme correspondant $f : X \rightarrow Y$ n'est pas fermé (car $f(Z_2 - \{z_2\})$ n'est pas fermé dans Y , bien que $Z_2 - \{z_2\}$ soit fermé dans X); *a fortiori* il n'est pas propre. Nous allons voir maintenant que f n'est pas plat au point z_1 ; il suffira de montrer (0, 6.6.2) que \mathcal{O}_{z_1} n'est pas un \mathcal{O}_y -module fidèlement plat, et pour cela il suffit de voir que l'homomorphisme canonique $\mathcal{O}_y \rightarrow \mathcal{O}_{z_1}$ n'est pas *injectif*; mais cela est immédiat car \mathcal{O}_{z_1} est un anneau intègre, tandis que \mathcal{O}_y admet des diviseurs de zéro. Cependant, la première projection $p : X \times_Y X \rightarrow X$ est un *isomorphisme* : en effet, on a $B_1 \otimes_A B_1 = (A / \mathfrak{p}_1) \otimes_A (A / \mathfrak{p}_1) = A / \mathfrak{p}_1$, $(B_2)_S \otimes_A (B_2)_S = (B_2 \otimes_A B_2)_S = (B_2)_S$ pour la même raison, et enfin $B_1 \otimes_A (B_2)_S = 0$, car l'image canonique de S dans B_1 est nulle.

(11.7.3) L'exemple précédent peut se généraliser : on considère sur un corps k une courbe algébrique réduite Y admettant un seul « point double ordinaire » y (notion qui sera définie plus tard de façon générale), et sa *normalisée* Z , de sorte que le morphisme $g : Z \rightarrow Y$ est fini, que la restriction de g à $Z - g^{-1}(y)$ est un isomorphisme sur $Y - \{y\}$, et que $g^{-1}(y)$ se réduit à deux points « simples » z_1, z_2 ; en outre le préschéma $g^{-1}(y)$ est somme des deux préschémas $\text{Spec}(k(z_1))$, $\text{Spec}(k(z_2))$, canoniquement isomorphes à $\text{Spec}(k(y))$. Soit X le sous-préschéma de Z induit sur l'ouvert $Z - \{z_2\}$; le morphisme $f : X \rightarrow Y$, restriction de g à X , n'est pas propre, sans quoi (II, 5.4.3) il en serait de même de l'injection canonique $j : X \rightarrow Z$, qui n'est pas fermée. Le morphisme f est *radiciel*, car pour tout $y' \in Y$, la fibre $f^{-1}(y')$ ne comprend qu'un seul point x' , $k(y') \rightarrow k(x')$ étant un isomorphisme; on en conclut d'abord que le morphisme diagonal $\Delta_f : X \rightarrow X \times_Y X$ est *bijectif* (1.7.7.1) et d'autre part, comme f est non ramifié (17.4.2, d'), Δ_f est une *immersion ouverte* (17.4.2, b); par suite Δ_f est un *isomorphisme*, et la première projection $p : X \times_Y X \rightarrow X$ l'isomorphisme réciproque. Cependant f n'est pas plat au point z_1 ; sinon \mathcal{O}_{z_1} serait un \mathcal{O}_y -module fidèlement plat (0, 6.6.2), et comme \mathcal{O}_y contient deux idéaux premiers minimaux $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$ distincts (correspondant aux deux « branches » de Y au point y) il existerait dans \mathcal{O}_{z_1} deux idéaux premiers dont les images réciproques par $u : \mathcal{O}_y \rightarrow \mathcal{O}_{z_1}$ seraient \mathfrak{p}_1 et \mathfrak{p}_2 (0, 6.5.1); mais cela est absurde, car \mathcal{O}_{z_1} n'a que deux idéaux premiers distincts, 0 et l'idéal maximal \mathfrak{m}_1 , et $u^{-1}(\mathfrak{m}_1)$ est l'idéal maximal \mathfrak{m} de \mathcal{O}_y .

(11.7.4) On notera que dans l'exemple précédent l'homomorphisme u est *injectif* lorsque Y est *irréductible* (on peut par exemple prendre $Y = \text{Spec}(k[S, T] / ((S^2 + T^2) - (S^2 - T^2)))$, « cubique à point double »); on peut en effet alors (en remplaçant Y par un voisinage affine de y) supposer que $Y = \text{Spec}(A)$, où A est intègre, d'où $Z = \text{Spec}(B)$, où B est la clôture intégrale de A ; comme B, \mathcal{O}_y et \mathcal{O}_{z_1} s'identifient alors à des sous-anneaux du corps

des fractions de A , u est évidemment injectif. On notera par contre que l'homomorphisme $\hat{u} : \hat{\mathcal{O}}_y \rightarrow \hat{\mathcal{O}}_{z_1}$ n'est pas injectif, car $\hat{\mathcal{O}}_{z_1}$ est un anneau intègre local (z_1 étant un point simple), tandis que $\hat{\mathcal{O}}_y$ a deux idéaux premiers minimaux distincts (correspondant aux deux « branches » de Y) et admet donc des diviseurs de zéro. Cela donne un exemple montrant que dans l'énoncé (11.5.2), on ne peut pas remplacer l'hypothèse que \hat{u} est injectif par l'hypothèse que u lui-même est injectif, même lorsque A' est un anneau local. Il suffit en effet de prendre (avec les notations précédentes) $A = \mathcal{O}_y$, $A' = \mathcal{O}_{z_1}$, $Y = \text{Spec}(A)$, $X = \text{Spec}(A')$; le raisonnement de (11.7.3) prouve encore que la première projection $p : X \times_Y X \rightarrow X$ est un isomorphisme, bien que f ne soit pas plat au point z_1 .

(11.7.5) Les exemples de (11.7.2) et (11.7.3) expliquent la restriction aux anneaux locaux unibranches dans (11.6.1) et (11.6.2). Nous allons voir maintenant que dans (11.6.1), on ne peut affaiblir l'hypothèse sur A en supposant seulement A unibranche. Considérons en effet l'anneau local intègre complet $A = \mathbf{R}[[U, V]]/(U^2 + V^2)$ qui est unibranche mais non géométriquement unibranche (6.5.11). On sait (*loc. cit.*) que si u, v sont les images de U et V dans A , la clôture intégrale de A est $\bar{A} = A[t]$ avec $t = v/u$, tel que $t^2 = -1$, si bien que \bar{A} est isomorphe à $\mathbf{C}[[U]]$. Posons $Y = \text{Spec}(A)$, $X = \text{Spec}(\bar{A})$ (normalisé de Y (II, 6.3.8)) et soient y et x les points fermés de Y et X respectivement; nous allons montrer que pour une A -algèbre locale convenable A' , si l'on pose $Y' = \text{Spec}(A')$, $X' = X \times_Y Y'$, et si y' désigne le point fermé de Y' , $\mathcal{O}_{x'}$ est Y' -plat en un point de X' dont les projections dans X et Y' sont respectivement x et y' , mais n'est pas Y' -plat en tous les points ayant ces projections; il en résultera évidemment (2.1.4) que \mathcal{O}_x n'est pas Y -plat au point x (ce qui est d'ailleurs trivial a priori, \bar{A} n'étant pas un A -module libre).

Soit $B = A \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$, isomorphe à $\mathbf{C}[[U, V]]/(U + iV)(U - iV)$; B a deux idéaux premiers minimaux \mathfrak{p}' , \mathfrak{p}'' engendrés respectivement par $u + iv$ et $u - iv$, et $\mathfrak{n} = \mathfrak{p}' + \mathfrak{p}''$ est l'idéal maximal de l'anneau local complet B . Soit $\bar{B} = \bar{A} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$; \bar{B} est composée directe de deux algèbres isomorphes à $\mathbf{C}[[U]]$, engendrées par les idempotents $e' = (1 \otimes 1 + t \otimes i)/2$ et $e'' = (1 \otimes 1 - t \otimes i)/2$; comme l'homomorphisme $A \rightarrow \bar{A}$ est injectif, il en est de même de $B \rightarrow \bar{B}$, et les images de $u + iv$ et de $u - iv$ par cette injection sont respectivement ue' et ue'' ; on en conclut aussitôt que \bar{B} s'identifie canoniquement à $(B/\mathfrak{p}') \oplus (B/\mathfrak{p}'')$. Cela étant, prenons pour A' l'anneau local B/\mathfrak{p}' ; alors $\bar{A} \otimes_A A'$ s'identifie à $\bar{B} \otimes_B A'$. Mais on a $(B/\mathfrak{p}') \otimes_B (B/\mathfrak{p}') = B/\mathfrak{p}'$ et $(B/\mathfrak{p}') \otimes_B (B/\mathfrak{p}'') = B/\mathfrak{n}$, donc $\bar{A} \otimes_A A'$ est isomorphe à $A' \oplus (B/\mathfrak{n})$. Cela établit notre assertion, car $B/\mathfrak{n} = A'/(n/\mathfrak{p}')$ n'est pas un A' -module plat (sans quoi ce serait un A' -module libre (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 3, n° 2, cor. 2 de la prop. 5), ce qui est absurde).

11.8. Un critère valuatif de platitude.

Théorème (11.8.1). — Soient $f : X \rightarrow Y$ un morphisme localement de présentation finie, \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -Module quasi-cohérent de présentation finie, x un point de X , $y = f(x)$. On suppose l'anneau local \mathcal{O}_y intègre (resp. réduit et noethérien). Pour que \mathcal{F} soit f -plat au point x , il faut et il suffit que, pour tout anneau de valuation (resp. tout anneau de valuation discrète) A' et tout homomorphisme local $\mathcal{O}_y \rightarrow A'$, la condition suivante soit satisfaite : en posant $Y' = \text{Spec}(A')$, $X' = X \times_Y Y'$, $f' = f_{(Y')}$, le $\mathcal{O}_{X'}$ -Module $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \otimes_Y Y'$ est f' -plat en tous les points x' de X' dont les projections respectives dans X et Y' sont x et le point fermé y' de Y' .

La condition étant évidemment nécessaire (2.1.4), reste à prouver qu'elle est suffisante. On peut évidemment ((I, 3.6.5) et (I, 2.4.4)) se borner au cas où $Y = \text{Spec}(A)$ est le spectre d'un anneau local A et y le point fermé de Y .

(i) Cas où A est intègre. — Soient K le corps des fractions de A , A_1 la clôture intégrale de A ; si l'on pose $Y_1 = \text{Spec}(A_1)$, $X_1 = X \times_Y Y_1$, $f_1 = f_{(Y_1)}$, il suffit, en vertu de (11.5.5), de montrer que $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F} \otimes_Y Y_1$ est f_1 -plat en tous les points x_1 de X_1 dont x est la projection dans X . Or, si $f_1(x_1) = y_1$, on a $\mathfrak{i}_{y_1} = \mathfrak{m}_1$, où \mathfrak{m}_1 est un idéal premier de A_1 dont $\mathfrak{m} = \mathfrak{i}_y$ est la trace sur A (\mathfrak{m}_1 est d'ailleurs nécessairement un idéal maximal). Soit alors A' un anneau de valuation pour K qui domine $\mathcal{O}_{y_1} = (A_1)_{\mathfrak{m}_1}$; l'homomorphisme $A \rightarrow \mathcal{O}_{y_1}$ étant local, il en est de même de $A \rightarrow A'$. Il existe alors au moins un

point $x' \in X'$ dont les projections dans X_1 et Y' sont respectivement x_1 et y' (I, 3.4.7); comme par hypothèse \mathcal{F}' est f' -plat au point x' , et que \mathcal{O}_{y_1} est intégralement clos, on peut appliquer (II.6.1), et on en déduit que \mathcal{F}'_1 est f_1 -plat au point x_1 , d'où le théorème dans ce cas.

(ii) *Cas où A est réduit et noethérien.* — Soient \mathfrak{p}_i ($1 \leq i \leq m$) les idéaux minimaux de A ; comme A est réduit, il s'identifie canoniquement à un sous-anneau du produit des $A_i = A/\mathfrak{p}_i$, qui sont des anneaux locaux noethériens; posant $Y_i = \text{Spec}(A_i)$, $X_i = X \times_Y Y_i$, $f_i = f|_{X_i}$, il résulte de (II.5.2) qu'il suffit de démontrer que pour chaque i , $\mathcal{F}'_i = \mathcal{F}' \otimes_Y Y_i$ est f_i -plat en tout point x_i de X_i dont les projections dans X et Y_i sont x et le point fermé y_i de Y_i respectivement. Or, comme A_i est un anneau local noethérien intègre, il existe dans son corps des fractions K_i un sous-anneau A'_i contenant A_i , qui soit une A_i -algèbre finie (donc un anneau semi-local noethérien) et dont les anneaux locaux soient géométriquement unibranches ((6.15.5) et (0, 23.2.5)). Comme les idéaux maximaux de A'_i sont alors nécessairement au-dessus de l'idéal maximal de A_i , on déduit encore de (I, 3.4.7) et de (II.5.2) qu'il suffit, en posant $Y'_i = \text{Spec}(A'_i)$, $X'_i = X \times_Y Y'_i$, $f'_i = f|_{X'_i}$, de prouver que $\mathcal{F}''_i = \mathcal{F}' \otimes_Y Y'_i$ est f'_i -plat en tout point x'_i de X'_i dont les projections dans X et Y'_i sont x et le point fermé y'_i de Y'_i respectivement. Or, soit A' un anneau de valuation discrète pour K_i dominant A'_i , et soit x' un point de X' dont les projections dans X'_i et dans Y' sont x'_i et y' respectivement (I, 3.4.7); comme $\mathcal{O}_{y'_i}$ est géométriquement unibranche, on peut encore appliquer (II.6.1) et on en déduit bien que \mathcal{F}''_i est f'_i -plat au point x'_i .

Remarques (II.8.2). — (i) Dans l'énoncé de (II.8.1), on peut se borner à supposer que la condition sur \mathcal{F}' est vérifiée pour les anneaux de valuation A' complets et dont le corps résiduel est algébriquement clos. On sait en effet que tout anneau de valuation A' est dominé par un tel anneau A'' (II, 7.1.2), et que si A' est un anneau de valuation discrète, on peut supposer qu'il en est de même de A'' (0_{III}, 10.3.1).

(ii) La démonstration de (II.8.1) se simplifie lorsqu'on suppose non seulement que A est intègre et noethérien, mais que son complété \hat{A} est lui aussi intègre. Remplaçant X par $X \otimes_A \hat{A}$ et raisonnant comme dans la démonstration de (II.5.3), on peut en effet se ramener alors à prouver (II.8.1) lorsque $A = \mathcal{O}_y$ est intègre, noethérien et complet. Or, on sait (II, 7.1.7) qu'un tel anneau A est dominé par un anneau de valuation discrète complet; la conclusion résulte donc directement de (II.5.2).

II.9. Familles séparantes et universellement séparantes d'homomorphismes de faisceaux de modules.

(II.9.1) Soient X un préschéma, $(f_\lambda)_{\lambda \in L}$ une famille de morphismes $f_\lambda : Z_\lambda \rightarrow X$, \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -Module quasi-cohérent; pour tout $\lambda \in L$, supposons donnés un \mathcal{O}_{Z_λ} -Module quasi-cohérent \mathcal{G}_λ et un homomorphisme

$$(II.9.1.1) \quad u_\lambda : \mathcal{F} \rightarrow (f_\lambda)_*(\mathcal{G}_\lambda).$$

On dit que la famille (u_λ) (ou la famille correspondante des $u_\lambda^* : (f_\lambda)^*(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{G}_\lambda$) est *séparante* si l'intersection des noyaux des u_λ est *nulle*. En d'autres termes, cela signifie que pour *tout* ouvert U de X , et toute section t de \mathcal{F} au-dessus de U , telle que, pour *tout* λ , la section $u_\lambda(t)$ (qui, par définition est une section de \mathcal{G}_λ au-dessus de $f_\lambda^{-1}(U)$) soit nulle, alors t est elle-même nulle.

(11.9.2) Avec les notations de (11.9.1), soit M un second ensemble d'indices; pour tout $\lambda \in L$, soit $(g_{\lambda\mu})_{\lambda \in M}$ une famille de morphismes $g_{\lambda\mu} : Z'_{\lambda\mu} \rightarrow Z_\lambda$; pour tout couple (λ, μ) , supposons donnés un $\mathcal{O}_{Z'_{\lambda\mu}}$ -Module quasi-cohérent $\mathcal{H}_{\lambda\mu}$ et un homomorphisme $v_{\lambda\mu} : \mathcal{G}_\lambda \rightarrow (g_{\lambda\mu})_*(\mathcal{H}_{\lambda\mu})$; posons $h_{\lambda\mu} = f_\lambda \circ g_{\lambda\mu} : Z'_{\lambda\mu} \rightarrow X$ et considérons l'homomorphisme composé

$$w_{\lambda\mu} : \mathcal{F} \xrightarrow{u_\lambda} (f_\lambda)_*(\mathcal{G}_\lambda) \xrightarrow{(f_\lambda)_*(v_{\lambda\mu})} (h_{\lambda\mu})_*(\mathcal{H}_{\lambda\mu}).$$

Supposons que, pour tout $\lambda \in L$, la famille $(v_{\lambda\mu})_{\mu \in M}$ soit *séparante* : alors, il en est de même de la famille des $(f_\lambda)_*(v_{\lambda\mu})$ ($\mu \in M$), comme on le voit aussitôt. On en conclut que, pour que la famille (u_λ) soit *séparante*, il faut et il suffit que la famille $(w_{\lambda\mu})_{(\lambda, \mu) \in L \times M}$ le soit.

(11.9.3) Pour vérifier que la famille (u_λ) est *séparante* (avec les notations de (11.9.1)), on peut évidemment se ramener tout d'abord au cas où X est *affine*, la propriété étant locale sur X . On peut en outre supposer que $Z_\lambda = X$ pour tout $\lambda \in L$. En effet, soit M un ensemble d'indices, somme d'une famille $(M_\lambda)_{\lambda \in L}$, et pour tout $\lambda \in L$, soit $(Y_{\lambda\mu})_{\mu \in M_\lambda}$ un recouvrement ouvert affine de Z_λ ; soit $j_{\lambda\mu} : Y_{\lambda\mu} \rightarrow Z_\lambda$ l'injection canonique et posons $\mathcal{H}_{\lambda\mu} = j_{\lambda\mu}^*(\mathcal{G}_\lambda) = \mathcal{G}_\lambda|_{Y_{\lambda\mu}}$. Si l'on considère l'homomorphisme canonique $v_{\lambda\mu} = \rho_{\mathcal{G}_\lambda} : \mathcal{G}_\lambda \rightarrow (j_{\lambda\mu})_*(j_{\lambda\mu}^*(\mathcal{G}_\lambda)) = (j_{\lambda\mu})_*(\mathcal{H}_{\lambda\mu})$ relatif à $j_{\lambda\mu}$ (01, 4.4.3.2), il est immédiat que pour chaque $\lambda \in L$, la famille $(v_{\lambda\mu})_{\mu \in M_\lambda}$ est *séparante*. En vertu de (11.9.2), on est donc ramené à prouver que la famille des homomorphismes composés $((f_\lambda)_*(v_{\lambda\mu}))_{\mu \in M_\lambda}$ est *séparante*, autrement dit on est ramené au cas où les Z_λ sont *affines*. Mais alors les $(f_\lambda)_*(\mathcal{G}_\lambda)$ sont des \mathcal{O}_X -Modules quasi-cohérents (1, 1.6.2) et en vertu de la définition, on peut remplacer les Z_λ par X et les \mathcal{G}_λ par les $(f_\lambda)_*(\mathcal{G}_\lambda)$, d'où notre assertion.

On notera en outre que si L est *fini* et les f_λ *quasi-compacts*, on peut, dans la réduction précédente, supposer que les M_λ sont aussi *finis*, donc on est dans ce cas ramené à vérifier qu'une famille *finie* d'homomorphismes de \mathcal{F} dans des \mathcal{O}_X -Modules quasi-cohérents est *séparante*.

(11.9.4) Considérons donc le cas où $Z_\lambda = X$ pour tout λ , et où $X = \text{Spec}(A)$ est affine; alors on a $\mathcal{F} = \tilde{M}$ et $\mathcal{G}_\lambda = \tilde{N}_\lambda$, où M et N_λ sont des A -modules, et $u_\lambda = \tilde{\varphi}_\lambda$, où les $\varphi_\lambda : M \rightarrow N_\lambda$ sont des A -homomorphismes. Dire que la famille (u_λ) est *séparante* signifie alors que, pour tout $s \in A$, l'intersection des noyaux des $(\varphi_\lambda)_s : M_s \rightarrow (N_\lambda)_s$ est réduite à 0. On dit alors aussi que la famille (φ_λ) est *séparante*. On notera que si L est *fini*, il revient au même de dire que l'intersection des noyaux des φ_λ est 0, car on a alors $\bigcap_{\lambda \in L} \text{Ker}((\varphi_\lambda)_s) = (\bigcap_{\lambda \in L} \text{Ker}(\varphi_\lambda))_s$ (01, 1.3.2). Mais cette relation n'est plus exacte en général lorsque L est *infini*, et le fait que l'intersection des noyaux des φ_λ soit 0 n'entraîne donc pas,

en général, que la famille (φ_λ) soit séparable. Par exemple, supposons que A soit un anneau de valuation discrète, d'idéal maximal \mathfrak{m} , et considérons la famille des homomorphismes $\varphi_k : A \rightarrow A/\mathfrak{m}^k$, dont l'intersection des noyaux \mathfrak{m}^k est réduite à 0 ; cette famille n'est toutefois pas séparable, car les fibres de tous les \mathfrak{m}^k au point générique x de $X = \text{Spec}(A)$ (qui est ouvert dans X) sont égales à $\mathcal{O}_x = \mathfrak{k}(x)$, corps des fractions de A , et leur intersection n'est donc pas réduite à 0 .

(II.9.5) Nous allons principalement nous occuper dans ce qui suit du problème du *changement de base* pour les familles séparantes. Les notations étant celles de (II.9.1), considérons un morphisme $g : X' \rightarrow X$ et posons $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X'} = g^*(\mathcal{F})$, et, pour tout λ , $Z'_\lambda = Z_\lambda \times_X X'$, $f'_\lambda = f_\lambda \times 1$, $\mathcal{G}'_\lambda = \mathcal{G}_\lambda \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X'} = g'^*(\mathcal{G}_\lambda)$, où $g'_\lambda : Z'_\lambda \rightarrow Z_\lambda$ est la projection canonique. Pour tout λ , on désigne alors par $u'_\lambda : \mathcal{F}' \rightarrow (f'_\lambda)_*(\mathcal{G}'_\lambda)$ l'homomorphisme obtenu comme suit : soit

$$\psi : (f_\lambda)_*(\mathcal{G}_\lambda) \rightarrow (f_\lambda)_*((g'_\lambda)_*((g'_\lambda)^*(\mathcal{G}_\lambda))) = g_*((f'_\lambda)_*(\mathcal{G}'_\lambda))$$

l'homomorphisme $(f_\lambda)_*(\rho_{\mathcal{G}_\lambda})$, où $\rho_{\mathcal{G}_\lambda}$ est l'homomorphisme canonique (0I, 4.4.3.2) correspondant à g'_λ . Alors u'_λ est défini comme le composé

$$g^*(\mathcal{F}) \xrightarrow{g^*(u_\lambda)} g^*((f_\lambda)_*(\mathcal{G}_\lambda)) \xrightarrow{g^*(\psi)} g^*(g_*((f'_\lambda)_*(\mathcal{G}'_\lambda))) \xrightarrow{\sigma} (f'_\lambda)_*(\mathcal{G}'_\lambda)$$

où $\sigma = \sigma_{(f'_\lambda)_*(\mathcal{G}'_\lambda)}$ est l'homomorphisme canonique (0I, 4.4.3.3) correspondant à g . On dira pour abrégé que u'_λ est *déduit de u_λ par le changement de base g* . Lorsque $f_\lambda : Z_\lambda \rightarrow X$ est un morphisme *affine*, on a $(f'_\lambda)_*(\mathcal{G}'_\lambda) = g^*((f_\lambda)_*(\mathcal{G}_\lambda))$, et dans ce cas on a donc simplement $u'_\lambda = g^*(u_\lambda)$.

On peut aussi interpréter u'_λ de la façon suivante : il suffit de connaître la valeur de $u'_\lambda(t')$, lorsque t' est une section de \mathcal{F}' au-dessus d'un ouvert U' de X' , du type particulier suivant : t' est la restriction à U' de l'image canonique par $\Gamma(U, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(g^{-1}(U), \mathcal{F}')$ d'une section t de \mathcal{F} au-dessus d'un ouvert U de X contenant $g(U')$ (ces sections engendrant en effet le $\mathcal{O}_{X'}$ -Module \mathcal{F}' (0I, 3.7.1)). Considérons la section $u_\lambda(t)$ de \mathcal{G}_λ au-dessus de $f_\lambda^{-1}(U)$, et son image canonique t'' par $\Gamma(f_\lambda^{-1}(U), \mathcal{G}_\lambda) \rightarrow \Gamma(g'^{-1}(f_\lambda^{-1}(U)), \mathcal{G}'_\lambda)$; alors $u'_\lambda(t')$ est la restriction de t'' à $f'_\lambda^{-1}(U')$. Considérons en particulier le cas où Z_λ est un sous-préschéma induit sur un ouvert de X , $\mathcal{G}_\lambda = j_\lambda^*(\mathcal{F})$, où $j_\lambda : Z_\lambda \rightarrow X$ est l'injection canonique, et où u_λ est l'homomorphisme canonique $\rho_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \rightarrow (j_\lambda)_*(j_\lambda^*(\mathcal{F})) = (j_\lambda)_*(\mathcal{G}_\lambda)$ (0I, 4.4.3.2) correspondant à j_λ . Alors Z'_λ est induit sur un ouvert de X' , et l'interprétation précédente montre que u'_λ n'est autre que l'homomorphisme canonique $\rho_{\mathcal{F}'} : \mathcal{F}' \rightarrow (j'_\lambda)_*(j'^*_\lambda(\mathcal{F}')) = (j'_\lambda)_*(\mathcal{G}'_\lambda)$ correspondant à l'injection canonique $j'_\lambda : Z'_\lambda \rightarrow X'$.

(II.9.6) Sous les conditions de (II.9.5), supposons que X et X' soient affines, et que l'on veuille prouver que pour toute section t' de \mathcal{F}' au-dessus de X' , dont les images par tous les u'_λ sont nulles, alors t' est elle-même nulle. Alors, on peut aussi se borner au cas où $Z_\lambda = X$ pour tout $\lambda \in L$. En effet, avec les notations de (II.9.3) et de (II.9.5), si l'on pose $Y'_{\lambda\mu} = g'^{-1}(Y_{\lambda\mu})$, l'homomorphisme $v'_{\lambda\mu}$ déduit de $v_{\lambda\mu}$ par le changement de base g n'est autre que l'homomorphisme canonique

$\rho_{\mathcal{G}'_\lambda} : \mathcal{G}'_\lambda \rightarrow (j'_{\lambda\mu})_*(j'^*_{\lambda\mu}(\mathcal{G}'_\lambda))$ correspondant à l'injection canonique $j'_{\lambda\mu} : Y'_{\lambda\mu} \rightarrow Z'_\lambda$, comme on l'a vu dans (II.9.5). L'assertion résulte alors des raisonnements de (II.9.2) et (II.9.3), $Y_{\lambda\mu}$ et $v_{\lambda\mu}$ étant remplacés par $Y'_{\lambda\mu}$ et $v'_{\lambda\mu}$.

On a une réduction semblable lorsque l'on veut prouver que la famille (u'_λ) est *séparante* (X et X' étant affines) : cela résulte encore de (II.9.2) et (II.9.3).

Proposition (II.9.7). — *Avec les notations de (II.9.1) et (II.9.5), supposons $X = \text{Spec}(A)$ et $X' = \text{Spec}(A')$ affines, et supposons en outre que A' soit un A -module projectif. Alors, si la famille (u_λ) est *séparante*, toute section t' de \mathcal{F}' au-dessus de X' dont les images par tous les u'_λ sont nulles, est elle-même nulle.*

On a vu (II.9.6) qu'on peut se borner au cas où tous les Z_λ sont égaux à X . La proposition est alors conséquence du lemme suivant :

Lemme (II.9.7.1). — *Soient A un anneau, $(M_\lambda)_{\lambda \in L}$ une famille de A -modules, M un A -module et pour chaque λ , $u_\lambda : M \rightarrow M_\lambda$ un homomorphisme. Supposons que l'intersection des noyaux des u_λ soit réduite à 0. Alors, pour tout A -module projectif N , l'intersection des noyaux des homomorphismes $u_\lambda \otimes 1 : M \otimes_A N \rightarrow M_\lambda \otimes_A N$ est réduite à 0.*

En effet, N est facteur direct d'un A -module libre L , et il suffit évidemment de prouver que l'intersection des noyaux des homomorphismes $v_\lambda : M \otimes_A L \rightarrow M_\lambda \otimes_A L$ est réduite à 0, puisque $u_\lambda \otimes 1 : M \otimes_A N \rightarrow M_\lambda \otimes_A N$ est la restriction de v_λ . Mais l'assertion résulte alors trivialement de l'hypothèse.

Remarque (II.9.8). — Nous ignorons si, sous les hypothèses de la proposition (II.9.7), la famille (u'_λ) est *séparante* : il faudrait en effet (II.9.4) prouver qu'une section t' de \mathcal{F}' au-dessus d'un ouvert $D(h') \subset X'$ (où $h' \in A'$) telle que les $u'_\lambda(t')$ soient toutes nulles, est elle-même nulle. Or, on ne peut appliquer la proposition (II.9.4) à $D(h') = \text{Spec}(A'_h')$, car du fait que A' soit un A -module projectif (même libre), il ne résulte pas que A'_h' soit un A -module projectif. Par exemple, on peut prendre pour A un anneau de valuation discrète, pour A' un anneau de valuation discrète qui soit un A -module libre de rang 2, et pour A'_h' le corps des fractions de A' .

On a toutefois le résultat suivant :

Corollaire (II.9.9). — *Soient X un préschéma artinien, $g : X' \rightarrow X$ un morphisme plat (on notera que ces deux conditions sont satisfaites si X est le spectre d'un corps et g un morphisme quelconque). Alors, avec les notations de (II.9.1) et (II.9.5), si la famille (u_λ) est *séparante*, il en est de même de la famille (u'_λ) .*

On peut évidemment se borner au cas où $X = \text{Spec}(A)$ est le spectre d'un anneau local artinien A (I, 6.2.2); on note ensuite que pour tout ouvert affine $U' = \text{Spec}(A')$ de X' , A' est un A -module plat, donc *projectif* (0_{III}, 10.1.3). Il suffit donc d'appliquer (II.9.7) à tout ouvert affine de X' pour obtenir le corollaire.

Théorème (II.9.10). — *Soient X un préschéma, (u_λ) une famille d'homomorphismes (II.9.1.1), $g : X' \rightarrow X$ un morphisme, (u'_λ) la famille d'homomorphismes déduite de (u_λ) par le changement de base g (II.9.5).*

(i) *Si g est un morphisme fidèlement plat et si la famille (u'_λ) est *séparante*, alors la famille (u_λ) est *séparante*.*

(ii) *Supposons que g soit un morphisme plat, et en outre que l'une des deux conditions suivantes soit vérifiée :*

- a) *L est fini et les f_λ sont quasi-compacts.*
- b) *Le morphisme g est localement de présentation finie.*

Alors, si la famille (u_λ) est séparable, il en est de même de la famille (u'_λ) .

(i) En vertu de (2.2.8), il suffit de montrer que si une section t de \mathcal{F} au-dessus d'un ouvert U de X appartient au noyau de chacun des u_λ , son image t' par l'homomorphisme canonique $\Gamma(\rho) : \Gamma(U, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(g^{-1}(U), g^*(\mathcal{F})) = \Gamma(U, g_*(g^*(\mathcal{F})))$ est nulle. Or les images de t' par les $g^*(u_\lambda)$ sont les images des $u_\lambda(t)$ par l'homomorphisme $\Gamma(U, (f_\lambda)_*(\mathcal{G}_\lambda)) \rightarrow \Gamma(g^{-1}(U), g^*((f_\lambda)_*(\mathcal{G}_\lambda)))$, donc sont nulles, et *a fortiori* on a $u'_\lambda(t') = 0$ pour tout λ , donc $t' = 0$ par hypothèse, ce qui prouve (i).

(ii) La question étant locale sur X et X' , on peut se borner au cas où $X = \text{Spec}(A)$ et $X' = \text{Spec}(A')$ sont affines, A' étant un A -module *plat*, et à prouver que, pour toute section z' de \mathcal{F}' au-dessus de X' dont les images par tous les u'_λ sont nulles, alors z' est elle-même nulle. On a vu en outre (11.9.6) que l'on peut alors supposer que $Z_\lambda = X$ pour tout λ .

Distinguons maintenant les deux cas.

a) Si L est fini et les f_λ quasi-compacts, on a vu (11.9.3) qu'on peut encore se ramener au cas où $Z_\lambda = X$ pour tout $\lambda \in L$, et où en outre L est *fini*. Il revient au même alors de dire que l'intersection des noyaux des $u_\lambda : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}_\lambda$ est nulle, ou que l'homomorphisme $u = (u_\lambda) : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} = \bigoplus_\lambda \mathcal{G}_\lambda$ est injectif. Comme $u' = g^*(u)$ est injectif puisque g est plat, la proposition est démontrée dans ce cas.

b) Soient $\mathcal{F} = \tilde{M}$, $\mathcal{G}_\lambda = \tilde{N}_\lambda$, et posons $M' = M \otimes_A A'$, $N'_\lambda = N_\lambda \otimes_A A'$, de sorte que $\mathcal{F}' = \tilde{M}'$, $\mathcal{G}'_\lambda = \tilde{N}'_\lambda$; par abus de langage, nous noterons encore u_λ l'homomorphisme $M \rightarrow N_\lambda$, et u'_λ l'homomorphisme $u_\lambda \otimes 1 : M' \rightarrow N'_\lambda$. Donnons-nous un élément $z' \in M'$ tel que $u'_\lambda(z') = 0$ pour tout λ ; il s'agit de prouver que l'on a $z' = 0$. Or, l'hypothèse que g est plat et de présentation finie entraîne, d'après (11.3.15), qu'il existe une suite finie $(s_i)_{1 \leq i \leq n}$ d'éléments de A , telle que, si l'on pose $\mathfrak{J}_i = s_1 A + \dots + s_i A$, et $A_i = A_{s_i} / \mathfrak{J}_{i-1} A_{s_i}$, l'anneau $A'_i = A' \otimes_A A_i$ soit un A_i -module *libre* pour $1 \leq i \leq n$, et $\mathfrak{J}_n = A$. La proposition sera établie si nous prouvons pour $1 \leq i \leq n$ l'assertion suivante :

(*_i) *Il existe un entier $m_i > 0$ tel que $s_i^{m_i} z' = 0$ pour $j \leq i$.*

En effet, posant alors $k = m_n$ et notant que les s_i^k ($1 \leq i \leq n$) engendrent aussi l'idéal unité de A , l'assertion (*_n) montrera que z' , combinaison linéaire des $s_i^k z'$, est nul.

Prouvons (*_i) par récurrence sur i , l'assertion étant vide pour $i = 0$. Supposons donc $i > 0$ et soit m un multiple commun des m_j pour $j \leq i - 1$. Remarquons que (pour $1 \leq h \leq n$) si \mathfrak{J}'_h est l'idéal engendré par les s_j^m ($0 \leq j \leq h$), $\mathfrak{J}_h / \mathfrak{J}'_h$ est nilpotent; remplacer les s_j par s_j^m pour $1 \leq j \leq n$ revient donc à remplacer, pour $1 \leq h \leq n$, A_h par $A_{s_h} / \mathfrak{J}'_{h-1} A_{s_h} = B_h$, de sorte que $A_h = B_h / (\mathfrak{J}'_{h-1} / \mathfrak{J}'_{h-1}) B_h$; comme A' est un A -module plat, il résulte de (0_{III}, 10.1.2) que $B'_h = A' \otimes_A B_h$ est encore un B_h -module libre. On peut donc

remplacer tous les s_j ($1 \leq j \leq n$) par s_j^m sans changer les propriétés des \mathfrak{J}_h et des A'_h , et supposer par la suite que $m=1$. Alors z' , étant annulé par \mathfrak{J}_{i-1} , s'identifie à un élément de $\text{Hom}_{A'}(A'/\mathfrak{J}_{i-1}A', M')$, et comme $\mathfrak{J}_{i-1}A'$ est un idéal de type fini de A' , ce module d'homomorphismes s'identifie lui-même à $\text{Hom}_A(A/\mathfrak{J}_{i-1}, M) \otimes_{A'} A'$ ($0_I, 6.2.2$). Soit $v_\lambda = \text{Hom}(1, u_\lambda) : \text{Hom}_A(A/\mathfrak{J}_{i-1}, M) \rightarrow \text{Hom}_A(A/\mathfrak{J}_{i-1}, N_\lambda)$ l'homomorphisme déduit de u_λ ; la famille (v_λ) est elle aussi *séparante*. En effet, pour tout $t \in A$, on a $(\text{Hom}_A(A/\mathfrak{J}_{i-1}, M))_t = \text{Hom}_{A_t}(A_t/(\mathfrak{J}_{i-1})_t, M_t)$ et de même en remplaçant M par N_λ , puisque l'idéal \mathfrak{J}_{i-1} est de type fini ($0_I, 1.3.5$); comme par hypothèse l'intersection des noyaux des $(u_\lambda)_t$ est nulle, il en est de même de l'intersection des noyaux des $(v_\lambda)_t = \text{Hom}(1, (u_\lambda)_t)$, d'où notre assertion ($11.9.4$). Remplaçant A par A/\mathfrak{J}_{i-1} , M par $\text{Hom}_A(A/\mathfrak{J}_{i-1}, M)$, N_λ par $\text{Hom}_A(A/\mathfrak{J}_{i-1}, N_\lambda)$ (qui sont des (A/\mathfrak{J}_{i-1}) -modules), u_λ par v_λ et enfin A' par $A'/\mathfrak{J}_{i-1}A'$, on voit qu'on peut se ramener au cas où, dans la situation initiale, l'élément $s = s_i \in A$ est tel que A'_s soit un A_s -module *libre*. Or la famille des $(u_\lambda)_s : M_s \rightarrow (N_\lambda)_s$ est *séparante* par hypothèse; comme on a $(u'_\lambda)_s(z'/1) = 0$, il résulte de ($11.9.7$) que l'on a $z'/1 = 0$ dans M'_s ; mais cela signifie qu'il existe un entier r tel que $s^r z' = 0$ dans M' , ce qui achève de prouver $(*)_i$ par récurrence.

Remarque (11.9.11). — Bornons-nous pour simplifier au cas où $Z_\lambda = X$ pour tout λ . Il faut noter alors que si la famille des homomorphismes $u_\lambda : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}_\lambda$ est *séparante*, il ne s'ensuit pas nécessairement que, pour tout $x \in X$, l'intersection des noyaux des homomorphismes $(u_\lambda)_x : \mathcal{F}_x \rightarrow (\mathcal{G}_\lambda)_x$ soit réduite à 0. Par exemple, soient X un préschéma de Jacobson localement noethérien, de dimension ≥ 1 , et \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -Module cohérent; pour tout point fermé x de X , et tout entier $n \geq 0$, $\mathfrak{m}_x^n \mathcal{F}$ est un \mathcal{O}_X -Module cohérent de support contenu dans $\{x\}$. La famille des homomorphismes canoniques $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}/\mathfrak{m}_x^n \mathcal{F}$ (où x parcourt l'ensemble X_0 des points fermés de X et n l'ensemble des entiers ≥ 0) est *séparante* : en effet, si t est une section de \mathcal{F} au-dessus d'un ouvert U de X dont les images dans les $\Gamma(U, \mathcal{F}/\mathfrak{m}_x^n \mathcal{F})$ sont toutes nulles, il en résulte aussitôt que pour tout point fermé $x \in U$, on a $t_x = 0$; comme l'ensemble des points fermés contenus dans U est très dense dans U , cela entraîne bien $t = 0$ ($10.2.1$). Cependant, si l'on prend $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$, et si $y \in X$ est un point *non fermé* de X , on a $(\mathcal{O}_X/\mathfrak{m}_x^n \mathcal{O}_X)_y = 0$ pour tout point fermé x de X , mais $\mathcal{O}_{X,y} \neq 0$, et l'intersection des noyaux des homomorphismes $\mathcal{O}_{X,y} \rightarrow (\mathcal{O}_X/\mathfrak{m}_x^n \mathcal{O}_X)_y$ est égale à $\mathcal{O}_{X,y}$.

Lemme (11.9.12). — Les notations étant celles de ($11.9.1$) et ($11.9.5$), supposons la famille (u_λ) *séparante*; supposons en outre que X soit un S -préschéma, où $S = \text{Spec}(A)$ est un schéma affine, et que $X' = X \times_S S'$, où $S' = \text{Spec}(A')$, A' étant une A -algèbre; supposons enfin que les \mathcal{G}_λ soient S -plats. Soit $(A'_\alpha)_{\alpha \in I}$ la famille filtrante des sous- A -algèbres de type fini de A' ; pour tout $\alpha \in I$, posons $S''_\alpha = \text{Spec}(A'_\alpha)$, $X''_\alpha = X \times_S S''_\alpha$, $Z''_{\alpha\lambda} = Z_\lambda \times_X X''_\alpha$, et soient $f''_{\alpha\lambda} : Z''_{\alpha\lambda} \rightarrow X''_\alpha$, \mathcal{F}''_α , $\mathcal{G}''_{\alpha\lambda}$ et $u''_{\alpha\lambda}$ les morphismes, Modules et homomorphismes de Modules déduits de f_λ , \mathcal{F} , \mathcal{G}_λ et u_λ au moyen du changement de base $X''_\alpha \rightarrow X$. Alors, si, pour tout $\alpha \in I$, la famille $(u''_{\alpha\lambda})_{\lambda \in L}$ est *séparante*, il en est de même de $(u'_\lambda)_{\lambda \in L}$.

Il s'agit de prouver que si une section t' de \mathcal{F}' au-dessus d'un ouvert affine U' de X' est telle que $u'_\lambda(t') = 0$ pour tout $\lambda \in L$, on a $t' = 0$. Si $h_\alpha : X' \rightarrow X''_\alpha$ est la projec-

tion canonique, il résulte de (8.2.11) qu'il existe un indice α et un ouvert quasi-compact $U''_\alpha \subset X''_\alpha$ tels que $U' = h_\alpha^{-1}(U''_\alpha)$; en outre, en vertu de (8.5.2, (i)), on peut supposer qu'il y a une section t''_α de \mathcal{F}''_α au-dessus de U''_α telle que t' soit l'image canonique de t''_α . Quitte à remplacer $S, X, Z_\lambda, f_\lambda, \mathcal{F}, \mathcal{G}_\lambda$ et u_λ par $S''_\alpha, U''_\alpha, f''_{\alpha\lambda}{}^{-1}(U''_\alpha)$ et les restrictions correspondantes de $\mathcal{F}''_\alpha, \mathcal{G}''_{\alpha\lambda}$ et $u''_{\alpha\lambda}$, on peut donc supposer que $U' = X'$, que t' est l'image canonique d'une section t de \mathcal{F} au-dessus de X et que l'homomorphisme $A \rightarrow A'$ est injectif, ou encore, si $p : S' \rightarrow S$ est le morphisme correspondant, que l'homomorphisme $\mathcal{O}_S \rightarrow p_*(\mathcal{O}_{S'})$ intervenant dans la définition de p est *injectif*. Il en résulte aussitôt en vertu de la platitude de \mathcal{G}_λ sur S (et en se ramenant par exemple au cas où Z_λ est affine sur S (I, 1.6.3 et 1.6.5)) que l'homomorphisme canonique $\rho : \mathcal{G}_\lambda \rightarrow (g'_\lambda)_*(\mathcal{G}'_\lambda)$ est lui aussi *injectif*. Mais l'homomorphisme composé

$$\Gamma(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\Gamma(u_\lambda)} \Gamma(Z_\lambda, \mathcal{G}_\lambda) \xrightarrow{\Gamma(\rho)} \Gamma(Z'_\lambda, \mathcal{G}'_\lambda)$$

est égal par définition à l'homomorphisme composé

$$\Gamma(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\Gamma(\rho)} \Gamma(X', \mathcal{F}') \xrightarrow{\Gamma(u'_\lambda)} \Gamma(Z'_\lambda, \mathcal{G}'_\lambda)$$

donc l'image de t par ces homomorphismes composés est $u'_\lambda(t') = 0$; en vertu de l'injectivité de l'homomorphisme $\Gamma(Z_\lambda, \mathcal{G}_\lambda) \xrightarrow{\Gamma(\rho)} \Gamma(Z'_\lambda, \mathcal{G}'_\lambda)$ on en conclut que $u_\lambda(t) = 0$ pour tout $\lambda \in L$, d'où $t = 0$ par hypothèse, et finalement $t' = 0$.

Proposition (II.9.13). — *Les notations étant celles de (II.9.1) et (II.9.5), supposons que X soit un préschéma sur un corps k , et que, en posant $S = \text{Spec}(k)$, on ait $X' = X \times_S S'$, où S' est un k -préschéma quelconque. Alors, si la famille $(u_\lambda)_{\lambda \in L}$ est séparable, il en est de même de (u'_λ) .*

On peut se borner au cas où $S' = \text{Spec}(A')$ est affine. Si A' est une k -algèbre de type fini, le morphisme $g : X' \rightarrow X$ est plat et de présentation finie, et on est donc dans les conditions d'application de (II.9.10, (ii), *b*). Dans le cas général, on considère A' comme limite inductive de ses k -sous-algèbres A'_α de type fini, et on applique à chaque A'_α le résultat de (II.9.10, (ii), *b*); on conclut alors à l'aide du lemme (II.9.12), puisque les \mathcal{G}_λ sont S -plats.

(II.9.14) Gardons toujours les notations de (II.9.1) et (II.9.5) et supposons que X soit un S -préschéma. Si pour tout changement de base $g : X \times_S S' \rightarrow X$, où $S' \rightarrow S$ est un morphisme *quelconque*, la famille (u'_λ) correspondante est séparable, nous dirons que la famille (u_λ) est *universellement séparable relativement à S* . Lorsque la famille (u_λ) est réduite à un seul élément u , nous dirons encore que u est *universellement injectif*, relativement à S . Il est clair alors que pour tout morphisme $h : S' \rightarrow S$, la famille (u'_λ) correspondante est universellement séparable relativement à S' ; inversement, si h est *fidèlement plat* et si (u'_λ) est universellement séparable relativement à S' , alors (u_λ) est universellement séparable relativement à S , comme il résulte aussitôt de (II.9.10, (i)) et du fait que pour tout morphisme $S'' \rightarrow S$, le morphisme correspondant $S'' \times_S S' \rightarrow S''$ est fidèlement plat.

Proposition (II.9.15). — *Les notations étant celles de (II.9.1), supposons que X soit un S-préschéma, les \mathcal{G}_λ étant S-plats. Soit S_0 un sous-préschéma fermé de S défini par un idéal quasi-cohérent nilpotent \mathcal{I} de \mathcal{O}_S , tel que les $(\mathcal{O}_S/\mathcal{I})$ -Modules $\mathcal{I}^k/\mathcal{I}^{k+1}$ soient tous localement libres. Soit $(u_{\lambda 0})$ la famille d'homomorphismes obtenue à partir du changement de base $X \leftarrow X_0 = X \times_S S_0$. Alors, si la famille $(u_{\lambda 0})$ est séparable (resp. universellement séparable relativement à S_0), la famille (u_λ) est séparable (resp. universellement séparable relativement à S).*

Notons que si $S' \rightarrow S$ est un changement de base quelconque et $S'_0 = S' \times_S S_0$, S'_0 est un sous-préschéma fermé de S' défini par un idéal quasi-cohérent nilpotent \mathcal{I}' de $\mathcal{O}_{S'}$, tel que $\mathcal{I}'^k/\mathcal{I}'^{k+1}$ soit un $(\mathcal{O}_{S'}/\mathcal{I}')$ -Module localement libre pour tout k (2.1.8, (i)); comme en outre les $\mathcal{G}'_\lambda = \mathcal{G}_\lambda \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S'}$ sont S' -plats, on voit que l'assertion relative aux familles universellement séparantes est conséquence de l'assertion relative aux familles séparantes. Pour prouver cette dernière, on peut (II.9.3) se ramener au cas où $S = \text{Spec}(A)$, $X = \text{Spec}(B)$ sont affines, $Z_\lambda = X$ pour tout λ , $\mathcal{F} = \tilde{M}$, $\mathcal{G}_\lambda = \tilde{N}_\lambda$, où M et les N_λ sont des B -modules, les N_λ étant des A -modules plats. En outre, la question étant locale sur X et S , il suffit de voir que si $t \in M$ est tel que $u_\lambda(t) = 0$ pour tout λ , alors $t = 0$. On a $\mathcal{I} = \tilde{\mathfrak{J}}$, où \mathfrak{J} est un idéal nilpotent de A , tel que les $\mathfrak{J}^k/\mathfrak{J}^{k+1}$ soient des (A/\mathfrak{J}) -modules libres, et par hypothèse les $u_{\lambda 0} : M/\mathfrak{J}M \rightarrow N_\lambda/\mathfrak{J}N_\lambda$ forment une famille séparable. Supposons que $\mathfrak{J}^{n+1} = 0$ (n entier ≥ 0) et raisonnons par récurrence sur n , l'assertion étant triviale pour $n = 0$. Si \bar{t} est la classe de t dans $M/\mathfrak{J}^n M$, la classe de $u_\lambda(t)$ dans $N_\lambda/\mathfrak{J}^n N_\lambda$ est nulle pour tout λ , donc, par l'hypothèse de récurrence, $\bar{t} = 0$, autrement dit on a $t \in \mathfrak{J}^n M$. Or $\mathfrak{J}^n = \mathfrak{J}^n/\mathfrak{J}^{n+1}$ est un (A/\mathfrak{J}) -module libre; si (e_α) est une base de ce module, on peut donc écrire $t = \sum_\alpha e_\alpha t_\alpha^0$, avec $t_\alpha^0 \in A/\mathfrak{J}$, nul sauf pour un nombre fini d'indices. D'autre part, puisque N_λ est un A -module plat, $\mathfrak{J}^n N_\lambda$ s'identifie à $\mathfrak{J}^n \otimes_{(A/\mathfrak{J})} (N_\lambda/\mathfrak{J}N_\lambda)$ et l'on peut par suite écrire $u_\lambda(t) = \sum_\alpha e_\alpha u_{\lambda 0}(t_\alpha^0) = \sum_\alpha e_\alpha \otimes u_{\lambda 0}(t_\alpha^0)$. Comme par hypothèse $u_\lambda(t) = 0$, on en déduit que $u_{\lambda 0}(t_\alpha^0) = 0$ pour tout α et tout λ ; d'où $t_\alpha^0 = 0$ pour tout α puisque la famille $(u_{\lambda 0})$ est séparable, et par suite $t = 0$. C.Q.F.D.

Théorème (II.9.16). — *Les notations étant celles de (II.9.1), supposons que X soit un S-préschéma localement noethérien, \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -Module cohérent et que les \mathcal{G}_λ soient S-plats. Pour tout $s \in S$, soit $((u_\lambda)_s)_{\lambda \in L}$ la famille obtenue à partir de (u_λ) par le changement de base $X_s = X \times_S \text{Spec}(\mathbf{k}(s)) \rightarrow X$. Alors, pour que la famille (u_λ) soit universellement séparable relativement à S, il faut et il suffit que pour tout $s \in S$, la famille $((u_\lambda)_s)$ soit séparable.*

La nécessité de la condition découle trivialement des définitions. Inversement, supposons la condition de l'énoncé vérifiée, et prouvons d'abord que la famille (u_λ) est séparable. On peut (II.9.3) se réduire au cas où $S = \text{Spec}(A)$, $X = \text{Spec}(B)$ sont affines, $Z_\lambda = X$ pour tout λ , $\mathcal{F} = \tilde{M}$, $\mathcal{G}_\lambda = \tilde{N}_\lambda$, où B est noethérien, M est un B -module de type fini et les N_λ des A -modules plats et se borner à prouver que, si $t \in M$ est tel que $u_\lambda(t) = 0$ pour tout λ , alors $t = 0$. Pour montrer que $t = 0$, il suffit de prouver que pour tout idéal maximal \mathfrak{p} de B , l'image $t_{\mathfrak{p}}$ de t dans $M_{\mathfrak{p}}$ est nulle (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 3, n° 3, cor. 1 du th. 1). On peut donc se borner à montrer que l'intersection

des noyaux des $(u_\lambda)_p : M_p \rightarrow (N_\lambda)_p$ déduits des (u_λ) par le changement de base $\text{Spec}(B_p) \rightarrow \text{Spec}(B)$ est réduite à 0. Autrement dit, on est ramené au cas où B est un anneau local noethérien, et en considérant l'idéal premier de A image réciproque de l'idéal maximal de B , on peut aussi supposer que A est un anneau local, d'idéal maximal \mathfrak{m} . Alors, comme $\mathfrak{m}B$ est contenu dans l'idéal maximal de B , et que M est un B -module de type fini, l'intersection des $\mathfrak{m}^n M$ est réduite à 0 ($0_1, 7.3.5$), donc il suffit de prouver que pour tout n , l'image de t dans $M/\mathfrak{m}^{n+1}M$ est nulle. Il suffit donc de prouver que la famille déduite de (u_λ) par le changement de base $\text{Spec}(B/\mathfrak{m}^{n+1}B) \rightarrow \text{Spec}(B)$ est séparante, ce qui signifie encore qu'on peut se borner au cas où A est un anneau local dont l'idéal maximal \mathfrak{m} est nilpotent. Mais alors les $\mathfrak{m}^k/\mathfrak{m}^{k+1}$ sont des (A/\mathfrak{m}) -modules libres, et en vertu de l'hypothèse sur les $(u_\lambda)_s$, on est précisément dans les conditions d'application de ($11.9.15$), d'où la conclusion annoncée.

Soient maintenant $h : S' \rightarrow S$ un morphisme changement de base, et (u'_λ) la famille obtenue à partir de (u_λ) par le changement de base $h' : X \times_S S' \rightarrow X$; prouvons que (u'_λ) est aussi séparante. Supposons d'abord que h soit *localement de type fini*; il en est alors de même de h' , donc $X' = X \times_S S'$ est localement noethérien; de plus, si $s' \in S'$ est au-dessus du point $s \in S$, il résulte de ($11.9.13$) appliqué à X_s et à $X'_s = X_s \otimes_{\mathfrak{k}(s)} \mathfrak{k}(s')$ que, pour tout $s' \in S'$, la famille $(u'_\lambda)_{s'}$ est séparante; on peut par suite conclure de la première partie de la démonstration que dans ce cas (u'_λ) est séparante.

Enfin, si h est quelconque, on peut évidemment se limiter au cas où $S = \text{Spec}(A)$ et $S' = \text{Spec}(A')$ sont affines, et considérer A' comme limite inductive de ses sous- A -algèbres de type fini. Comme les \mathcal{G}_λ sont S -plats, il suffit d'appliquer ce qui précède et le lemme ($11.9.5$) pour terminer la démonstration.

Proposition (11.9.17). — Soient $f : X \rightarrow S$ un morphisme localement de présentation finie, \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -Module quasi-cohérent de présentation finie et f -plat, U un ouvert de X , $j : U \rightarrow X$ l'injection canonique, $u : \mathcal{F} \rightarrow j_* (j^* (\mathcal{F}))$ l'homomorphisme canonique ($0_1, 4.4.3.2$). Pour tout $s \in S$, soient X_s la fibre $X \times_S \text{Spec}(\mathfrak{k}(s))$, U_s l'ouvert $U \cap X_s$ de X_s , $\mathcal{F}_s = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathfrak{k}(s)$, $j_s : U_s \rightarrow X_s$ l'injection canonique, $u_s : \mathcal{F}_s \rightarrow (j_s)_* ((j_s)^* (\mathcal{F}_s))$ l'homomorphisme canonique. Pour que u soit universellement injectif relativement à S , il faut et il suffit que u_s soit injectif pour tout $s \in S$.

Il n'y a encore à prouver que la suffisance de la condition. Lorsque X est localement noethérien, la proposition est un corollaire immédiat de ($11.9.16$). Nous allons nous ramener à ce cas en deux étapes, en nous bornant, comme on peut évidemment le faire, au cas où $S = \text{Spec}(A)$ et X sont affines.

A) Cas où U est quasi-compact. — Nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme (11.9.17.1). — Sous les hypothèses générales de ($11.9.17$), et en supposant en outre S et X affines et U quasi-compact, l'ensemble E des $s \in S$ tels que u_s soit injectif est constructible.

En effet, les fibres X_s sont des préschémas localement noethériens, donc E peut aussi, en vertu de ($5.10.2$), être défini comme l'ensemble des $s \in S$ tels que $\text{Ass}(\mathcal{F}_s) \subset U_s$. Notons en outre que U , étant quasi-compact dans un schéma affine, est constructible. Alors, la vérification de la condition ($9.2.1$, (i)) découle aussitôt de ($4.2.7$); d'autre

part, la vérification de (9.2.1, (ii)) se fait aisément en utilisant l'étude des cycles premiers associés au voisinage de la fibre générique (9.8.3), ainsi que (9.5.2) et (9.5.3).

Ce lemme étant établi, on peut, en vertu de (8.9.1) et (8.2.11), supposer qu'il existe un sous-anneau noethérien A_0 de A , un préschéma de type fini X_0 sur $S_0 = \text{Spec}(A_0)$, un ouvert U_0 de X_0 et un \mathcal{O}_{X_0} -Module cohérent \mathcal{F}_0 tels que $X = X_0 \times_{S_0} S$ et que, si $p_0 : X \rightarrow X_0$ est la projection canonique, on ait $U = p_0^{-1}(U_0)$ et $\mathcal{F} = p_0^*(\mathcal{F}_0)$. Soit (A_α) la famille filtrante des sous-anneaux de A qui sont des A_0 -algèbres de type fini, et posons $X_\alpha = X_0 \times_{S_0} S_\alpha$, $U_\alpha = U_0 \times_{S_0} S_\alpha$, $\mathcal{F}_\alpha = \mathcal{F}_0 \otimes_{S_0} S_\alpha$; soit u_α l'homomorphisme canonique relatif à \mathcal{F}_α et U_α , défini comme dans (11.9.17). Pour tout $s \in S$, l'hypothèse que u_s soit injectif entraîne que $(u_\alpha)_{s_\alpha}$ l'est aussi (11.9.10, (i)), où $s_\alpha = q_\alpha(s)$ est l'image de s par le morphisme $q_\alpha : S \rightarrow S_\alpha$. Si E_α est l'ensemble des $s_\alpha \in S_\alpha$ tels que $(u_\alpha)_{s_\alpha}$ soit injectif, on a donc $S = \bigcup_\alpha q_\alpha^{-1}(E_\alpha)$, et les E_α forment un système projectif d'ensembles. Mais le lemme (11.9.17.1) appliqué à u_α , montre que E_α est constructible dans S_α ; on déduit donc de (8.3.4) qu'il existe un indice α tel que $E_\alpha = S_\alpha$. Mais alors, comme X_α est noethérien, u_α est universellement injectif en vertu de (11.9.16), donc il en est de même de u .

B) *Cas général.* — L'ouvert U est réunion filtrante croissante d'ouverts quasi-compacts U_λ ; si $j_\lambda : U_\lambda \rightarrow X$ est l'injection canonique et $u_\lambda : \mathcal{F} \rightarrow (j_\lambda)_*((j_\lambda)^*(\mathcal{F}))$ l'homomorphisme correspondant, il résulte du lemme (11.9.17.1) que l'ensemble E_λ des $s \in S$ tels que $(u_\lambda)_s$ soit injectif est constructible. D'autre part, pour un $s \in S$, dire que u_s (resp. $(u_\lambda)_s$) est injectif signifie que $\text{Ass}(\mathcal{F}_s) \subset U \cap X_s$ (resp. $\text{Ass}(\mathcal{F}_s) \subset U_\lambda \cap X_s$) (5.10.2). Comme $\text{Ass}(\mathcal{F}_s)$ est fini (3.1.6), dire que u_s est injectif signifie donc qu'il existe λ tel que $s \in E_\lambda$; l'hypothèse signifie par suite que $S = \bigcup_\lambda E_\lambda$. En vertu de (1.9.9), il existe un indice λ tel que $S = E_\lambda$, d'où l'on conclut par la première partie du raisonnement que u_λ est universellement injectif. Il résulte alors de la factorisation de u_λ :

$$\mathcal{F} \xrightarrow{u} j_*(\mathcal{F}|U) \rightarrow (j_\lambda)_*(\mathcal{F}|U_\lambda)$$

que u est aussi universellement injectif.

Remarque (11.9.18). — Soient X un préschéma, \mathcal{F} , \mathcal{G} deux \mathcal{O}_X -Modules quasi-cohérents de présentation finie, \mathcal{G} étant en outre supposé *localement libre*, $u : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un homomorphisme. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) pour tout morphisme $g : X' \rightarrow X$, l'homomorphisme $g^*(u) : g^*(\mathcal{F}) \rightarrow g^*(\mathcal{G})$ est injectif;

b) pour tout $x \in X$, l'homomorphisme $u \otimes_{\mathbf{k}(x)} : \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_x} \mathbf{k}(x) \rightarrow \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_x} \mathbf{k}(x)$ est injectif;

c) pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert U de x tel que $u|U : \mathcal{F}|U \rightarrow \mathcal{G}|U$ soit un isomorphisme de $\mathcal{F}|U$ sur un facteur direct de $\mathcal{G}|U$.

En effet, il est clair que c) entraîne a) et que a) entraîne b). Le fait que b) entraîne c) résulte de (0, 19.1.12), (0_I, 5.2.5) et (0_I, 5.5.5).

Lorsque les conditions équivalentes précédentes sont vérifiées, on dit que u est *universellement injectif*.

II.10. Familles schématiquement dominantes de morphismes et familles schématiquement denses de sous-préschémas.

Proposition (II.10.1). — Soient X un préschéma, $(Z_\lambda)_{\lambda \in L}$ une famille de préschémas, et pour tout $\lambda \in L$, soit $f_\lambda = (\psi_\lambda, \theta_\lambda) : Z_\lambda \rightarrow X$ un morphisme. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) La famille des homomorphismes $\theta_\lambda : \mathcal{O}_X \rightarrow (f_\lambda)_*(\mathcal{O}_{Z_\lambda})$ est séparante (autrement dit (II.9.1), l'intersection des noyaux des θ_λ est nulle).

b) Pour tout ouvert U de X , toute section t de \mathcal{O}_X au-dessus de U dont toutes les images par les homomorphismes canoniques

$$(II.10.1.1) \quad (\theta_\lambda)_U : \Gamma(U, \mathcal{O}_X) \rightarrow \Gamma(f_\lambda^{-1}(U), \mathcal{O}_{Z_\lambda})$$

sont nulles, est elle-même nulle.

c) Pour tout ouvert U de X , et tout sous-préschéma fermé Y de U tel que pour tout $\lambda \in L$, il existe une factorisation

$$(II.10.1.2) \quad f_\lambda^{-1}(U) \xrightarrow{g_\lambda} Y \xrightarrow{j} U$$

de la restriction $f_\lambda^{-1}(U) \rightarrow U$ de f_λ (où j est l'injection canonique), on a $Y = U$.

Si de plus X est un S -préschéma, ces conditions sont aussi équivalentes à la suivante :

d) Pour tout morphisme séparé $g : X' \rightarrow S$ et tout couple de S -morphisms u, v d'un ouvert U de X dans X' , tel que pour tout λ , les composés de u et v avec le morphisme $f_\lambda^{-1}(U) \rightarrow U$, restriction de f_λ , soient égaux, on a $u = v$.

L'équivalence de a) et b) résulte des définitions. Pour voir que b) entraîne c), il suffit de considérer l'idéal quasi-cohérent \mathcal{J} de \mathcal{O}_U définissant Y , et de noter que, pour tout ouvert $V \subset U$, l'hypothèse entraîne que le morphisme $(\theta_\lambda)_V$ se factorise en

$$\Gamma(V, \mathcal{O}_U) \rightarrow \Gamma(V, \mathcal{O}_U/\mathcal{J}) \rightarrow \Gamma(f_\lambda^{-1}(V), \mathcal{O}_{Z_\lambda}).$$

On en conclut que toute section t de \mathcal{J} au-dessus de V a pour image 0 dans tous les $\Gamma(f_\lambda^{-1}(V), \mathcal{O}_{Z_\lambda})$, donc, en vertu de b), $\mathcal{J} = 0$ et $Y = U$. Inversement, si c) est vérifiée, il suffit, pour prouver b), d'appliquer c) au sous-préschéma fermé Y de U défini par l'idéal $t\mathcal{O}_U$: l'hypothèse que les images de t par les $(\theta_\lambda)_U$ sont toutes nulles entraîne que l'on a des factorisations (II.10.1.2) pour tout λ (I, 4.1.9). Pour prouver que c) entraîne d), il suffit d'appliquer c) au sous-préschéma fermé Y de U , image réciproque de la diagonale de $X' \times_S X'$ par $(u, v)_S$ et d'utiliser (I, 4.4.1). Inversement, on déduit b) de d) en considérant le S -schéma $X' = S[T] = S \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}[T]$ (T indéterminée) et en se rappelant que les sections de \mathcal{O}_U au-dessus de U correspondent biunivoquement aux S -morphisms $U \rightarrow S[T]$ (I, 3.3.15); dire que deux sections de \mathcal{O}_U au-dessus de U ont mêmes images par tous les $(\theta_\lambda)_U$ équivaut à dire que les composés des deux morphismes correspondants avec tous les morphismes $f_\lambda^{-1}(U) \rightarrow U$ sont égaux.

Définition (II.10.2). — Lorsque les conditions équivalentes de (II.10.1) sont vérifiées, on dit que la famille (f_λ) est schématiquement dominante. Lorsque les f_λ sont les immersions canoniques dans X d'une famille (Z_λ) de sous-préschémas de X , on dit aussi que la famille (Z_λ) est schématiquement dense.

Remarques (II.10.3). — (i) La notion de famille schématiquement dominante est locale sur X , comme il résulte par exemple de la forme *b*) dans (II.10.1) : si (W_α) est un recouvrement ouvert de X , la famille (f_λ) est schématiquement dominante si et seulement s'il en est ainsi de chacune des familles formée des morphismes $f_\lambda^{-1}(W_\alpha) \rightarrow W_\alpha$ restrictions des f_λ .

(ii) Si Z est le préschéma somme des Z_λ , $f : Z \rightarrow X$ le morphisme coïncidant avec f_λ dans chacun des Z_λ , il revient au même de dire que la famille (f_λ) est schématiquement dominante, ou que la famille réduite au seul élément f l'est.

(iii) Soit M un second ensemble d'indices et, pour tout $\lambda \in L$, soit $(g_{\lambda\mu})_{\mu \in M}$ une famille de morphismes $g_{\lambda\mu} : Z'_{\lambda\mu} \rightarrow Z_\lambda$; si, pour chaque $\lambda \in L$, la famille $(g_{\lambda\mu})_{\mu \in M}$ est schématiquement dominante, alors, il revient au même de dire que la famille $(f_\lambda)_{\lambda \in L}$ est schématiquement dominante, ou que la famille $(f_\lambda \circ g_{\lambda\mu})_{(\lambda, \mu) \in L \times M}$ l'est (II.9.2).

(iv) Soit $f : Z \rightarrow X$ un morphisme tel que $f_*(\mathcal{O}_Z)$ soit un \mathcal{O}_X -Module quasi-cohérent (par exemple un morphisme quasi-compact et quasi-séparé (I.7.4)). Alors, dire que f est schématiquement dominant signifie que l'image fermée de Z par f (I, 9.5.3) est identique à X .

Proposition (II.10.4). — Si la famille de morphismes $f_\lambda : Z_\lambda \rightarrow X$ est schématiquement dominante, la réunion des $f_\lambda(Z_\lambda)$ est dense dans X . Inversement, si cette réunion est dense dans X et si de plus X est réduit, la famille (f_λ) est schématiquement dominante.

La première assertion résulte aussitôt de (II.10.1, *b*)). D'autre part, si X est réduit, et si la réunion des $f_\lambda(Z_\lambda)$ est dense dans X , alors, si l'on a des factorisations (II.10.1.2) pour tout $\lambda \in L$, on a aussi des factorisations $(f_\lambda^{-1}(U))_{\text{red}} \xrightarrow{(g_\lambda)_{\text{red}}} Y_{\text{red}} \xrightarrow{f_{\text{red}}} U$, et l'hypothèse entraîne que l'espace sous-jacent à Y est identique à U , donc $Y = Y_{\text{red}} = U$ puisque U est réduit.

Les résultats du n° II.9 sur les familles séparantes se traduisent en résultats sur les familles schématiquement dominantes :

Théorème (II.10.5). — Soient (f_λ) une famille de morphismes $f_\lambda : Z_\lambda \rightarrow X$, $g : X' \rightarrow X$ un morphisme, et posons $Z'_\lambda = Z_\lambda \times_X X'$, $f'_\lambda = (f_\lambda)_{(X')} : Z'_\lambda \rightarrow X'$.

(i) Si g est fidèlement plat et si la famille (f'_λ) est schématiquement dominante, alors la famille (f_λ) est schématiquement dominante.

(ii) Supposons que g soit un morphisme plat et en outre que l'une des conditions suivantes soit vérifiée :

a) L est fini et les f_λ sont quasi-compacts.

b) Le morphisme g est localement de présentation finie.

Alors, si la famille (f_λ) est schématiquement dominante, il en est de même de la famille (f'_λ) .

Proposition (II.10.6). — *Les notations étant celles de (II.10.5), supposons que X soit un préschéma sur un corps k , et qu'en posant $S = \text{Spec}(k)$, on ait $X' = X \times_S S'$, où S' est un k -préschéma quelconque. Alors, si la famille (f_λ) est schématiquement dominante, il en est de même de (f'_λ) .*

Corollaire (II.10.7). — *Soient X un préschéma sur un corps k , $(Z_\lambda)_{\lambda \in L}$ une famille de k -préschémas géométriquement réduits sur k , et pour chaque $\lambda \in L$, soit $f_\lambda : Z_\lambda \rightarrow X$ un k -morphisme. Désignons par Y le sous-préschéma réduit de X ayant pour espace sous-jacent l'adhérence de $\bigcup_{\lambda \in L} f_\lambda(Z_\lambda)$. Soient k' une extension de k , $X', Z'_\lambda, f'_\lambda : Z'_\lambda \rightarrow X'$ les préschémas et morphismes déduits de X, Z_λ et f_λ par extension de la base à k' . Alors, si Y' est le sous-préschéma réduit de X' ayant pour espace sous-jacent l'adhérence de $\bigcup_{\lambda \in L} f'_\lambda(Z'_\lambda)$, on a $Y' = Y \otimes_k k'$. En particulier, Y est géométriquement réduit sur k .*

Comme les Z_λ sont réduits, les morphismes f_λ se factorisent en $f_\lambda : Z_\lambda \xrightarrow{g_\lambda} Y \xrightarrow{j} X$, où j est l'injection canonique (I, 5.2.2). Il résulte alors de (II.10.4) que (g_λ) est une famille schématiquement dominante. Posons $Y'_1 = Y \otimes_k k'$, sous-préschéma fermé de X' , et soit g'_λ le morphisme déduit de g_λ par extension de la base à k' , de sorte que f'_λ se factorise en $Z'_\lambda \xrightarrow{g'_\lambda} Y'_1 \xrightarrow{j'} X'$, où j' est l'injection canonique. Il résulte de (II.10.6) que la famille (g'_λ) est schématiquement dominante. Mais par hypothèse les Z'_λ sont réduits, donc (I, 5.2.2) les g'_λ se factorisent en $Z'_\lambda \xrightarrow{h'_\lambda} Y' \rightarrow Y'_1$; on conclut donc de (II.10.2) que $Y' = Y'_1$ et $h'_\lambda = g'_\lambda$, ce qui établit le corollaire.

Définition (II.10.8). — *Les notations étant celles de (II.10.5), supposons que X soit un S -préschéma. On dit que (f_λ) est universellement schématiquement dominante (relativement à S) si, pour tout changement de base $S' \rightarrow S$, la famille (f'_λ) correspondant au changement de base $X' = X \times_S S' \rightarrow X$, est schématiquement dominante.*

Lorsque S est le spectre d'un corps, la prop. (II.10.6) signifie donc qu'une famille schématiquement dominante est universellement schématiquement dominante (relativement à S).

Lorsque les f_λ sont des immersions canoniques $Z_\lambda \rightarrow X$, on dira aussi que la famille des sous-préschémas Z_λ est universellement schématiquement dense dans X (relativement à S) au lieu de dire que la famille (f_λ) est universellement schématiquement dominante (relativement à S).

Théorème (II.10.9). — *Les notations étant celles de (II.10.5), supposons que X soit un S -préschéma localement noethérien et que les Z_λ soient tous S -plats. Pour tout $s \in S$, soient $X_s = X \times_S \text{Spec}(\mathbf{k}(s))$, $(Z_\lambda)_s = Z_\lambda \times_S \text{Spec}(\mathbf{k}(s))$, $(f_\lambda)_s = f_\lambda \times_{\mathbf{1}} : (Z_\lambda)_s \rightarrow X_s$. Pour que la famille (f_λ) soit universellement schématiquement dominante relativement à S , il faut et il suffit que, pour tout $s \in S$, la famille $((f_\lambda)_s)$ soit schématiquement dominante.*

Proposition (II.10.10). — *Soient $f : X \rightarrow S$ un morphisme plat localement de présentation finie, U un ouvert de X . Pour que U soit universellement schématiquement dense dans X relativement à S , il faut et il suffit que, pour tout $s \in S$, $U_s = U \cap X_s$ soit schématiquement dense dans X_s (ou, ce qui revient au même, que l'on ait $\text{Ass}(\mathcal{O}_{X_s}) \subset U_s$).*

§ 12. ÉTUDE DES FIBRES DES MORPHISMES PLATS DE PRÉSENTATION FINIE

12.0. Introduction.

Nous utiliserons dans tout ce paragraphe les notations générales de (9.4.1).

(12.0.1) Étant donné un morphisme *localement de présentation finie* $f : X \rightarrow Y$, nous avons vu (9.9) que pour certaines propriétés *locales* P de préschémas sur des corps ou de Modules sur ces préschémas, l'ensemble E des $x \in X$ tels que la propriété P ait lieu, pour la *fibre* $X_{f(x)}$, au point x de cette fibre, est *localement constructible dans* X . Nous nous proposons de montrer que, pour la plupart de ces propriétés, si l'on suppose de plus que le morphisme f est *plat*, alors l'ensemble E est même *ouvert dans* X . De même ((9.2) à (9.8)) nous avons montré que si f est *de présentation finie*, et si cette fois P désigne certaines propriétés *globales* de préschémas sur des corps ou de Modules sur ces préschémas, l'ensemble F des $y \in Y$ tels que la propriété P ait lieu pour la fibre X_y est *localement constructible dans* Y . Nous montrerons que si l'on suppose de plus que le morphisme f est *propre* et *plat*, F est même *ouvert dans* Y .

(12.0.2) La méthode générale de démonstration des propriétés en question comporte trois étapes. On se ramène d'abord au cas où Y est *affine* et X de *présentation finie*; puis :

A) A l'aide de (8.9.1) (et éventuellement d'autres résultats du § 8) et de (11.2.6), on se ramène au cas où X et Y sont *noethériens*.

B) On applique les résultats du § 9 rappelés en (12.0.1) prouvant que E (resp. F) est *constructible*.

C) Pour voir que E est ouvert, il suffit, en vertu de (0_{III}, 9.2.5) de montrer que si $x \in E$, alors toute *générisation* x' de x appartient aussi à E . Utilisant (II, 7.1.7), on voit, puisque Y est *noethérien*, qu'il existe un spectre d'*anneau de valuation discrète* Y_1 et un morphisme $h : Y_1 \rightarrow X$ tel que, si y_1 (resp. y'_1) est le point fermé (resp. le point générique) de Y_1 , on ait $h(y_1) = x$, $h(y'_1) = x'$. On fait alors le changement de base $g = f \circ h : Y_1 \rightarrow Y$; compte tenu des résultats des §§ 4 et 6 sur les préschémas localement noethériens sur des corps et les changements du corps de base, on est ramené à prouver l'assertion en question pour un point x_1 de $X_1 = X \times_Y Y_1$ au-dessus de y_1 et pour une *générisation* x'_1 de x_1 au-dessus de y'_1 . Comme $Y_1 = \text{Spec}(A)$, où A est un anneau de valuation discrète, d'uniformisante t , on doit en définitive, pour un A -module M , prouver une propriété de M , sachant que M/tM a la même propriété et que t est *M -régulier* (ce qui résulte de l'hypothèse de *platitude*); on utilise pour cela les résultats de (3.4) et de (5.12). On procède de même pour l'ensemble $F \subset Y$.

12.1. Propriétés locales des fibres d'un morphisme plat localement de présentation finie.

Théorème (12.1.1). — Soient $f: X \rightarrow Y$ un morphisme localement de présentation finie, \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -Module f -plat et de présentation finie, Φ une partie finie de $\mathbf{Z} \cup \{\pm\infty\}$, k un entier. Les parties suivantes de X sont ouvertes :

- (i) L'ensemble des $x \in X$ tels que les dimensions des cycles premiers associés à $\mathcal{F}_{f(x)}$ et contenant x soient des éléments de Φ .
- (ii) L'ensemble des $x \in X$ tels que les cycles premiers associés à $\mathcal{F}_{f(x)}$ contenant x aient tous la dimension k .
- (iii) L'ensemble des $x \in X$ tels que x n'appartienne à aucun cycle premier immergé associé à $\mathcal{F}_{f(x)}$.
- (iv) L'ensemble des $x \in X$ tels que $\mathcal{F}_{f(x)}$ soit équidimensionnel au point x et possède la propriété (S_k) au point x (5.7.2).
- (v) L'ensemble des $x \in X$ tels que $\text{coprof}((\mathcal{F}_{f(x)})_x) \leq k$ (0, 16.4.9).
- (vi) L'ensemble des $x \in X$ tels que $\mathcal{F}_{f(x)}$ soit un $\mathcal{O}_{X_{f(x)}}$ -Module de Cohen-Macaulay au point x (5.7.1).
- (vii) L'ensemble des $x \in X$ tels que $\mathcal{F}_{f(x)}$ soit géométriquement réduit au point x (4.6.22).
- (viii) L'ensemble des $x \in X$ tels que $\mathcal{F}_{f(x)}$ soit géométriquement ponctuellement intègre au point x (4.6.22).

Les questions étant locales sur X , on se ramène d'abord au cas où $X = \text{Spec}(B)$ et $Y = \text{Spec}(A)$ sont affines, f un morphisme de présentation finie. Il y a alors un sous-anneau noethérien A_0 de A , un A_0 -préschéma de type fini X_0 , un \mathcal{O}_{X_0} -Module cohérent \mathcal{F}_0 tel que $\mathcal{F}_0 \otimes_{A_0} A$ soit isomorphe à \mathcal{F} (8.9.1); en outre, en vertu de (11.2.6), on peut supposer que \mathcal{F}_0 est Y_0 -plat (avec $Y_0 = \text{Spec}(A_0)$). Si $h: X \rightarrow X_0$ est la projection canonique, l'ensemble E des points $x \in X$ où l'une des propriétés (i) à (viii) est vérifiée est égal à $h^{-1}(E_0)$, où E_0 est l'ensemble des $x_0 \in X_0$ où la propriété correspondante pour \mathcal{F}_0 est vérifiée : cela résulte, pour les propriétés (i) à (iii), de (4.2.7); pour les propriétés (iv) à (vi), de (6.7.1); pour les propriétés (vii) et (viii), de (4.7.11).

On est ainsi ramené au cas où A et B sont noethériens, f de type fini, et $\mathcal{F} = \widetilde{M}$, où M est un B -module de type fini. En vertu de (9.9.2), on sait que l'ensemble E est *constructible* pour toutes les propriétés envisagées, et il reste dans chaque cas l'étape C) de (12.0.2), où l'on doit prouver que E est *stable par générisation*.

(12.1.1.1) Commençons par le cas (iii) qui est le plus simple. Soit $x' \neq x$ une générisation de x dans X . Posons $y = f(x)$, $y' = f(x')$; il existe un spectre d'anneau de valuation discrète Y_1 et un morphisme $u: Y_1 \rightarrow X$ tels que, si y_1 et y'_1 sont le point fermé et le point générique de Y_1 , on ait $u(y_1) = x$ et $u(y'_1) = x'$ (II, 7.1.7); posons $g = f \circ u: Y_1 \rightarrow Y$; si $X_1 = X \times_Y Y_1$, il existe une Y_1 -section $u_1: Y_1 \rightarrow X_1$ telle que $u = g_1 \circ u_1$, où $g_1: X_1 \rightarrow X$ est la projection canonique. Si $x_1 = u_1(y_1)$, $x'_1 = u_1(y'_1)$, on a donc $g_1(x_1) = x$ et $g_1(x'_1) = x'$, et x'_1 est une générisation de x_1 . Appliquant de nouveau (4.2.7), on voit

qu'on est ramené au cas où $Y = \text{Spec}(A)$ est le spectre d'un anneau de valuation discrète, y étant le point fermé et y' le point générique de Y . Si t est une uniformisante de A , l'hypothèse que \mathcal{F} est f -plat entraîne que t est \mathcal{F} -régulier ($0_1, 6.3.4$). Par hypothèse aucun des cycles premiers associés immergés de $\mathcal{F}/t\mathcal{F}$ ne contient x . Alors, il résulte de (3.4.4) que x n'appartient à aucun cycle premier immergé associé à \mathcal{F} , et il en est donc de même de toute généralisation de x . En particulier, x' n'appartient à aucun cycle premier immergé associé à \mathcal{F} , ni *a fortiori* à aucun de ceux associés à $\mathcal{F}_{y'}$ ($X_{y'}$ étant un sous-préschéma induit sur un ouvert de X).

(12.1.1.2) Envisageons ensuite les cas (iv) et (v) ((vi) n'est qu'un cas particulier de (v)). On procède comme ci-dessus (en utilisant (6.7.1) au lieu de (4.2.7)) et l'on est ramené au cas où Y est le spectre d'un anneau de valuation discrète A .

L'anneau $C = \mathcal{O}_{x,x}$ est alors localisé d'une A -algèbre de type fini, donc est caténaire (5.6.4), et par hypothèse le C -module M_x/tM_x vérifie (S_k) et est équidimensionnel (resp. on a $\text{coprof}(M_x/tM_x) \leq k$); on déduit donc de (5.12.2) (resp. de (0, 16.4.10)) que M_x vérifie (S_k) et est équidimensionnel (resp. que $\text{coprof}(M_x) \leq k$) puisque t est M_x -régulier et appartient à l'idéal maximal de C . D'où les conclusions puisque x' est une généralisation de x et que $(\mathcal{F}_{y'})_{x'} = \mathcal{F}_{x'}$.

(12.1.1.3) Passons aux cas (vii) et (viii). On peut évidemment remplacer Y par le sous-schéma intègre ayant $\overline{\{y'\}}$ pour espace sous-jacent, et X par $f^{-1}(\overline{\{y'\}})$, sans changer les fibres en y et y' , donc on peut supposer A intègre, de corps des fractions $K = k(y')$. On sait ((4.5.11) et (4.7.8)) qu'il existe une extension finie K' de K telle que, pour le $(\mathcal{O}_X \otimes_A K')$ -Module $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \otimes_A K'$, les cycles premiers associés soient géométriquement irréductibles et que les longueurs géométriques de \mathcal{F}' aux points maximaux z'_i de son support soient respectivement égales aux longueurs de $\mathcal{F}'_{z'_i}$ en ces points; il revient donc au même de dire que \mathcal{F} est géométriquement réduit (resp. géométriquement ponctuellement intègre) en un point x' de $X_{y'} = X \otimes_A K$, ou de dire que \mathcal{F}' est réduit (resp. intègre) aux points de $X \otimes_A K'$ au-dessus de x' , compte tenu de (4.2.7). Soit A' une A -algèbre finie dont K' est le corps des fractions; il résulte de (4.7.11) qu'en tout point de $X \otimes_A A'$ au-dessus de x , $\mathcal{F} \otimes_A A'$ a la propriété (vii) (resp. (viii)). Remplaçant A par A' et X par $X \otimes_A A'$, on voit qu'on peut se borner à prouver que $\mathcal{F}_{\{x'}}$ est réduit (resp. intègre) en toute généralisation x' de x . On procède alors comme dans (12.1.1.1), en utilisant cette fois (4.7.11), et l'on est encore ramené au cas où A est un anneau de valuation discrète, y étant le point fermé, y' le point générique de Y , et l'uniformisante t de A étant un élément M -régulier. Comme par hypothèse $\mathcal{F}/t\mathcal{F}$ est réduit (resp. intègre) au point x , il résulte de (3.4.6) (resp. (3.4.5)) que \mathcal{F} est réduit (resp. intègre) au point x , donc aussi dans un voisinage de x , et en particulier au point x' , ce qui achève la démonstration dans les cas (vii) et (viii).

(12.1.1.4) Reste à examiner les cas (i) et (ii). Remplaçant Y par le sous-schéma intègre ayant $\overline{\{y'\}}$ pour espace sous-jacent, on peut se borner au cas où Y est irréductible et y' son point générique. Soit z' un point générique d'un cycle premier associé à $\mathcal{F}_{y'}$

contenant x' , et soit Z' l'adhérence de z' dans X , de sorte que l'on a $x \in Z'$. Pour traiter le cas (i), il va suffire de prouver la

Proposition (12.1.1.5). — Soient Y un préschéma localement noethérien, $f: X \rightarrow Y$ un morphisme localement de type fini, \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -Module cohérent et f -plat; pour tout $y \in Y$, posons $\mathcal{F}_y = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathbf{k}(y)$. Soient z' un point de X , $y' = f(z')$, et supposons que $z' \in \text{Ass}(\mathcal{F}_{y'})$. Soient Z' (resp. Y') le sous-préschéma réduit de X (resp. Y) ayant pour espace sous-jacent l'adhérence de $\{z'\}$ dans X (resp. de $\{y'\}$ dans Y). Alors, pour tout $y \in f(Z')$, les dimensions de toutes les composantes irréductibles de Z'_y sont égales à $\dim(Z'_y)$ (dimension de l'adhérence de z' dans X_y) (ce que nous exprimerons plus tard (13.2.2) en disant que la restriction $Z' \rightarrow Y'$ de f est un morphisme équidimensionnel); en outre, en tout point maximal z de Z'_y , on a $z \in \text{Ass}(\mathcal{F}_y)$.

Pour cela, nous allons nous ramener au cas où Y est spectre d'un anneau de valuation discrète. Prenons un spectre d'anneau de valuation discrète Y_1 et un morphisme $h: Y_1 \rightarrow X$ tel que $h(y_1) = z$, $h(y'_1) = z'$, y_1 et y'_1 étant le point fermé et le point générique de Y_1 respectivement (II, 7.1.7). Soient $g = f \circ h: Y_1 \rightarrow Y$, $X_1 = X \times_Y Y_1$, et soient $f_1: X_1 \rightarrow Y_1$, $g_1: X_1 \rightarrow X$ les projections canoniques; il y a une Y_1 -section $h_1: Y_1 \rightarrow X_1$ telle que $h = g_1 \circ h_1$ (I, 3.3.14). Si $Z'_1 = Z'_y \otimes_{\mathbf{k}(y')} \mathbf{k}(y'_1)$, on sait (4.2.6) que les composantes irréductibles de Z'_1 dominent Z'_y ; soit z'_1 le point générique de l'une de ces composantes qui contient $h_1(y'_1)$, de sorte que $f_1(z'_1) = y'_1$ et $g_1(z'_1) = z'$. Comme $h_1(y_1)$ est spécialisation de $h_1(y'_1)$, il est *a fortiori* spécialisation de z'_1 ; soit z_1 un point générique d'une des composantes irréductibles de $\overline{\{z'_1\}} \cap (X_1)_{y_1}$ contenant $h_1(y_1)$. Alors $g_1(z_1)$ est spécialisation de $g_1(z) = z'$ dans X , et $z = h(y_1) = g_1(h_1(y_1))$ est spécialisation de $g_1(z_1)$; mais comme $f(g_1(z_1)) = y$ et que z est point générique de Z'_y , on a nécessairement $z = g_1(z_1)$.

Supposons maintenant que l'on ait prouvé que, si l'on pose $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y_1}$, on a $z_1 \in \text{Ass}((\mathcal{F}_1)_{y_1})$; il résultera de (4.2.7) que $z \in \text{Ass}(\mathcal{F}_y)$; en outre, les dimensions de $\overline{\{z_1\}} \cap (X_1)_{y_1}$ et de $\overline{\{z\}} \cap X_y$ sont égales, et de même les dimensions de $\overline{\{z'_1\}} \cap (X_1)_{y'_1}$ et de $\overline{\{z'\}} \cap X_{y'}$ (4.2.7); on s'est donc bien ramené, comme annoncé, au cas où Y est spectre d'un anneau de valuation discrète A , y et y' étant son point fermé et son point générique respectivement.

Cela étant, comme $z' \in \text{Ass}(\mathcal{F}_{y'})$, on a *a fortiori* $z' \in \text{Ass}(\mathcal{F})$. Si t est une uniformisante de A , t est \mathcal{F} -régulier par platitude, donc (3.4.3) on a $z \in \text{Ass}(\mathcal{F}/t\mathcal{F}) = \text{Ass}(\mathcal{F}_y)$. Quant à l'assertion relative aux dimensions, elle résulte de (7.1.13), appliqué à un sous-préschéma fermé de X ayant Z' pour espace sous-jacent.

Abordons enfin le cas (ii) de (12.1.1). Avec les mêmes notations, il faut prouver que si tous les cycles premiers associés à \mathcal{F}_y et contenant x ont la dimension k , il en est de même de tous les cycles premiers associés à $\mathcal{F}_{y'}$ et contenant x' . Or on vient de voir que tout cycle premier associé à $\mathcal{F}_{y'}$ et contenant x' a même dimension que l'un des cycles premiers associés à \mathcal{F}_y et contenant x ; cela démontre donc (ii).

Remarques (12.1.2). — (i) Sous les conditions de (12.1.1.5) avec $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$ (de sorte que f est plat), on ne peut en général affirmer que la restriction $Z' \rightarrow Y'$ de f est un morphisme plat ni même un morphisme ouvert. C'est ce que montre l'exemple (6.5.5,

(ii) où l'on prend pour Z' une des deux composantes irréductibles de $X = \text{Spec}(B)$. Il est immédiat que ce morphisme restriction n'est pas ouvert aux points de Z' au-dessus du « point double » de $Y' = Y$.

(ii) Dans les hypothèses de (12.1.1.5), avec $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$, on ne peut affaiblir la condition « f est plat » en « f est universellement ouvert » (cf. (2.4.6)), comme nous le verrons plus loin sur un exemple (14.4.10, (i)).

Corollaire (12.1.3). — *Sous les hypothèses de (12.1.1), la fonction $x \mapsto \text{coprof}((\mathcal{F}_{f(x)})_x)$ est semi-continue supérieurement dans X et la fonction $x \mapsto \text{prof}_x^*(\mathcal{F}_{f(x)})$ (10.8.1) est semi-continue inférieurement dans X .*

La première assertion n'est autre qu'une formulation équivalente de (12.1.1, (v)). Pour prouver la seconde, on peut d'abord, compte tenu de (10.8.7) et (10.8.8), se ramener comme dans (12.1.1) au cas où Y est le spectre d'un anneau de valuation discrète A de point fermé y et de point générique y' , $X = \text{Spec}(B)$ étant affine, $\mathcal{F} = \widetilde{M}$, où M est un B -module de type fini. Puisque \mathcal{F} est f -plat, toute composante irréductible de $\text{Supp}(\mathcal{F})$ qui contient $x \in X_y$ domine Y (2.3.4), autrement dit son point générique z' appartient à $X_{y'}$; les composantes irréductibles Z de $\text{Supp}(\mathcal{F})$ qui contiennent une généralisation x' de x appartenant à $X_{y'}$, sont donc exactement celles qui contiennent x et en outre, d'après (12.1.1.5), on a $\dim(Z_{y'}) = \dim(Z_y)$, d'où, si $T = \text{Supp}(\mathcal{F})$, $\dim_x(T_y) = \dim_{x'}(T_{y'})$. De plus, pour une uniformisante t de A , on a vu dans (12.1.1, (v)) que l'on a $\text{coprof}(M_x) = \text{coprof}(M_x/tM_x)$, et puisque d'autre part $\text{coprof}(M_{x'}) \leq \text{coprof}(M_x)$ (6.11.5), on voit que l'on a $\text{coprof}((\mathcal{F}_{y'})_{x'}) \leq \text{coprof}((\mathcal{F}_y)_x)$, la relation $\text{prof}_x^*(\mathcal{F}_y) \leq \text{prof}_{x'}^*(\mathcal{F}_{y'})$ découle alors de (10.8.7).

Remarque (12.1.4). — On déduit aussi de (12.1.1, (i)) que la fonction $x \mapsto \dim_x(X_{f(x)})$ est semi-continue supérieurement dans X , mais nous verrons plus loin (13.1.3) que cette propriété est vraie même sans supposer f plat.

Corollaire (12.1.5). — *Soient Y un préschéma localement noethérien, $f : X \rightarrow Y$ un morphisme localement de type fini, \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -Module cohérent et f -plat, \mathcal{G} un \mathcal{O}_Y -Module cohérent, x un point de X , $y = f(x)$. Supposons que \mathcal{G} ait la propriété (S_k) au point y , et que \mathcal{F}_y ait la propriété (S_k) au point x et soit équidimensionnel au point x . Alors :*

(i) $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{G}$ possède la propriété (S_k) au point x .

(ii) Si de plus Y est localement immersible dans un schéma régulier, ou est un préschéma excellent (7.8.5), il existe un voisinage de x dans X tel que $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{G}$ ait la propriété (S_k) dans ce voisinage.

En effet, par (12.1.1, (iv)), il existe un voisinage ouvert V de x tel que pour tout $x' \in V$, $\mathcal{F}_{f(x')}$ vérifie (S_k) au point x' . D'autre part, \mathcal{G} vérifie (S_k) en tous les points de $Y' = \text{Spec}(\mathcal{O}_y)$ (5.7.2). Remplaçant Y par Y' et X par $V \times_Y Y'$, on est ramené (compte tenu de (1, 3.6.5)) au cas où \mathcal{G} vérifie (S_k) dans Y tout entier et où, pour tout $y \in f(X)$, \mathcal{F}_y possède la propriété (S_k) en tous les points de $f^{-1}(y)$; comme \mathcal{F} est f -plat, on sait alors (6.4.1) que $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{G}$ possède la propriété (S_k) dans X , ce qui prouve (i). Pour démontrer (ii), il suffit d'observer que, sous les hypothèses faites, \mathcal{G} possède la

propriété (S_k) dans un voisinage U de y dans Y ((6.11.2) et (7.8.3, (iv))); on conclut alors de la même manière en remplaçant cette fois Y par U et X par $V \times_Y U$.

Théorème (12.1.6). — Soient $f: X \rightarrow Y$ un morphisme plat et localement de présentation finie, k un entier. Les parties suivantes de X sont ouvertes :

(i) L'ensemble des points $x \in X$ tels que $X_{f(x)}$ vérifie la propriété (S_k) au point x .

(ii) L'ensemble des $x \in X$ tels que $X_{f(x)}$ vérifie la propriété (R_k) géométrique au point x , soit équidimensionnel au point x et tels en outre que x n'appartienne à aucun cycle premier immergé associé à $X_{f(x)}$.

(iii) L'ensemble des $x \in X$ tels que $X_{f(x)}$ soit géométriquement régulier (i.e. lisse) au point x .

(iv) L'ensemble des $x \in X$ tels que $X_{f(x)}$ soit géométriquement normal au point x .

Les étapes A) et B) de (12.0.2) se font ici comme dans (12.1.1); pour l'étape A), on utilise (6.7.8), ainsi que (4.2.7) pour (ii); pour l'étape B), on utilise (9.9.2) et (9.9.4). Reste à examiner l'étape C) dans chaque cas.

(i) Comme dans (12.1.1.2), on se ramène (en utilisant (6.7.8)) au cas où Y est le spectre d'un anneau de valuation discrète A , $X = \text{Spec}(B)$, où B est une A -algèbre de type fini, x, x' deux points de X tels que $f(x) = y$ soit le point fermé et $y' = f(x')$ le point générique de Y , x' étant en outre une généralisation de x . Comme il s'agit de prouver que X vérifie (S_k) au point x' , on peut remplacer X par $\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$, c'est-à-dire supposer l'anneau B local, l'homomorphisme $A \rightarrow B$ étant local et B étant une A -algèbre essentiellement de type fini (1.3.8). Alors, par hypothèse, si t est une uniformisante de A , t est un élément B -régulier par platitude, et B/tB vérifie (S_k) . Mais comme A est un anneau universellement caténaire (5.6.4), B est caténaire, donc, par (5.12.4), il en résulte que B vérifie (S_k) , ce qui achève la démonstration dans le cas (i).

(iii) Ici l'étape C) est inutile; comme f est plat, on sait en effet (6.8.7) que lorsque Y est localement noethérien et f localement de type fini, l'ensemble des $x \in X$ tels que $X_{f(x)}$ soit géométriquement régulier au point x est ouvert dans X .

(ii) En raisonnant comme dans (12.1.1.3), pour prouver que la propriété considérée est stable par généralisation, on peut d'abord, en considérant une extension finie quelconque K' de $k(y')$, et tenant compte de la définition (6.7.6) de la propriété (R_k) géométrique, ainsi que de l'invariance par changement du corps de base des deux autres propriétés figurant dans (ii), remplacer dans (ii) la propriété (R_k) géométrique par la propriété (R_k) . Procédant alors comme dans (i), on se ramène au cas où Y est spectre d'un anneau de valuation discrète A , et puisque A est caténaire, il suffit d'appliquer (5.12.5) pour conclure.

(iv) L'ensemble des points $x \in X$ tels que $X_{f(x)}$ soit géométriquement normal au point x est contenu dans celui des $x \in X$ tels que $X_{f(x)}$ soit géométriquement ponctuellement intègre et vérifie (S_2) au point x , et ce dernier est ouvert dans X en vertu de (12.1.1, (viii)). On peut donc déjà supposer que, pour tout $x \in X$, $X_{f(x)}$ est géométriquement ponctuellement intègre et vérifie (S_2) au point x , et *a fortiori* il est équidimensionnel. D'autre part, en vertu du critère de Serre (5.8.6), dire que $X_{f(x)}$ est géométriquement normal au point x signifie que $X_{f(x)}$ vérifie (S_2) et la propriété (R_1) géométrique en x ;

mais en vertu de (ii) et des remarques précédentes, cet ensemble est intersection de deux ouverts de X , donc est ouvert dans X . C.Q.F.D.

Corollaire (12.1.7). — Soit $f: X \rightarrow Y$ un morphisme localement de présentation finie. Alors l'ensemble des points $x \in X$ où f possède l'une des propriétés suivantes (6.8.1) :

- (i) vérifier la propriété (S_k) ;
- (ii) être de coprofondeur $\leq n$;
- (iii) être de Cohen-Macaulay;
- (iv) être régulier (ou lisse, ce qui revient au même);
- (v) être normal;
- (vi) être réduit;

est ouvert dans X .

En effet, il résulte de (11.3.1) que l'ensemble des $x \in X$ où f est plat est ouvert. On peut donc se borner au cas où f est plat, et alors le corollaire résulte de (12.1.1, (iv), (vi) et (vii)) et de (12.1.6, (i), (ii) et (iv)).

Remarques (12.1.8). — (i) Dans (12.1.6, (ii)), on ne peut supprimer l'hypothèse que x n'appartienne à aucun cycle premier associé immergé de $X_{f(x)}$. C'est ce que montre l'exemple (5.12.3), où l'on prend $X = \text{Spec}(A)$, Y étant le spectre de l'anneau local A_0 de $k[T]$ correspondant à l'idéal premier (T) et le morphisme $X \rightarrow Y$ correspondant à l'homomorphisme injectif $A_0 \rightarrow A$, déduit par localisation et passage au quotient de l'injection $k[T] \rightarrow k[T, U, V]$; ce morphisme est plat puisque A est un A_0 -module sans torsion ($\mathbf{0}_1$, 6.3.4). Ici la fibre X_y au point fermé y de Y , égale à $\text{Spec}(A/tA)$, est irréductible, de dimension 1 et vérifie la condition (R_0) géométrique puisque l'anneau local en son point générique est un corps. Par contre, au point générique y' de Y , la fibre $X_{y'}$ a deux composantes irréductibles de dimensions respectives 0 et 1, et celle de dimension 0 n'est pas réduite, donc $X_{y'}$ ne vérifie pas la condition (R_0) .

(ii) Dans (12.1.6, (ii)), on ne peut pas non plus supprimer l'hypothèse que $X_{f(x)}$ est équidimensionnel au point x . On le voit ici sur l'exemple (5.12.6) avec $X = \text{Spec}(A)$, $Y = \text{Spec}(A_0)$, où A_0 est défini comme dans (i), le morphisme $X \rightarrow Y$ provenant encore de l'injection $k[T] \rightarrow k[T, U, V, W]$ par localisation et passage au quotient, et étant plat puisque A est un A_0 -module sans torsion ($\mathbf{0}_1$, 6.3.4). La fibre X_y au point fermé y de Y est réduite (donc vérifie (S_1)) et vérifie (R_1) , mais a deux composantes irréductibles de dimensions 2 et 1, tandis que la fibre $X_{y'}$ au point générique y' de Y ne vérifie pas (R_1) .

12.2. Propriétés locales et globales des fibres d'un morphisme propre, plat et de présentation finie.

Théorème (12.2.1). — Soient $f: X \rightarrow Y$ un morphisme propre de présentation finie, \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -Module f -plat et de présentation finie, Φ une partie finie de $\mathbf{Z} \cup \{\pm\infty\}$, k un entier. Les parties suivantes de Y sont ouvertes :

- (i) L'ensemble des $y \in Y$ tels que l'ensemble des dimensions des cycles premiers associés à \mathcal{F}_y soit contenu dans Φ .
- (ii) L'ensemble des $y \in Y$ tels que l'ensemble des dimensions des composantes irréductibles de $\text{Supp}(\mathcal{F}_y)$ contienne Φ .
- (iii) L'ensemble des $y \in Y$ tels que tous les cycles premiers associés à \mathcal{F}_y aient une même dimension égale à k .
- (iv) L'ensemble des $y \in Y$ tels que \mathcal{F}_y n'ait pas de cycle premier associé immergé et que l'ensemble des dimensions des composantes irréductibles de $\text{Supp}(\mathcal{F}_y)$ soit égal à Φ .

- (v) L'ensemble des $y \in Y$ tels que \mathcal{F}_y ait la propriété (S_k) et soit équidimensionnel en tout point de X_y .
- (vi) L'ensemble des $y \in Y$ tels que $\text{coprof}(\mathcal{F}_y) \leq k$.
- (vii) L'ensemble des $y \in Y$ tels que \mathcal{F}_y soit un \mathcal{O}_{X_y} -Module de Cohen-Macaulay.
- (viii) L'ensemble des $y \in Y$ tels que \mathcal{F}_y soit géométriquement réduit.
- (ix) L'ensemble des $y \in Y$ tels que \mathcal{F}_y soit géométriquement ponctuellement intègre en chaque point de X_y .

(x) L'ensemble des $y \in Y$ tels que \mathcal{F}_y soit géométriquement intègre.

(xi) L'ensemble des $y \in Y$ tels que \mathcal{F}_y n'ait pas de cycle premier associé immergé et que la somme $l(y)$ des multiplicités totales (4.7.12) de \mathcal{F}_y aux points maximaux de $\text{Supp}(\mathcal{F}_y)$ soit $\leq k$.

A l'exception de (ii), (iii), (iv), (x) et (xi), les propriétés $\mathbf{P}(y)$ considérées sont de la forme suivante : « pour tout $x \in X_y$, \mathcal{F}_y a la propriété $\mathbf{Q}(x)$ », où $\mathbf{Q}(x)$ est l'une des propriétés (i) à (viii) de (12.1.1). Il résulte de (12.1.1) que l'ensemble U des $x \in X$ tels que $\mathbf{Q}(x)$ soit vraie est ouvert, et l'ensemble V des $y \in Y$ tels que $\mathbf{P}(y)$ soit vraie n'est autre que l'ensemble $Y - f(X - U)$; dans tous ces cas, le théorème est donc déjà vrai en supposant seulement le morphisme f fermé. Pour (iii), on applique (i) avec Φ réduit à un seul élément. Il reste à examiner les cas (ii), (iv) et (xi) séparément, ((x) se déduisant aussitôt de (xi) et de (4.7.14)) en appliquant toujours la méthode décrite dans (12.0.2).

(12.2.1.1) Cas (ii) : Les étapes A) et B) de la démonstration procèdent comme dans le début de (12.1.1); pour l'étape A), on utilise (8.9.1), (11.2.6) ainsi que (4.2.7); pour l'étape B), on utilise (9.5.5) appliqué à $\text{Supp}(\mathcal{F})$. Il reste à démontrer que si (en supposant Y noethérien) l'ensemble des dimensions des composantes irréductibles de $\text{Supp}(\mathcal{F}_y)$ contient Φ , alors il en est de même de l'ensemble des dimensions des composantes irréductibles de $\text{Supp}(\mathcal{F}_{y'})$, pour toute *généralisation* y' de y dans Y . Soit Y_1 un spectre d'anneau de valuation discrète tels que, si y_1 et y'_1 sont le point fermé et le point générique de Y_1 , il y ait un morphisme $h : Y_1 \rightarrow Y$ tel que $h(y_1) = y$, $h(y'_1) = y'$ (**II**, 7.1.7). Appliquant (4.2.7), on voit qu'on peut remplacer Y par Y_1 et X par $X_1 = X \times_Y Y_1$, autrement dit, se borner au cas où Y est spectre d'anneau de valuation discrète, y son point fermé et y' son point générique.

Utilisant (**Err**_{III}, 30), on peut se borner au cas où $\text{Supp}(\mathcal{F}) = X$, de sorte que f est quasi-plat (2.3.3); les composantes irréductibles Z_i de X dominent alors Y (2.3.4), autrement dit leurs points génériques appartiennent à X_y , et les $Z_i \cap X_y$ sont les composantes irréductibles de X_y . Mais toute composante irréductible de X_y est contenue dans un des Z_i , donc est une composante irréductible de $(Z_i)_y$; or, on sait (7.1.13) que les dimensions de toutes les composantes irréductibles de $(Z_i)_y$ sont égales à $\dim((Z_i)_{y'})$, ce qui achève de prouver (ii).

(12.2.1.2) Cas (iv) : Le même raisonnement qu'au début montre, en utilisant (12.1.1, (iii)) que l'on peut déjà supposer (en remplaçant Y par un ouvert de Y) que pour tout $y \in Y$, \mathcal{F}_y n'a pas de cycle premier associé immergé. L'assertion du cas (iv) est alors une conséquence immédiate des assertions des cas (i) et (ii).

(12.2.1.3) Cas (xi) : Pour l'étape A) du raisonnement, on utilise (8.9.1), (11.2.6), (8.10.5, (xii)) (pour conserver l'hypothèse que f est propre), ainsi que (4.2.7), (4.5.6) et (4.7.9). Pour l'étape B), on voit, comme dans le cas (iv), qu'on peut supposer que pour tout $y \in Y$, \mathcal{F}_y n'a pas de cycle premier associé immergé, et l'on applique (9.8.8) qui prouve que la fonction $z \mapsto l(z)$ est constructible. Il reste donc à voir (en supposant Y noethérien et f propre) que pour toute généralisation y' d'un point $y \in Y$, on a $l(y') \leq l(y)$. En raisonnant comme dans (12.1.1.3), on voit (à l'aide de (4.7.8) et (4.5.11)) qu'on peut supposer que les composantes irréductibles de $\text{Supp}(\mathcal{F}_{y'})$ sont géométriquement irréductibles et que $l(y')$ est la somme des longueurs des $(\mathcal{F}_{y'})_{z'_j}$ aux points maximaux z'_j de $\text{Supp}(\mathcal{F}_{y'})$. Appliquant de nouveau (4.2.7), (4.5.6) et (4.7.9), on se ramène, comme dans (12.2.1.1), au cas où Y est un spectre d'anneau de valuation discrète, y son point fermé et y' son point générique. Le fait que $l(y') \leq l(y)$ sera alors conséquence du

Lemme (12.2.1.4). — Soient Y un spectre d'anneau de valuation discrète, y son point fermé, y' son point générique, $f: X \rightarrow Y$ un morphisme propre, \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -Module cohérent et f -plat, z_i (resp. z'_i) les points maximaux de $\text{Supp}(\mathcal{F}_y)$ (resp. $\text{Supp}(\mathcal{F}_{y'})$). Supposons que \mathcal{F}_y n'ait pas de cycle premier associé immergé. Alors on a

$$\sum_j \text{long}((\mathcal{F}_{y'})_{z'_j}) \leq \sum_i \text{long}((\mathcal{F}_y)_{z_i}).$$

On a $Y = \text{Spec}(A)$, où A est un anneau de valuation discrète, dont nous désignerons par t une uniformisante, de sorte que $\mathcal{F}_y = \mathcal{F}/t\mathcal{F}$. Comme \mathcal{F} est f -plat, les z'_j sont aussi les points maximaux de $\text{Supp}(\mathcal{F})$ (2.3.4); pour tout z_i , désignons par z'_{ik} ceux des z'_j qui sont des généralisations de z_i ; il résulte de (3.4.1.1) que l'on a

$$\text{long}((\mathcal{F}_y)_{z_i}) \geq \sum_k \text{long}((\mathcal{F}_{y'})_{z'_{ik}})$$

d'où en sommant

$$\sum \text{long}((\mathcal{F}_y)_{z_i}) \geq \sum_k \sum \text{long}((\mathcal{F}_{y'})_{z'_{ik}})$$

Le lemme sera donc prouvé si nous établissons que pour tout z'_j , il y a au moins un indice i tel que z'_j soit l'un des z'_{ik} . Or, comme f est propre (donc fermé) et $f(z'_j) = y'$, il existe $x \in X$ qui est une spécialisation de z'_j et est tel que $f(x) = y$, autrement dit $\overline{\{z'_j\}} \cap X_y$ n'est pas vide. Comme t est \mathcal{F} -régulier par platitude, on déduit de (3.4.3) qu'il y a au moins un point de $\text{Ass}(\mathcal{F}_y)$ dont z'_j est une généralisation; mais comme les points de $\text{Ass}(\mathcal{F}_y)$ sont par hypothèse les z_i , cela termine la démonstration.

Corollaire (12.2.2). — Sous les hypothèses de (12.2.1) :

- (i) La fonction $y \mapsto \dim(\text{Supp}(\mathcal{F}_y))$ est continue (donc localement constante) dans Y .
- (ii) La fonction $y \mapsto \text{coprof}(\mathcal{F}_y)$ (5.7.1) est semi-continue supérieurement dans Y .
- (iii) La fonction $y \mapsto l(y)$ (12.2.1, (xi)) est semi-continue supérieurement dans Y lorsque les \mathcal{F}_y n'ont pas de cycle premier associé immergé.
- (iv) La fonction $y \mapsto \text{prof}^*(\mathcal{F}_y)$ (10.8.1) est semi-continue inférieurement dans Y .

(i) Il résulte de (12.2.1, (i)) appliqué à Φ égal au plus petit intervalle de \mathbf{N} contenant les dimensions des cycles premiers associés à \mathcal{F}_y , que $z \mapsto \dim(\text{Supp}(\mathcal{F}_z))$ est semi-continue supérieurement au point y ; il résulte d'autre part de (12.2.1, (ii)) appliqué à Φ égal à l'ensemble des dimensions des composantes irréductibles de $\text{Supp}(\mathcal{F}_y)$, que cette même fonction est semi-continue inférieurement au point y , d'où la conclusion. Les assertions (ii) et (iii) ne sont que d'autres formulations de (12.2.1, (vi) et (xi)). Enfin, d'après (12.1.3), l'ensemble des $x \in X$ tels que $\text{prof}_x^*(\mathcal{F}_{f(x)}) \leq k$ est ouvert, et la conclusion de (iv) en résulte par le même raisonnement qu'au début de (12.2.1).

Remarques (12.2.3). — (i) On observera que pour (12.2.1, (ii)), on peut se dispenser de l'hypothèse que f est propre.

(ii) Dans (12.2.1, (ii)), on ne peut remplacer la condition que l'ensemble $E(y)$ des dimensions des composantes irréductibles de $\text{Supp}(\mathcal{F}_y)$ contienne Φ , par la condition que $E(y)$ soit égal à Φ . En effet, soit k un corps, et considérons l'espace projectif à 3 dimensions $P = \mathbf{P}_k^3 = \text{Proj}(C)$, où $C = k[t_0, t_1, t_2, t_3]$ (t_i indéterminées); dans P , soit X_0 le sous-schéma fermé « réunion de la droite X_1 définie par $t_1 = t_3 = 0$ et du plan X_2 défini par $t_2 - t_3 = 0$ », ce qui décrit en termes géométriques le fait que X_0 est égal à $\text{Proj}(C/a)$, où l'idéal gradué a est égal à $\mathfrak{b}c$, avec $\mathfrak{b} = Ct_1 + Ct_3$, $c = C(t_2 - t_3)$; considérons le morphisme $f_0: X_0 \rightarrow X_1$ qui, en termes géométriques, est la « projection de X_0 sur X_1 à partir de la droite à l'infini D définie par $t_0 = t_2 = 0$ »; sous forme algébrique, f_0 correspond à l'homomorphisme d'algèbres graduées $k[t_0, t_2] \rightarrow k[t_0, t_1, t_2, t_3]/a$ obtenu par passage au quotient à partir de l'injection canonique $k[t_0, t_2] \rightarrow k[t_0, t_1, t_2, t_3]$. Il est clair que f_0 est un morphisme projectif, donc propre; il en est donc de même de sa restriction $f: X \rightarrow Y$, où $Y = D_+(t_0)$ et $X = f_0^{-1}(Y)$; pour voir que f est plat, il suffit de remarquer que $k[t_2]$ est un anneau principal et l'anneau $C' = k[t_1, t_2, t_3]/(t_2 - t_3)((t_1) + (t_3))$ un $k[t_2]$ -module sans torsion (0₁, 6.3.4). Pour tout $y \in Y$ distinct du point y_0 défini par $t_2 = 0$, $f^{-1}(y)$ a alors deux composantes irréductibles, de dimensions 0 et 1, tandis que $f^{-1}(y_0)$ n'a qu'une seule composante irréductible de dimension 1.

(iii) Dans (12.2.1, (i)), on ne peut pas non plus remplacer la condition que l'ensemble $E'(y) \supseteq E(y)$ des dimensions des cycles premiers associés à \mathcal{F}_y soit contenu dans Φ par la condition qu'il soit égal à Φ . Soient en effet k un corps, A l'anneau $k[t]$ de polynômes, B le sous-anneau $k[t^4, t^3u, tu^3, u^4]$ de l'anneau de polynômes $k[t, u]$ (t, u indéterminées); B n'est pas intégralement clos, l'élément t^2u^2 appartenant à sa clôture intégrale mais n'étant pas dans B ; si \mathfrak{m} est l'idéal maximal de B , engendré par t^4, t^3u, tu^3 et u^4 , \mathfrak{m} est idéal premier associé immergé de A/At^4 . Posons $Y = \text{Spec}(A)$, $X = \text{Spec}(B)$, et soit $f: X \rightarrow Y$ le morphisme correspondant à l'homomorphisme $A \rightarrow B$ qui transforme t en t^4 . Comme cet homomorphisme fait de B un A -module sans torsion, f est plat (0₁, 6.3.4). Si y est le point de Y correspondant à l'idéal maximal tA , le préschéma $f^{-1}(y)$ est irréductible et de dimension 1, mais admet un cycle premier associé immergé de dimension 0; au contraire, si y' est le point générique de Y , $f^{-1}(y')$ n'a pas de cycle premier associé immergé, étant le spectre d'une $k(y')$ -algèbre intègre de dimension 1. Dans cet exemple, f est un morphisme affine non propre; on peut en déduire aussitôt un exemple analogue où f est propre et plat en considérant X comme un ouvert partout dense d'un schéma projectif sur Y (II, 5.3.4 et 5.3.2), ou en procédant directement comme dans la Remarque (ii).

Les Remarques (ii) et (iii) montrent la nécessité d'inclure dans (12.2.1, (iv)) la condition que \mathcal{F}_y n'ait pas de cycle premier associé immergé.

(iv) Dans (12.2.1, (xi)), on ne peut supprimer l'hypothèse que f soit propre. En effet, soient k un corps, Y la « droite affine », spectre de l'anneau de polynômes $k[t]$ (t indéterminée), X le schéma somme de Y et de l'ouvert complémentaire du point fermé y de Y défini par $t = 0$. Il est clair que le morphisme $f: X \rightarrow Y$ qui est égal aux injections canoniques dans chacune des composantes de X est plat et que si l'on prend $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$, \mathcal{F}_z n'a de cycle premier associé immergé pour aucun $z \in Y$. Toutefois, on voit aussitôt que l'on a $l(y) = 1$ et $l(z) = 2$ pour tout $z \neq y$.

(v) Dans (12.2.1, (xi)), on ne peut pas non plus supprimer l'hypothèse que \mathcal{F}_y soit sans cycle premier associé immergé. C'est ce que montre l'exemple de la Remarque (ii) : on voit aussitôt en effet que l'on a, avec $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$, $l(y_0) = 1$ et $l(y) = 2$ pour $y \neq y_0$ dans Y .

(vi) Nous ignorons si dans (12.2.1, (xi)) on peut remplacer l'hypothèse que \mathcal{F} est f -plat par celle que $\text{Supp}(\mathcal{F}) = X$ et que f est universellement ouvert. En reprenant la démonstration de (12.2.1.4), on voit (en utilisant aussi (14.3.6)) qu'il faudrait résoudre la question suivante : Soient A un anneau local noethérien, M un A -module

de type fini, t un élément de l'idéal maximal \mathfrak{m} de A , qui n'est contenu dans aucun idéal premier minimal de A ; s'il existe un de ces idéaux premiers minimaux \mathfrak{p} tels que $\dim(A/\mathfrak{p})=1$, est-il vrai que \mathfrak{m} est un idéal premier associé à M/tM (t n'étant pas supposé M -régulier) ?

On notera toutefois qu'on ne peut, dans (12.2.1, (xi)), supprimer purement et simplement l'hypothèse que \mathcal{F} est f -plat. On prendra en effet ici P comme dans la Remarque (ii), puis dans P le sous-schéma fermé X_0 réunion des trois droites X_1, X_2, X_3 définies respectivement par $t_1=t_3=0, t_1-t_0=t_3=0, t_2=t_3=0$; on définit la projection f_0 de X_0 sur X_1 comme précédemment et sa restriction $f: X \rightarrow Y$, où $Y=D_+(t_0)$ est la droite affine et $X=f_0^{-1}(Y)$; f est propre mais non plat, et si l'on prend $\mathcal{F}=\mathcal{O}_X, \mathcal{F}_y$ n'a de cycles premiers associés immergés pour aucun $y \in Y$. Mais on a $l(y_0)=1$ et $l(y)=2$ pour $y \neq y_0$ dans Y .

Théorème (12.2.4). — Soient $f: X \rightarrow Y$ un morphisme propre, plat et de présentation finie, k un entier ≥ 1 . Les parties suivantes de Y sont ouvertes :

- (i) L'ensemble des $y \in Y$ tels que X_y possède la propriété (S_k) .
- (ii) L'ensemble des $y \in Y$ tels que X_y vérifie la propriété (R_k) géométrique, soit équidimensionnel en chaque point et n'ait pas de cycle premier associé immergé.
- (iii) L'ensemble des $y \in Y$ tels que X_y soit géométriquement régulier (i.e. lisse sur $\mathbf{k}(y)$).
- (iv) L'ensemble des $y \in Y$ tels que X_y soit géométriquement normal.
- (v) L'ensemble des $y \in Y$ tels que X_y soit géométriquement réduit.
- (vi) L'ensemble des $y \in Y$ tels que X_y soit géométriquement réduit et que le nombre géométrique de composantes connexes de X_y soit égal à k .
- (vii) L'ensemble des $y \in Y$ tels que X_y soit géométriquement ponctuellement intègre (4.6.9).
- (viii) L'ensemble des $y \in Y$ tels que X_y soit géométriquement intègre.
- (ix) L'ensemble des $y \in Y$ tels que X_y n'ait pas de cycle premier associé immergé et que la multiplicité totale (4.7.4) de X_y sur $\mathbf{k}(y)$ soit $\leq k$.

Sauf pour (vi), ces assertions sont des cas particuliers d'assertions de (12.2.1), ou se déduisent d'assertions de (12.1.6) comme au début de la démonstration de (12.2.1). Pour (vi), on se ramène comme toujours (compte tenu de l'invariance du nombre géométrique de composantes connexes par changement de base (4.5.6)) au cas où Y est noethérien. L'ensemble U des $y \in Y$ tels que X_y soit géométriquement réduit est ouvert dans Y en vertu de (v); il résulte alors de (III, 7.8.7 et 7.8.6) que pour tout $y \in U$, il y a un voisinage $V \subset U$ de y et un entier m tels que, pour tout $z \in V$, $\Gamma(X_z, \mathcal{O}_{X_z})$ soit isomorphe à $(\mathbf{k}(z))^m$; mais en vertu de (III, 4.3.4), m est alors le nombre géométrique de composantes connexes de X_z , d'où la conclusion. On donnera une autre démonstration de (vi) dans (15.5.9).

12.3. Propriétés cohomologiques locales des fibres d'un morphisme plat et localement de présentation finie.

Lemme (12.3.1). — Soient A un anneau, B une A -algèbre de présentation finie qui soit un A -module plat, M un B -module de présentation finie, qui soit un A -module plat. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) M est un B -module projectif.
- b) M est un B -module plat.
- c) Pour tout $y \in \text{Spec}(A)$, $M \otimes_A \mathbf{k}(y)$ est un $(B \otimes_A \mathbf{k}(y))$ -module projectif.

L'équivalence de *a*) et *b*) résulte de Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 5, n° 2, cor. 2 du th. 1. Comme *a*) implique *c*) trivialement, il reste à prouver que *c*) implique *b*), ce qui résulte du critère de platitude par fibres (11.3.10), appliqué avec $g=h, f=1_X$.

Proposition (12.3.2). — Soient A un anneau, B une A -algèbre de présentation finie qui soit un A -module plat, M un B -module de présentation finie qui soit un A -module plat. Alors :

(i) Il existe une résolution gauche de M par des B -modules libres de type fini.

(ii) On a

$$(12.3.2.1) \quad \dim.\text{proj}_B(M) = \sup_{y \in \text{Spec}(A)} \dim.\text{proj}_{B \otimes_A k(y)}(M \otimes_A k(y)) = \text{Tor}.\dim_B(M)$$

où $\text{Tor}.\dim_B(M)$ est le plus petit entier i tel que $\text{Tor}_i^B(M, N) = 0$ pour tout $j \geq i$ et tout B -module N (et $+\infty$ si un tel entier i n'existe pas).

(i) En vertu de (8.9.1), il existe un sous-anneau noethérien A_0 de A , une A_0 -algèbre de type fini B_0 et un B_0 -module de type fini M_0 tels que B soit isomorphe à $B_0 \otimes_{A_0} A$ et M à $M_0 \otimes_{A_0} A$. De plus (11.2.7) on peut supposer que B_0 et M_0 sont des A_0 -modules plats. Il y a alors une résolution gauche $(L_0)_\bullet$ de M_0 formée de B_0 -modules libres de type fini, et comme M_0 et les L_{0i} sont des A_0 -modules plats, $(L_0)_\bullet \otimes_{A_0} A$ est une résolution gauche de M formée de B -modules libres de type fini (2.1.10).

(ii) En vertu de (0, 17.2.2, (ii)), on a $\text{Tor}.\dim_B(M) \leq \dim.\text{proj}_B(M)$, et la définition de la dimension projective prouve aussitôt que, pour tout $y \in \text{Spec}(A)$, on a $\dim.\text{proj}_{B \otimes_A k(y)}(M \otimes_A k(y)) \leq \dim.\text{proj}_B(M)$. Pour prouver les inégalités inverses, considérons une résolution gauche (L_i) de M par des B -modules libres de type fini, et supposons que $\text{Tor}.\dim_B(M) = n$ (resp. $\dim.\text{proj}_{B \otimes_A k(y)}(M \otimes_A k(y)) \leq n$ pour tout $y \in \text{Spec}(A)$). Alors $R = \text{Im}(L_n \rightarrow L_{n-1}) = \text{Ker}(L_{n-1} \rightarrow L_{n-2})$ est un B -module de type fini qui est aussi un A -module plat, en vertu de l'hypothèse sur M et B et de (2.1.10). En outre, on a $\text{Tor}_{n+1}^B(M, N) = \text{Tor}_1^B(R, N)$ pour tout B -module N ($M, V, 7$). L'hypothèse $\text{Tor}.\dim_B(M) = n$ entraîne donc $\text{Tor}_1^B(R, N) = 0$ pour tout B -module N , c'est-à-dire que R est un B -module plat, donc projectif en vertu de (12.3.1); cela établit que $\dim.\text{proj}_B(M) \leq n$. L'hypothèse $\dim.\text{proj}_{B \otimes_A k(y)}(M \otimes_A k(y)) \leq n$ pour tout $y \in \text{Spec}(A)$ entraîne d'autre part, par tensorisation avec $k(y)$, que dans chacune des suites (exactes en vertu de la platitude sur A de M , des L_i et de R (2.1.10))

$$0 \rightarrow R \otimes_A k(y) \rightarrow L_{n-1} \otimes_A k(y) \rightarrow \dots \rightarrow L_0 \otimes_A k(y) \rightarrow M \otimes_A k(y) \rightarrow 0$$

$R \otimes_A k(y)$ est un $(B \otimes_A k(y))$ -module projectif (pour $y \in \text{Spec}(A)$). On conclut alors encore de (12.3.1) que R est un B -module projectif, donc $\dim.\text{proj}_B(M) \leq n$.

Proposition (12.3.3). — Soient $f : X \rightarrow S$ un morphisme localement de présentation finie, \mathcal{L}_\bullet un complexe formé de \mathcal{O}_X -Modules quasi-cohérents de présentation finie; pour tout $s \in S$, soit $(\mathcal{L}_\bullet)_s$ le complexe $\mathcal{L}_\bullet \otimes_{\mathcal{O}_S} k(s)$ de \mathcal{O}_{X_s} -Modules de type fini. Supposons que \mathcal{L}_{n-1} soit f -plat. Alors l'ensemble U des $x \in X$ tels que $(\mathcal{H}_n((\mathcal{L}_\bullet)_{f(z)}))_x = 0$ est ouvert dans X . Si de plus \mathcal{L}_n est f -plat, alors on a $\mathcal{H}_n(\mathcal{L}_\bullet)|_U = 0$.

On peut évidemment se limiter au cas où $n=1$ et où le complexe \mathcal{L}_\bullet se réduit à $0 \rightarrow \mathcal{L}_2 \xrightarrow{u} \mathcal{L}_1 \xrightarrow{v} \mathcal{L}_0 \rightarrow 0$. On peut d'abord se ramener au cas où $S = \text{Spec}(A)$ et X

sont affines, puis au cas où S est *noethérien*; en effet, par (8.9.1) et (8.5.2), on sait qu'il existe un préschéma noethérien $S' = \text{Spec}(A')$, où A' est un sous-anneau de A , un morphisme de type fini $f' : X' \rightarrow S'$ et trois $\mathcal{O}_{X'}$ -Modules cohérents \mathcal{L}'_i ($0 \leq i \leq 2$) tels que $X = X' \times_{S'} S$, $f = f'_{(S)}$, $\mathcal{L}_i = \mathcal{L}'_i \otimes_{S'} S$, ainsi que deux homomorphismes u', v' tels que $u = u' \otimes 1$, $v = v' \otimes 1$ et $v' \circ u' = 0$. On peut en outre supposer que \mathcal{L}'_0 est f' -plat (11.2.7), et que \mathcal{L}'_1 est f' -plat lorsque \mathcal{L}_1 est supposé f -plat. Par fidèle platitude, l'hypothèse $(\mathcal{H}_n((\mathcal{L}_\bullet)_{f(x)}))_x = 0$ équivaut à $(\mathcal{H}_n((\mathcal{L}'_\bullet)_{f'(x')}))_{x'} = 0$, si x' est la projection de x dans X' ; si U' est l'ensemble des $x' \in X'$ tels que $(\mathcal{H}_n((\mathcal{L}'_\bullet)_{f'(x')}))_{x'} = 0$, U est donc l'image réciproque de U' par la projection $X \rightarrow X'$, ce qui ramène, pour la première assertion, au cas où S est noethérien. Pour la seconde assertion, on remarque en outre que A est limite inductive de ses sous-anneaux A_λ qui sont des A' -algèbres de type fini; posons $X_\lambda = X' \times_{S'} S_\lambda$, où $S_\lambda = \text{Spec}(A_\lambda)$, $\mathcal{L}_i^{(\lambda)} = \mathcal{L}'_i \otimes_{S'} S_\lambda$, et soient $u_\lambda = u' \otimes 1 : \mathcal{L}_2^{(\lambda)} \rightarrow \mathcal{L}_1^{(\lambda)}$, $v_\lambda = v' \otimes 1 : \mathcal{L}_1^{(\lambda)} \rightarrow \mathcal{L}_0^{(\lambda)}$, de sorte que l'on a $\mathcal{H}_1(\mathcal{L}_\bullet^{(\lambda)}) = \text{Ker}(v_\lambda) / \text{Im}(u_\lambda)$. Or, comme le foncteur \varinjlim est exact dans la catégorie des groupes commutatifs, on a $\text{Ker}(v) = \varinjlim(\text{Ker}(v_\lambda))$, $\text{Im}(u) = \varinjlim(\text{Im}(u_\lambda))$, et $\mathcal{H}_1(\mathcal{L}_\bullet) = \varinjlim \mathcal{H}_1(\mathcal{L}_\bullet^{(\lambda)})$. Si l'on a supposé que \mathcal{L}_1 est f -plat et (en se ramenant au cas où $X = U$) que l'on ait prouvé $\mathcal{H}_1(\mathcal{L}_\bullet^{(\lambda)}) = 0$ pour tout λ , on en déduira bien $\mathcal{H}_1(\mathcal{L}_\bullet) = 0$.

I) Supposons désormais S noethérien. On sait (sans hypothèse de platitude sur \mathcal{L}_0) que l'ensemble U est *constructible* dans X (9.9.6). Utilisant maintenant (0III, 9.2.5), il reste à montrer que pour toute *générization* x' de $x \in U$ dans X , on a aussi $x' \in U$. La méthode exposée dans (12.0.2) s'applique sans changement (compte tenu du fait que pour un préschéma Z sur un corps k et une extension k' de k , la projection $Z \otimes_k k' \rightarrow Z$ est fidèlement plate). On peut donc supposer que S est le spectre d'un anneau de valuation discrète A , dont on désigne par t une uniformisante, x étant au-dessus du point fermé de S et x' au-dessus du point générique de S . L'hypothèse que \mathcal{L}_0 est f -plat entraîne que t est \mathcal{L}_0 -régulier (0I, 6.3.4). On est alors ramené à prouver le lemme suivant (où B, M, N, P seront remplacés par $\mathcal{O}_x, (\mathcal{L}_2)_x, (\mathcal{L}_1)_x$ et $(\mathcal{L}_0)_x$ respectivement) :

Lemme (12.3.3.1). — Soient B un anneau local noethérien, M, N, P trois B -modules, N étant supposé de type fini, $M \xrightarrow{u} N \xrightarrow{v} P$ deux homomorphismes tels que $v \circ u = 0$. Soit t un élément de l'idéal maximal de B tel que t soit P -régulier et que la suite

$$(12.3.3.2) \quad M/tM \xrightarrow{u \otimes 1_{B/tB}} N/tN \xrightarrow{v \otimes 1_{B/tB}} P/tP$$

soit exacte. Alors la suite $M \xrightarrow{u} N \xrightarrow{v} P$ est exacte.

Notons d'abord que si l'on remplace M par son image Q dans N et u par l'injection $j : Q \rightarrow N$, l'image de $j \otimes 1$ est la même que celle de $u \otimes 1$, donc on peut, sans changer l'hypothèse ni la conclusion, supposer u injectif. D'autre part, si R est l'image de v et $p : N \rightarrow R$ la surjection canonique, t est évidemment R -régulier, on a $p \circ u = 0$, et le noyau de $p \otimes 1$ est contenu dans celui de $v \otimes 1$; il lui est par suite égal si la suite (12.3.3.2) est exacte; comme d'autre part on a évidemment $\text{Ker}(p) = \text{Ker}(v)$,

on voit qu'on peut, pour prouver le lemme, supposer en outre v surjectif. Le lemme sera alors conséquence du suivant :

Lemme (12.3.3.3). — Soient B un anneau, M, N, P trois B -modules, $u : M \rightarrow N$, $v : N \rightarrow P$ deux homomorphismes tels que u soit injectif, v surjectif et $v \circ u = 0$. Soit t un élément de B tel que t soit P -régulier. Alors on a

$$(12.3.3.4) \quad \text{Ker}(v \otimes 1) / \text{Im}(u \otimes 1) = (\text{Ker}(v) / \text{Im}(u)) \otimes_B (B/tB)$$

à un isomorphisme canonique près.

En effet, l'hypothèse que la suite (12.3.3.2) est exacte entraînera alors $(\text{Ker } v / \text{Im } u) \otimes_B (B/tB) = 0$, et comme t appartient à l'idéal maximal de B et que $\text{Ker}(v)$ est un B -module de type fini (puisque B est supposé noethérien dans (12.3.3.1)), le lemme de Nakayama prouvera que $\text{Ker}(v) = \text{Im}(u)$.

Reste donc à démontrer (12.3.3.3). Posons $u' = u \otimes 1$, $v' = v \otimes 1$, $Z = \text{Ker}(v)$, $H = Z / \text{Im}(u)$, de sorte qu'on a les suites exactes

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow M \rightarrow Z \rightarrow H \rightarrow 0 \\ 0 &\rightarrow Z \rightarrow N \xrightarrow{v} P \rightarrow 0 \end{aligned}$$

d'où, en tensorisant par B/tB et utilisant le lemme (3.4.1.4) et le fait que t est P -régulier, les suites exactes

$$\begin{aligned} M/tM &\xrightarrow{w'} Z/tZ \rightarrow H/tH \rightarrow 0 \\ 0 &\rightarrow Z/tZ \rightarrow N/tN \xrightarrow{v'} P/tP \rightarrow 0 \end{aligned}$$

d'où $\text{Ker}(v') = Z/tZ$, et comme $\text{Im}(w') = \text{Im}(u')$, on obtient (12.3.3.4).

II) Supposons maintenant en outre que \mathcal{L}_1 soit f -plat; remplaçant en outre éventuellement X par U , on peut supposer que $X = U$. Il s'agit de voir que pour tout $x \in X$, on a $(\mathcal{H}_1(\mathcal{L}_\bullet))_x = 0$. Soit $s = f(x)$, et soit \mathfrak{m}_s l'idéal $\mathfrak{m}_s \mathcal{O}_{X,x}$, qui est contenu dans l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{X,x}$; comme $(\mathcal{H}_1(\mathcal{L}_\bullet))_x$ est un $\mathcal{O}_{X,x}$ -module de type fini (X étant localement noethérien), il est séparé pour la topologie \mathfrak{m}_s -adique (0_I, 7.3.5), donc il suffit de montrer que son *séparé complété* pour cette topologie est 0. Or, en vertu de (III, 7.4.7.2), ce *séparé complété* est égal à $\varprojlim_k \mathcal{H}_1(\mathcal{L}_\bullet \otimes_{\mathcal{O}_s} (\mathcal{O}_{s,s} / \mathfrak{m}_s^{k+1}))$, et il suffira donc de prouver que chacun

des termes de ce système projectif est nul. Mais cela est vrai par hypothèse pour $k=0$; raisonnons donc par récurrence sur k . La conclusion résultera du lemme plus général suivant (qu'on appliquera pour $A = \mathcal{O}_{s,s} / \mathfrak{m}_s^{k+1}$ et \mathfrak{J} égal à l'idéal maximal $\mathfrak{m}_s / \mathfrak{m}_s^{k+1}$ de A) :

Lemme (12.3.3.5). — Soient A un anneau, \mathfrak{J} un idéal nilpotent de A , $L_\bullet : P \xrightarrow{u} Q \xrightarrow{v} R$ un complexe de A -modules. On pose $A_0 = A / \mathfrak{J}$, $L_\bullet^{(0)} = L_\bullet \otimes_A A_0 : P_0 \xrightarrow{u_0} Q_0 \xrightarrow{v_0} R_0$, et l'on suppose que $\text{gr}_{\mathfrak{J}}^2(A)$ est un A_0 -module plat, et que Q et R sont des A -modules plats. Alors la relation $H_1(L_\bullet^{(0)}) = 0$ entraîne $H_1(L_\bullet) = 0$.

Posons $L_\bullet^{(k)} = L_\bullet \otimes_A (A / \mathfrak{J}^{k+1}) : P_k \xrightarrow{u_k} Q_k \xrightarrow{v_k} R_k$; comme il existe un entier $k \geq 1$ tel que $L_\bullet^{(k)} = L_\bullet$, il suffira de prouver, par récurrence sur k , que la suite $P_k \xrightarrow{u_k} Q_k \xrightarrow{v_k} R_k$ est

exacte (cette assertion découlant de l'hypothèse pour $k=0$). Soit donc $x \in Q_k$ un élément tel que $v_k(x) = 0$. Comme par l'hypothèse de récurrence la suite $P_{k-1} \xrightarrow{u_{k-1}} Q_{k-1} \xrightarrow{v_{k-1}} R_{k-1}$ est exacte, l'image canonique de x dans $Q_{k-1} = Q_k / (\mathfrak{I}^k Q / \mathfrak{I}^{k+1} Q)$ appartient à $\text{Im}(u_{k-1})$, donc il existe $z \in P_k$ tel que $x = u_k(z) + x'$ avec $x' \in \mathfrak{I}^k Q / \mathfrak{I}^{k+1} Q$. Comme on a $v_k \circ u_k = 0$, la relation $v_k(x) = 0$ entraîne $v_k(x') = 0$, et par ailleurs on a évidemment $v_k(x') \in \mathfrak{I}^k R / \mathfrak{I}^{k+1} R$; tout revient donc à prouver que la suite

$$\mathfrak{I}^k P / \mathfrak{I}^{k+1} P \xrightarrow{u'} \mathfrak{I}^k Q / \mathfrak{I}^{k+1} Q \xrightarrow{v'} \mathfrak{I}^k R / \mathfrak{I}^{k+1} R$$

(où u' et v' proviennent de u et v par restriction et passage aux quotients) est exacte. Or, par hypothèse, $\mathfrak{I}^k / \mathfrak{I}^{k+1}$ est un (A/\mathfrak{I}) -module plat, donc la suite

$$(P/\mathfrak{I}P) \otimes_{A/\mathfrak{I}} (\mathfrak{I}^k / \mathfrak{I}^{k+1}) \xrightarrow{u''} (Q/\mathfrak{I}Q) \otimes_{A/\mathfrak{I}} (\mathfrak{I}^k / \mathfrak{I}^{k+1}) \xrightarrow{v''} (R/\mathfrak{I}R) \otimes_{A/\mathfrak{I}} (\mathfrak{I}^k / \mathfrak{I}^{k+1})$$

est exacte. Mais $(Q/\mathfrak{I}Q) \otimes_{A/\mathfrak{I}} (\mathfrak{I}^k / \mathfrak{I}^{k+1}) = Q \otimes_A (\mathfrak{I}^k / \mathfrak{I}^{k+1})$ s'identifie à $\mathfrak{I}^k Q / \mathfrak{I}^{k+1} Q$ en vertu de la platitude de Q sur A , et de même $(R/\mathfrak{I}R) \otimes_{A/\mathfrak{I}} (\mathfrak{I}^k / \mathfrak{I}^{k+1})$ s'identifie à $\mathfrak{I}^k R / \mathfrak{I}^{k+1} R$. Enfin, l'image de u' s'identifie à celle de u'' , et cela termine la démonstration.

Corollaire (12.3.4). — Soient $f: X \rightarrow S$ un morphisme plat localement de présentation finie, \mathcal{F}, \mathcal{G} deux \mathcal{O}_X -Modules de présentation finie et f -plats. Soient n un entier ≥ 0 , U l'ensemble des $x \in X$ tels que $(\mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_X}^n(\mathcal{F}_{f(x)}, \mathcal{G}_{f(x)}))_x = 0$ (resp. $(\mathcal{T}or_n^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}_{f(x)}, \mathcal{G}_{f(x)}))_x = 0$). Alors U est ouvert, et l'on a $\mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_X}^n(\mathcal{F}, \mathcal{G})|_U = 0$ (resp. $\mathcal{T}or_n^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})|_U = 0$).

On peut évidemment se borner au cas où S et X sont affines. Alors (12.3.2), il existe une résolution gauche $\mathcal{L}_\bullet = (\mathcal{L}_i)$ de \mathcal{F} formée de \mathcal{O}_X -Modules libres de type fini. Si l'on pose $\mathcal{M}^\bullet = \mathcal{H}om(\mathcal{L}_\bullet, \mathcal{G})$ (resp. $\mathcal{N}_\bullet = \mathcal{L}_\bullet \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$), on en déduit que chacun des \mathcal{M}^i (resp. \mathcal{N}_i) est isomorphe à un \mathcal{O}_X -Module de la forme \mathcal{G}^m , donc les \mathcal{M}^i et \mathcal{N}_i sont des \mathcal{O}_X -Modules de présentation finie et f -plats. En outre, pour tout changement de base $S' \rightarrow S$, si l'on pose $X' = X \times_S S'$, $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \otimes_S S'$, $\mathcal{G}' = \mathcal{G} \otimes_S S'$, $\mathcal{L}'_\bullet = \mathcal{L}_\bullet \otimes_S S'$ est encore une résolution gauche de \mathcal{F}' par des $\mathcal{O}_{X'}$ -Modules libres de type fini (2.1.10), et $\mathcal{M}'' = \mathcal{M}^\bullet \otimes_S S'$ est égal à $\mathcal{H}om(\mathcal{L}'_\bullet, \mathcal{G}')$ (resp. $\mathcal{N}'_\bullet = \mathcal{N}_\bullet \otimes_S S'$ est égal à $\mathcal{L}'_\bullet \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{G}'$) d'après ce qui précède. En particulier, on a, pour tout $s \in S$, $\mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_X}^n(\mathcal{F}_s, \mathcal{G}_s) = \mathcal{H}^n((\mathcal{M}^\bullet)_s)$ (resp. $\mathcal{T}or_n^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}_s, \mathcal{G}_s) = \mathcal{H}_n((\mathcal{N}_\bullet)_s)$). Appliquant (12.3.3) aux complexes de Modules f -plats \mathcal{M}^\bullet et \mathcal{N}_\bullet , on en déduit aussitôt le corollaire.

§ 13. MORPHISMES ÉQUIDIMENSIONNELS

Ce paragraphe est consacré à l'étude de la variation de la dimension des fibres d'un morphisme localement de type fini $f: X \rightarrow Y$ (qui est déjà intervenue à propos de la « formule des dimensions » dans 5.5 et 5.6). On prouve d'abord (13.1.3) que la fonction $x \mapsto \dim_x f^{-1}(f(x))$ est toujours *semi-continue supérieure* dans X (théorème de semi-continuité de Chevalley). On étudie ensuite plus particulièrement les morphismes, dits « équidimensionnels », pour lesquels cette fonction est *localement constante*. Malheureuse-

ment la notion de morphisme équidimensionnel n'est pas stable par changement de base; c'est pourquoi dans de nombreuses questions il est plus commode de travailler avec la notion de morphisme universellement ouvert, dont l'étude fait l'objet des §§ 14 et 15.

13.1. Le théorème de semi-continuité de Chevalley.

Lemme (13.1.1). — Soient Y un préschéma irréductible localement noethérien, X un préschéma irréductible, $f: X \rightarrow Y$ un morphisme dominant de type fini. Soit ξ (resp. η) le point générique de X (resp. Y) et soit $e = \dim(f^{-1}(\eta))$. Alors, pour tout $x \in X$, toutes les composantes irréductibles de $f^{-1}(f(x))$ sont de dimension $\geq e$.

La proposition est immédiate lorsque, pour tout $y \in f(X)$, \mathcal{O}_y est un anneau universellement caténaire : en effet, si x est point générique d'une composante irréductible Z de $f^{-1}(y)$, il résulte de (5.6.5), joint à (5.2.1), que l'on a $e + \dim(\mathcal{O}_y) = \dim(Z) + \dim(\mathcal{O}_x)$; mais en vertu de (0, 16.3.9), on a $\dim(\mathcal{O}_x) \leq \dim(\mathcal{O}_y)$, d'où la conclusion dans ce cas.

Nous allons ramener le cas général à ce cas particulier. La question est évidemment locale sur Y , et, compte tenu de (4.1.1.3), elle est aussi locale sur X ; on peut donc se borner au cas où $Y = \text{Spec}(A)$ et $X = \text{Spec}(B)$ sont affines et irréductibles, B étant une A -algèbre de type fini. En outre (1.5.4), on peut supposer X et Y réduits, donc A et B intègres et, comme f est dominant, A est alors un sous-anneau de B . Considérons A comme limite inductive de ses sous- \mathbf{Z} -algèbres de type fini; il résulte alors de (8.9.1) qu'il existe une telle sous-algèbre A_0 et une A_0 -algèbre de type fini B_0 telles que $B = B_0 \otimes_{A_0} A$. Posons $Y_0 = \text{Spec}(A_0)$, $X_0 = \text{Spec}(B_0)$, et soit $f_0: X_0 \rightarrow Y_0$ le morphisme correspondant à l'homomorphisme $A_0 \rightarrow B_0$, de sorte que $f = f_0 \times_{1_Y}$. Il n'est pas évident *a priori* que le préschéma X_0 soit intègre, mais nous allons voir qu'on peut se ramener à ce cas. Soit η_0 le point générique de Y_0 , de sorte que si g est le morphisme $Y \rightarrow Y_0$, on a $g(\eta) = \eta_0$; par transitivité des fibres (I, 3.6.4), on a $f^{-1}(\eta) = f_0^{-1}(\eta_0) \otimes_{\kappa(\eta_0)} \kappa(\eta)$, et comme $f^{-1}(\eta)$ est irréductible par hypothèse, il en est de même de $f_0^{-1}(\eta_0)$ (4.4.1). Notre assertion résultera alors du lemme suivant :

Lemme (13.1.2). — Soient Y_0, Y deux préschémas intègres de points génériques η_0, η , $g: Y \rightarrow Y_0$ un morphisme dominant, $f_0: X_0 \rightarrow Y_0$ un morphisme dominant tel que $f_0^{-1}(\eta_0)$ soit irréductible. Soit X'_0 l'unique composante irréductible de X_0 rencontrant $f_0^{-1}(\eta_0)$ (0_I, 2.1.8), et désignons encore par X'_0 le sous-préschéma fermé réduit de X_0 ayant X'_0 pour espace sous-jacent. Supposons que le préschéma $X = X_0 \times_{Y_0} Y$ soit intègre; alors X est isomorphe à $X'_0 \times_{Y_0} Y$.

En effet, si $j_0: X'_0 \rightarrow X_0$ est l'injection canonique, qui est une immersion fermée, $j = j_0 \times_{1_Y}: X'_0 \times_{Y_0} Y \rightarrow X_0 \times_{Y_0} Y = X$ est une immersion fermée. D'autre part, X'_0 contient la fibre $f_0^{-1}(\eta_0)$, donc $X'_0 \times_{Y_0} Y$ contient $f^{-1}(\eta)$; notons d'autre part que $f^{-1}(\eta)$ n'est pas vide (I, 3.4.7), donc contient le point générique de X ; par suite l'image de j est nécessairement X tout entier. Mais comme X est intègre, le seul sous-préschéma fermé de X ayant X pour espace sous-jacent est X lui-même, donc j est un isomorphisme.

Ce lemme étant établi, on peut donc supposer que X_0 est intègre; pour tout $y_0 \in Y_0$, \mathcal{O}_{y_0} est une \mathbf{Z} -algèbre essentiellement de type fini, donc un anneau universellement

caténaire (5.6.4); par suite, pour tout $y_0 \in f_0(X_0)$, toutes les composantes irréductibles de $f^{-1}(y)$ ont une dimension $\geq e$, car on sait que $\dim(f_0^{-1}(\eta_0)) = e$ par transitivité des fibres (4.1.4). Pour tout $y \in f(X)$, on a alors $y_0 = g(y) \in f_0(X_0)$ et par transitivité des fibres et (4.2.7), on achève la démonstration.

Théorème (13.1.3) (Chevalley). — Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme localement de type fini. Pour tout entier n , l'ensemble $F_n(X)$ des $x \in X$ tels que $\dim_x(f^{-1}(f(x))) \geq n$ est fermé; autrement dit, la fonction $x \mapsto \dim_x(f^{-1}(f(x)))$ est semi-continue supérieurement dans X .

I) Supposons d'abord que f soit localement de présentation finie.

La question est évidemment locale sur X et sur Y , et on peut donc supposer $Y = \text{Spec}(A)$, $X = \text{Spec}(B)$ affines, B étant une A -algèbre de présentation finie. On sait alors (8.9.1) qu'il y a un sous-anneau noethérien A_0 de A , et une A_0 -algèbre de type fini B_0 tels que si l'on pose $Y_0 = \text{Spec}(A_0)$, $X_0 = \text{Spec}(B_0)$, on ait $X = X_0 \times_{Y_0} Y$, $f = f_0 \times_{1_Y}$, où $f_0 : X_0 \rightarrow Y_0$ correspond à l'homomorphisme $A_0 \rightarrow B_0$. Soient $g : Y \rightarrow Y_0$ le morphisme correspondant à l'injection canonique $A_0 \rightarrow A$, y un point de Y , $y_0 = g(y)$; on sait que $f^{-1}(y) = f_0^{-1}(y_0) \otimes_{\kappa(y_0)} \mathbf{k}(y)$, et il résulte de (4.2.7) que si p est la projection canonique $f^{-1}(y) \rightarrow f^{-1}(y_0)$, les composantes irréductibles de $f^{-1}(y)$ sont les composantes irréductibles des ensembles $p^{-1}(Z_0)$, où Z_0 parcourt l'ensemble des composantes irréductibles de $f_0^{-1}(y_0)$, et chacune des composantes irréductibles de $p^{-1}(Z_0)$ domine Z_0 et a une dimension égale à $\dim(Z_0)$. Tenant compte de (0, 14.1.5), on voit donc que si $g' : X \rightarrow X_0$ est la projection canonique, x un point de X et $x_0 = g'(x)$, on a $\dim_x(f^{-1}(f(x))) = \dim_{x_0}(f_0^{-1}(f_0(x_0)))$, d'où $F_n(X) = g'^{-1}(F_n(X_0))$, et on est par suite ramené à démontrer le théorème lorsque Y est noethérien, ce que nous supposons désormais.

On peut évidemment supposer X et Y réduits (1.5.4). En considérant l'ensemble des parties fermées Y' de Y telles que le théorème soit vrai pour le sous-préschéma fermé de Y ayant Y' pour espace sous-jacent et pour $X' = f^{-1}(Y')$, on peut raisonner par récurrence noethérienne (0_r, 2.2.2), et supposer que le théorème est vrai pour toute partie fermée $Y' \neq Y$ de Y . Si X_i ($1 \leq i \leq m$) sont les sous-préschémas fermés réduits de X ayant pour espaces sous-jacents les composantes irréductibles de X , on a $F_n(X) = \bigcup_i F_n(X_i)$ en vertu de (0, 14.1.5), et l'on peut donc se borner à démontrer le théorème pour chacun des X_i , autrement dit, on peut supposer X irréductible. Si Z est le sous-préschéma fermé de Y ayant $\overline{f(X)}$ pour espace sous-jacent, f se factorise en $X \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{j} Y$, où j est l'injection canonique (I, 5.2.2), et g est de type fini (1.5.4), donc il suffit de démontrer le théorème pour Z et g ; en vertu de l'hypothèse de récurrence, on est donc ramené à considérer seulement le cas où $Z = Y$, autrement dit où Y est irréductible et f dominant. Soit alors η le point générique de Y et posons $e = \dim(f^{-1}(\eta))$; il résulte de (13.1.1) que pour $n \leq e$ on a $F_n(X) = X$, et par suite on peut se borner au cas où $n > e$. Mais alors (9.5.6), il y a un voisinage ouvert U de η dans Y tel que $F_n(X) \subset f^{-1}(Y - U)$; comme $Y - U \neq Y$, l'hypothèse de récurrence entraîne que $F_n(X)$ est fermé.

II) Passons maintenant au cas général, en supposant toujours $S = \text{Spec}(A)$ et $X = \text{Spec}(B)$ affines, B étant une A -algèbre de type fini, donc de la forme

$B = A[T_1, \dots, T_n]/\mathfrak{J}$. Soit (\mathfrak{J}_λ) la famille des idéaux de type fini de $A[T_1, \dots, T_n]$ contenus dans \mathfrak{J} , de sorte que \mathfrak{J} est la réunion filtrante des \mathfrak{J}_λ ; si X et les $X_\lambda = \text{Spec}(A[T_1, \dots, T_n]/\mathfrak{J}_\lambda)$ sont considérés comme des sous-préschémas fermés de $Z = \text{Spec}(A[T_1, \dots, T_n])$, on a donc, pour les espaces sous-jacents, $X = \bigcap_\lambda X_\lambda$. Si $f_\lambda : X_\lambda \rightarrow S$ est le morphisme structural, on en déduit que $f^{-1}(s) = \bigcap_\lambda f_\lambda^{-1}(s)$ pour tout $s \in S$, et comme les ensembles $f_\lambda^{-1}(s)$ sont fermés dans l'espace noethérien Z_s , il existe un λ (dépendant de s) tel que $f^{-1}(s) = f_\lambda^{-1}(s)$. Si alors, pour tout $x \in X$, on pose $d(x) = \dim_x(f^{-1}(f(x)))$, $d_\lambda(x) = \dim_x(f_\lambda^{-1}(f_\lambda(x)))$, ce qui précède prouve que l'on a $d(x) = \inf_\lambda d_\lambda(x)$; les fonctions d_λ étant semi-continues supérieurement d'après la première partie de la démonstration, il en est de même de d . C.Q.F.D.

Corollaire (13.1.4). — *Sous les hypothèses de (13.1.3), l'ensemble des $x \in X$ tels que x soit isolé dans $f^{-1}(f(x))$ est ouvert dans X .*

En effet, c'est le complémentaire de $F_1(X)$ (0, 14.1.10).

On notera qu'on retrouve ainsi, sous des hypothèses plus générales, la conséquence (III, 4.4.10) du « Main theorem » de Zariski.

Corollaire (13.1.5). — *Sous les hypothèses de (13.1.3), supposons en outre que f soit un morphisme fermé. Alors, pour tout entier n , l'ensemble des $y \in Y$ tels que $\dim(f^{-1}(y)) \geq n$ est fermé, autrement dit, l'application $y \rightarrow \dim(f^{-1}(y))$ est semi-continue supérieurement; en particulier, si y est spécialisation de y' , on a $\dim(f^{-1}(y)) \geq \dim(f^{-1}(y'))$.*

En effet, dire que $\dim(f^{-1}(y)) \geq n$ signifie que $y \in f(F_n(X))$ (0, 14.1.6).

Corollaire (13.1.6). — *Soient X, Y deux préschémas irréductibles, $f : X \rightarrow Y$ un morphisme dominant localement de type fini. Soit ξ (resp. η) le point générique de X (resp. Y) et soit $e = \dim(f^{-1}(\eta))$. Alors, pour tout $x \in X$, on a $\dim_x(f^{-1}(f(x))) \geq e$.*

En effet, l'ensemble des x tels que $\dim_x(f^{-1}(f(x))) < e$ est ouvert en vertu de (13.1.3), et comme il ne peut contenir ξ , il est vide.

Notons enfin le résultat plus facile suivant :

Proposition (13.1.7). — *Soient Y un préschéma quasi-compact, $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de type fini. Il existe un entier n tel que, pour tout $y \in Y$, on ait $\dim(f^{-1}(y)) \leq n$.*

Comme il y a un recouvrement ouvert affine fini (V_i) de Y tel que chaque $f^{-1}(V_i)$ soit réunion finie d'ouverts affines, on est aussitôt ramené au cas où $Y = \text{Spec}(A)$ et $X = \text{Spec}(B)$ sont affines, B étant une A -algèbre de type fini. Si B admet un système de n générateurs, alors, pour tout $y \in Y$, $B \otimes_A \mathbf{k}(y)$ est une $\mathbf{k}(y)$ -algèbre admettant n générateurs, donc $\dim(f^{-1}(y)) \leq n$ en vertu de (4.1.1).

13.2. Morphismes équidimensionnels : cas des morphismes dominants de préschémas irréductibles.

(13.2.1) Soient Y un préschéma irréductible, X un préschéma irréductible, $f : X \rightarrow Y$ un morphisme dominant localement de type fini; soit η le point générique de Y . On sait (13.1.6) que pour tout $x \in X$, on a $\dim_x(f^{-1}(f(x))) \geq \dim(f^{-1}(\eta))$.

Définition (13.2.2). — Sous les hypothèses de (13.2.1), on dit que f est équidimensionnel au point x (ou que X est équidimensionnel sur Y au point x) si

$$\dim_x(f^{-1}(f(x))) = \dim(f^{-1}(\eta)).$$

On dit que f est équidimensionnel (ou que X est équidimensionnel sur Y) si f est équidimensionnel en tout point $x \in X$.

Il résulte du théorème de Chevalley (13.1.3) que l'ensemble des $x \in X$ où f est équidimensionnel est ouvert non vide. En outre, si f est équidimensionnel au point x , toutes les composantes irréductibles de $f^{-1}(f(x))$ qui contiennent x ont même dimension, car chacune d'elles a une dimension qui est $\geq \dim(f^{-1}(\eta))$ (13.1.6) et $\leq \dim_x(f^{-1}(f(x)))$ en vertu de (0, 14.1.5).

Proposition (13.2.3). — Soient Y un préschéma irréductible localement noethérien, X un préschéma irréductible, $f: X \rightarrow Y$ un morphisme dominant localement de type fini; soient η le point générique de Y , x un point de X , $y = f(x)$, et supposons que l'on ait

$$(13.2.3.1) \quad \dim(\mathcal{O}_x) = \dim(\mathcal{O}_y) + \dim(\mathcal{O}_x \otimes_{\mathcal{O}_y} \mathbf{k}(y)).$$

Alors f est équidimensionnel au point x . La réciproque est vraie si les deux membres de l'inégalité (5.6.5.2) sont égaux, en particulier si \mathcal{O}_y est universellement caténaire.

Cela résulte aussitôt de (5.6.5.2) et de l'inégalité $\delta(x) \geq 0$ (13.1.1).

(13.2.4) Soient maintenant, de façon générale, Y un préschéma localement noethérien, $f: X \rightarrow Y$ un morphisme de type fini, x un point de X , X' une partie fermée irréductible de X contenant x , $y = f(x)$, $Y' = \overline{f(X')}$, η' le point générique de Y' . Désignons encore par X' et Y' les sous-préschémas fermés réduits de X et Y respectivement ayant X' et Y' pour espaces sous-jacents; la restriction $X' \rightarrow Y'$ de f se factorise donc en $X' \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{j} Y$, où j est l'injection canonique (1, 5.2.2), et f' est de type fini (1.5.4). Posons alors pour abrégier

$$(13.2.4.1) \quad A = \mathcal{O}_{Y,y}, \quad B = \mathcal{O}_{X,x}, \quad A' = \mathcal{O}_{Y',y}, \quad B' = \mathcal{O}_{X',x}.$$

La formule (5.6.5.2) appliquée au morphisme dominant f' et aux préschémas irréductibles X' , Y' , donne

$$(13.2.4.2) \quad \dim(B') \leq \dim(A') + \dim(B' \otimes_{A'} \mathbf{k}(y)) - (\dim_x(f'^{-1}(y)) - \dim(f'^{-1}(\eta')))$$

D'autre part, l'anneau local A' (resp. B' , $B' \otimes_{A'} \mathbf{k}(y)$) est un anneau quotient de A (resp. B , $B \otimes_A \mathbf{k}(y)$), donc (0, 16.1.2.1) on a

$$(13.2.4.3) \quad \dim(A') \leq \dim(A), \quad \dim(B') \leq \dim(B), \quad \dim(B' \otimes_{A'} \mathbf{k}(y)) \leq \dim(B \otimes_A \mathbf{k}(y)).$$

On déduit donc en premier lieu de (13.2.4.3) et (0, 16.3.9)

$$(13.2.4.4) \quad \dim(B') \leq \dim(A') + \dim(B' \otimes_{A'} \mathbf{k}(y)) \leq \dim(A) + \dim(B \otimes_A \mathbf{k}(y)).$$

En outre, en vertu de (0, 16.3.9), on a aussi les inégalités

$$(13.2.4.5) \quad \dim(B') \leq \dim(B) \leq \dim(A) + \dim(B \otimes_A \mathbf{k}(y)).$$

La comparaison de ces inégalités montre donc que :

Lemme (13.2.5). — Avec les notations de (13.2.4), les conditions suivantes sont équivalentes :

a) $\dim(B') = \dim(A) + \dim(B \otimes_A k(y))$.

b) On a simultanément les relations suivantes :

(i) $\dim(A') = \dim(A)$.

(ii) $\dim(B' \otimes_{A'} k(y)) = \dim(B \otimes_A k(y))$, autrement dit

$$\dim_x(X' \cap f^{-1}(y)) = \dim_x(f^{-1}(y)).$$

(iii) $\dim_x(f'^{-1}(y)) = \dim(f'^{-1}(\eta'))$, autrement dit $f' : X' \rightarrow Y'$ est équidimensionnel (13.2.2) au point x .

(iv) On a l'égalité

$$\dim(B') = \dim(A') + \dim(B' \otimes_{A'} k(y)) - (\dim_x(f'^{-1}(y)) - \dim(f'^{-1}(\eta')))$$

(relation qui est toujours vérifiée lorsque $A = \mathcal{O}_{X,y}$ est un anneau universellement caténaire, en vertu de (5.6.5)).

c) On a simultanément les relations suivantes :

(i) $\dim(B') = \dim(B)$.

(ii) $\dim(B) = \dim(A) + \dim(B \otimes_A k(y))$.

(13.2.6) Rappelons maintenant que les composantes irréductibles X_i de X contenant x sont en nombre fini et que l'on a ((5.1.2.1) et (0, 14.2.1.1))

(13.2.6.1)
$$\dim(\mathcal{O}_{X,x}) = \sup_i \dim(\mathcal{O}_{X_i,x}).$$

L'équivalence des conditions b) et c) dans (13.2.5) implique par suite, compte tenu de (0, 16.3.9) et (0, 14.2.1) :

Proposition (13.2.7). — Soient Y un préschéma localement noethérien, $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de type fini, x un point de X , $f(x) = y$; on a

(13.2.7.1)
$$\dim(\mathcal{O}_{X,x}) \leq \dim(\mathcal{O}_{Y,y}) + \dim(\mathcal{O}_{X,x} \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} k(y)).$$

Pour que les deux membres de (13.2.7.1) soient égaux, il faut et il suffit qu'il existe une partie fermée irréductible X' de X contenant x et vérifiant simultanément les conditions suivantes :

(i) Si $Y' = \overline{f(X')}$, on a $\dim(\mathcal{O}_{Y',y}) = \dim(\mathcal{O}_{Y,y})$.

(ii) $\dim_x(X' \cap f^{-1}(y)) = \dim_x(f^{-1}(y))$ (autrement dit, X' contient une des composantes irréductibles de $f^{-1}(y)$ contenant x , de dimension maxima parmi toutes ces composantes). Il revient au même de dire que $\dim(\mathcal{O}_{X,x} \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} k(y)) = \dim(\mathcal{O}_{X',x} \otimes_{\mathcal{O}_{Y',y}} k(y))$.

(iii) X' est équidimensionnel sur Y' au point x , autrement dit, on a

$$\dim_x(X' \cap f^{-1}(y)) = \dim(X' \cap f^{-1}(\eta')),$$

où η' est le point générique de Y' (et par suite, toutes les composantes irréductibles de $X' \cap f^{-1}(y)$ contenant x ont même dimension (13.2.2)).

(iv) On a l'égalité

$$\dim(\mathcal{O}_{X',x}) = \dim(\mathcal{O}_{Y,y}) + \dim(\mathcal{O}_{X',x} \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} \mathbf{k}(y))$$

(condition toujours impliquée par (iii) lorsque $\mathcal{O}_{Y,y}$ est un anneau universellement caténaire).

De plus, X' est alors une composante irréductible de X et Y' une composante irréductible de Y .

Dans l'énoncé, les anneaux locaux $\mathcal{O}_{X',x}$ et $\mathcal{O}_{Y,y}$ sont relatifs aux sous-préschémas fermés réduits de X , Y respectivement ayant X' et Y' pour espaces sous-jacents respectifs.

En outre, cela prouve que

Corollaire (13.2.8). — Si les deux membres de (13.2.7.1) sont égaux, les parties fermées irréductibles X' de X contenant x et vérifiant les conditions (i) à (iv) de (13.2.7) sont exactement celles pour lesquelles on a $\dim(\mathcal{O}_{X',x}) = \dim(\mathcal{O}_{X,x})$ (ce qui implique nécessairement que X' est une composante irréductible de X).

La proposition (13.2.7) entraîne :

Corollaire (13.2.9). — Soient Y un préschéma localement noethérien, $f: X \rightarrow Y$ un morphisme de type fini, x un point de X , $f(x) = y$. Supposons que $\mathcal{O}_{Y,y}$ soit un anneau universellement caténaire. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

a) Les deux membres de (13.2.7.1) sont égaux.

b) Il existe une composante irréductible Z de $f^{-1}(y)$ contenant x , de dimension $\dim_x(f^{-1}(y))$, celle que, pour tout x' dans un voisinage de x dans Z , on ait

$$(13.2.9.1) \quad \dim(\mathcal{O}_{X,x'}) = \dim(\mathcal{O}_{Y,y}) + \dim(\mathcal{O}_{X,x'} \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} \mathbf{k}(y)).$$

c) Il existe une composante irréductible Z de $f^{-1}(y)$ contenant x , de dimension $\dim_x(f^{-1}(y))$, telle que pour le point générique z de Z , on ait

$$(13.2.9.2) \quad \dim(\mathcal{O}_{X,z}) = \dim(\mathcal{O}_{Y,y}).$$

Montrons que a) entraîne b). Soit $\dim_x(f^{-1}(y)) = n$; en vertu de (13.2.7), il existe une composante irréductible X' de X vérifiant les conditions (i) à (iv) de (13.2.7); soit Z une composante irréductible de dimension n de $f^{-1}(y)$, contenant x et contenue dans X' . Comme $f^{-1}(y)$ est localement noethérien, il existe un voisinage ouvert U de x dans Z tel que U ne rencontre aucune composante irréductible de $f^{-1}(y)$ autre que celles qui contiennent x , donc (4.1.1.3) $\dim_{x'}(f^{-1}(y)) = n$ pour tout $x' \in U$; il est clair alors que les conditions (i) à (iii) de (13.2.7) sont satisfaites quand on y remplace x par un point quelconque $x' \in U$, et il en est de même de la condition (iv) puisque $\mathcal{O}_{Y,y}$ est universellement caténaire; d'où la conclusion par (13.2.7). La condition b) entraîne trivialement c) en vertu de (5.1.2). Enfin, si c) est vérifiée et si X'' est une composante irréductible de X contenant Z et telle que les conditions (i) à (iv) de (13.2.7) soient vérifiées quand on y remplace X' par X'' et x par z , il est clair que ces conditions sont aussi vérifiées pour X'' et x puisque $\mathcal{O}_{Y,y}$ est universellement caténaire, donc c) implique a).

Proposition (13.2.10). — Soient Y un préschéma irréductible localement noethérien, η son point générique, $f: X \rightarrow Y$ un morphisme de type fini, y un point de $f(X)$. Soient Z_i les

composantes irréductibles de $f^{-1}(y)$, z_i le point générique de Z_i , et considérons les conditions suivantes :

a) Pour tout $x \in f^{-1}(y)$, on a la relation

$$(13.2.10.1) \quad \dim(\mathcal{O}_{X,x}) = \dim(\mathcal{O}_{Y,y}) + \dim(\mathcal{O}_{X,x} \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} \mathbf{k}(y)).$$

b) Pour tout i , on a

$$(13.2.10.2) \quad \dim(\mathcal{O}_{X,z_i}) = \dim(\mathcal{O}_{Y,y}).$$

c) Pour tout i , il existe une composante irréductible X_i de X contenant Z_i et telle que $\dim(X_i \cap f^{-1}(\eta)) = \dim(Z_i)$ (autrement dit, telle que le sous-préschéma fermé réduit X_i de X soit équidimensionnel sur Y au point z_i).

Alors a) entraîne b) et b) entraîne c); en outre, si $\mathcal{O}_{Y,y}$ est universellement caténaire, les trois conditions a), b), c) sont équivalentes.

L'anneau $\mathcal{O}_{X,z_i} \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} \mathbf{k}(y)$ étant de dimension 0 (5.1.2), a) entraîne évidemment b); b) entraîne c) en vertu de (13.2.7) appliqué au point z_i . Inversement, supposons que $\mathcal{O}_{Y,y}$ soit universellement caténaire; comme la condition c) implique que $f(X_i)$ est dense dans Y , il résulte de c) que les conditions (i) à (iv) de (13.2.7) sont vérifiées en remplaçant X' par X_i et x par z_i , donc c) implique b); enfin b) implique a) en vertu de (13.2.9).

Corollaire (13.2.11). — Les notations étant celles de (13.2.10), supposons que $\mathcal{O}_{Y,y}$ soit universellement caténaire. Pour tout $y' \in Y$, soit $E(y')$ l'ensemble des dimensions des composantes irréductibles de $f^{-1}(y')$ et posons $d(y') = \dim(f^{-1}(y')) = \sup(E(y'))$. Alors, si les conditions équivalentes a), b), c) de (13.2.10) sont vérifiées, on a $E(y) \subset E(\eta)$, d'où $d(y) \leq d(\eta)$.

En effet, avec les notations de (13.2.10), $X_i \cap f^{-1}(\eta)$ n'est pas vide et est par suite une composante irréductible de $f^{-1}(\eta)$ ($0_1, 2.1.8$).

Remarques (13.2.12). — (i) Rappelons (6.1.2) que la relation (13.2.10.1) est toujours vérifiée lorsque le morphisme f est *plat* au point x .

(ii) Avec les notations de (13.2.10), supposons que $\mathcal{O}_{Y,y}$ soit universellement caténaire et en outre que le morphisme f soit *propre*; alors, si les conditions équivalentes a), b), c) de (13.2.10) sont satisfaites, on a même $d(y) = d(\eta)$, car il résulte de (13.1.5) que l'on a $d(y) \geq d(\eta)$.

(iii) Le morphisme de (12.2.3, (ii)) est *propre* et *plat* et tous les anneaux locaux de Y sont universellement caténaires; en outre, les deux composantes irréductibles X_1, X_2 de X sont *équidimensionnelles* sur Y en tout point; mais $E(y)$ a deux éléments pour tout $y \neq y_0$, alors que $E(y_0)$ est réduit à un seul élément, donc $E(y)$ n'est pas constant dans Y .

13.3. Morphismes équidimensionnels : cas général.

Proposition (13.3.1). — Soient Y un préschéma, $f : X \rightarrow Y$ un morphisme localement de type fini, x un point de X , $y = f(x)$. Désignons par Y_α les composantes irréductibles de Y contenant y . Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

a) Il existe un entier e et un voisinage ouvert U de x tels que l'image par f de toute composante irréductible de U soit dense dans un Y_α , et que, pour tout $x' \in U$, l'espace $U \cap f^{-1}(f(x'))$ soit équidimensionnel et de dimension e .

a') Il existe un entier e et un voisinage ouvert U de x tels que l'image par f de toute composante irréductible de U soit dense dans un Y_α et que, si on désigne par y_α le point générique de Y_α , toute composante irréductible des espaces $U \cap f^{-1}(y)$, $U \cap f^{-1}(y_\alpha)$ soit de dimension e .

a'') Il existe un entier e et un voisinage ouvert U de x tels que, pour chacune des composantes irréductibles U_λ de U , $f(U_\lambda)$ soit dense dans un Y_α et que, pour tout $x' \in U_\lambda$, les composantes irréductibles de $U_\lambda \cap f^{-1}(f(x'))$ soient toutes de dimension e .

b) Il existe un entier e , un voisinage ouvert U de x et un Y -morphisme quasi-fini $g : U \rightarrow Y \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}[T_1, \dots, T_e]$ (préschéma que nous noterons aussi $Y[T_1, \dots, T_e]$ pour abrégé) tels que l'image par g de toute composante irréductible de U soit dense dans une composante irréductible de $Y[T_1, \dots, T_e]$.

Il est immédiat que a'') entraîne a), car pour tout $x \in U$, les composantes irréductibles de $U \cap f^{-1}(f(x))$ sont chacune composante irréductible d'un des $U_\lambda \cap f^{-1}(f(x))$, d'où la conclusion par (0, 14.1.4). La condition a) entraîne trivialement a'). Montrons ensuite que a') entraîne a''); on peut se borner au cas où f est de type fini et X et Y réduits (1.5.4). Soit U_λ une composante irréductible de U , et supposons que $f(U_\lambda)$ soit dense dans Y_α ; alors la restriction de f à U_λ se factorise en $U_\lambda \xrightarrow{f_\alpha} Y_\alpha \rightarrow Y$, où f_α est de type fini et dominant (1, 5.2.2). Soit x_λ le point générique de U_λ ; en vertu de (0₁, 2.1.8), $U_\lambda \cap f_\alpha^{-1}(y_\alpha)$ est l'unique composante irréductible de $U \cap f^{-1}(y_\alpha)$ contenant x_λ et est par hypothèse de dimension e , égale aux dimensions de toutes les composantes irréductibles de $U_\lambda \cap f^{-1}(y)$, en vertu de l'hypothèse et de (13.1.1). Mais en vertu du théorème de Chevalley (13.1.3) et de (13.1.1), l'ensemble V_λ des $x' \in U_\lambda$ tels que $\dim_{x'}(f_\lambda^{-1}(f_\lambda(x))) = e$ est ouvert et contient x , et il suffit de prendre la réunion des V_λ pour obtenir un ensemble ouvert satisfaisant aux conditions de a'').

Prouvons maintenant que a) entraîne b); on peut se limiter au cas où $Y = \text{Spec}(A)$ et $X = \text{Spec}(B)$ sont affines et où $U = X$. Prouvons d'abord le lemme suivant :

Lemme (13.3.1.1). — Soient $Y = \text{Spec}(A)$, $X = \text{Spec}(B)$ deux schémas affines, $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de type fini, y un point de $f(X)$, et posons $e = \dim(f^{-1}(y))$. Alors il existe un Y -morphisme $g : X \rightarrow Y[T_1, \dots, T_e]$ tel que (si l'on pose $X_y = X \times_Y \text{Spec}(\mathbf{k}(y))$), le morphisme $g_y : X_y \rightarrow \text{Spec}(\mathbf{k}(y))[T_1, \dots, T_e]$ soit fini. En outre, pour un tel morphisme g , g_y est nécessairement surjectif et il existe un voisinage ouvert U de $f^{-1}(y)$ dans X tel que $g|_U$ soit quasi-fini.

Soit $\mathfrak{p} = \mathfrak{j}_y$; l'anneau $B \otimes_A \mathbf{k}(\mathfrak{p})$ est une $\mathbf{k}(\mathfrak{p})$ -algèbre de type fini, donc le lemme de normalisation (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. V, § 3, n° 1, th. 1) prouve qu'il y a dans $B \otimes_A \mathbf{k}(\mathfrak{p})$ une suite finie $(t_i)_{1 \leq i \leq r}$ d'éléments algébriquement indépendants sur $\mathbf{k}(\mathfrak{p})$ et tels que si l'on pose $C' = \mathbf{k}(\mathfrak{p})[t_1, \dots, t_r]$, $B \otimes_A \mathbf{k}(\mathfrak{p})$ soit une C' -algèbre finie; on a donc $\dim(B \otimes_A \mathbf{k}(\mathfrak{p})) = \dim(C')$ (0, 16.1.5) et comme $\dim(C') = r$ (5.2.1), on a $r = e$. Comme $B \otimes_A \mathbf{k}(\mathfrak{p}) = (B/\mathfrak{p}B) \otimes_{A/\mathfrak{p}} \mathbf{k}(\mathfrak{p})$, on peut, en multipliant les t_i par un élément $\neq 0$

convenable de A/p , supposer que chaque t_i est l'image canonique dans $B \otimes_A k(p)$ d'un élément $s_i \in B$. Soit alors $u : A[T_1, \dots, T_e] \rightarrow B$ l'homomorphisme tel que $u(T_i) = s_i$ pour tout i , et soit $g : X \rightarrow Y[T_1, \dots, T_e]$ le morphisme correspondant. Il est clair qu'en raison du choix des s_i , g_y est un morphisme fini. Pour tout morphisme $g : X \rightarrow Y[T_1, \dots, T_e]$, tel que g_y soit fini, il résulte de (5.4.2) et (4.1.2.1) que g_y est nécessairement surjectif. D'autre part, en vertu de (13.1.4), l'ensemble U des $x \in X$ qui sont isolés dans leur fibre $g^{-1}(g(x))$ est ouvert dans X et contient $f^{-1}(y)$, et par définition la restriction $g|_U$ est un morphisme quasi-fini.

Ce lemme étant établi, pour prouver que $a)$ implique $b)$, il reste à voir que si x_λ est un point maximal de U , $g(x_\lambda) = z_\lambda$ est un point maximal de $Z = Y[T_1, \dots, T_e]$. En vertu de l'hypothèse $a)$, on peut (en restreignant au besoin U), supposer que $f(x_\lambda)$ est l'un des points génériques y_α des composantes irréductibles de Y contenant y ; si $p : Z \rightarrow Y$ est le morphisme structural, on a donc $p(z_\lambda) = y_\alpha$, et l'on déduit par suite de g un $k(y_\alpha)$ -morphisme quasi-fini $h : U \cap f^{-1}(y_\alpha) \rightarrow p^{-1}(y_\alpha)$. Or $p^{-1}(y_\alpha) = \text{Spec}(k(y_\alpha)[T_1, \dots, T_e])$ est intègre et de dimension e ; si z_λ n'était pas point maximal de Z , il ne serait pas point maximal de $p^{-1}(y_\alpha)$ ($\mathbf{0}_1$, 2.1.8) et son adhérence Z'_λ dans $p^{-1}(y_\alpha)$ serait donc de dimension $< e$ (4.1.2.1). Mais comme h est quasi-fini, il résulte de (4.1.2) et de l'hypothèse $a)$ que l'on a $\dim(Z'_\lambda) \geq e$ (la restriction de h à $\overline{\{x_\lambda\}}$ se factorisant en $\overline{\{x_\lambda\}} \rightarrow Z'_\lambda \rightarrow p^{-1}(y_\alpha)$ en vertu de (\mathbf{I} , 5.2.2)); on aboutit ainsi à une contradiction, ce qui montre que $a)$ entraîne $b)$.

Prouvons finalement que $b)$ implique $a)$. Notons que le morphisme structural $p : Z = Y[T_1, \dots, T_e] \rightarrow Y$ est fidèlement plat; donc (2.3.4) les points maximaux de Z ont pour images par p les points maximaux de Y ; ceci prouve déjà que les $f(x_\lambda)$ sont points génériques des Y_α . En outre, si $f(x_\lambda) = y_\alpha$, le $k(y_\alpha)$ -morphisme $h : U \cap f^{-1}(y_\alpha) \rightarrow p^{-1}(y_\alpha)$ déduit de g est dominant et quasi-fini par hypothèse; on a donc $\dim(U_\lambda \cap f^{-1}(y_\alpha)) = e$ en vertu de (4.1.2) (U_λ étant la composante irréductible de U de point générique x_λ). De même, pour tout $x' \in U_\lambda$, le morphisme $U_\lambda \cap f^{-1}(f(x')) \rightarrow p^{-1}(f(x'))$ déduit de g est un $k(f(x'))$ -morphisme quasi-fini, donc (4.1.2) on a $\dim(f^{-1}(f(x')) \cap U_\lambda) \leq e$; mais par ailleurs on sait (13.1.6) que toutes les composantes irréductibles de $U_\lambda \cap f^{-1}(f(x'))$ sont de dimension $\geq e$; on voit ainsi que ces composantes sont exactement de dimension e , donc $b)$ entraîne $a)$. C.Q.F.D.

Définition (13.3.2). — Soient Y un préschéma, $f : X \rightarrow Y$ un morphisme localement de type fini, x un point de X . On dit que f est équidimensionnel au point x (ou que X est équidimensionnel sur Y au point x) si les conditions équivalentes de (13.3.1) sont vérifiées. On dit que f est équidimensionnel (ou que X est équidimensionnel sur Y) si f est équidimensionnel en tout point $x \in X$.

Il est clair que, pour que f soit équidimensionnel en un point x , il faut et il suffit que f_{red} le soit. En outre, les conditions de (13.3.1) montrent que l'ensemble des points où f est équidimensionnel est ouvert dans X .

On notera que lorsque X et Y sont irréductibles, dire que f est équidimen-

sionnel au point x signifie, en vertu de (13.3.1, a''), que f est dominant et que $\dim_x(f^{-1}(f(x))) = \dim(f^{-1}(\eta))$ (où η est le point générique de Y); la définition (13.3.2) coïncide donc dans ce cas avec la définition (13.2.2).

Proposition (13.3.3). — Soient Y un préschéma localement noethérien, $f: X \rightarrow Y$ un morphisme localement de type fini, x un point de X , X_j les composantes irréductibles de X (en nombre fini) contenant x . Pour que f soit équidimensionnel au point x , il faut et il suffit que, pour tout j , $Y_j = \overline{f(X_j)}$ soit une composante irréductible de Y et, en désignant par X_j et Y_j les sous-préschémas fermés réduits de X et Y d'espaces sous-jacents X_j et Y_j , par $f_j: X_j \rightarrow Y_j$ le morphisme déduit de f (I, 5.2.2), par y_j le point générique de Y_j , que f_j soit équidimensionnel au point x et que tous les nombres $\dim(f_j^{-1}(y_j))$ soient égaux.

Cela résulte aussitôt de (13.3.1, a').

Corollaire (13.3.4). — Avec les notations de (13.3.3), posons $y = f(x)$. Si $\mathcal{O}_{Y,y}$ est un anneau universellement caténaire et si f est équidimensionnel au point x , on a

$$(13.3.4.1) \quad \dim(\mathcal{O}_{X_j,x}) = \dim(\mathcal{O}_{Y_j,y}) + e - \deg. \operatorname{tr}_{\kappa(y)} \mathbf{k}(x)$$

où e est la valeur commune des nombres $\dim(f_j^{-1}(y_j))$.

Comme chacun des $\mathcal{O}_{X_j,y}$, quotient de $\mathcal{O}_{Y,y}$, est un anneau universellement caténaire (5.6.1), l'égalité est conséquence de (5.6.5).

Corollaire (13.3.5). — Avec les notations de (13.3.4), supposons que f soit équidimensionnel au point x et que $\mathcal{O}_{Y,y}$ soit un anneau universellement caténaire. Si l'anneau $\mathcal{O}_{Y,y}$ est équidimensionnel, il en est de même de $\mathcal{O}_{X,x}$; la réciproque est vraie si l'image par f de la réunion des X_j est dense dans un voisinage de y .

En effet, dire que $\mathcal{O}_{X,y}$ est équidimensionnel signifie que les nombres $\dim(\mathcal{O}_{Y_i,y})$ sont égaux pour toutes les composantes irréductibles Y_i de Y contenant y , comme il résulte de (5.1.1.5) appliqué au schéma local $\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{Y,y})$; comme on a la relation (13.3.4.1), il en résulte par le même raisonnement que $\mathcal{O}_{X,x}$ est alors équidimensionnel. Inversement, si $\mathcal{O}_{X,x}$ est équidimensionnel, tous les nombres $\mathcal{O}_{Y_j,y}$ sont égaux par (13.3.4.1); on en déduit que $\mathcal{O}_{X,y}$ est équidimensionnel si les Y_j sont toutes les composantes irréductibles de Y contenant y , ce qui résulte de l'hypothèse supplémentaire.

Proposition (13.3.6). — Soient Y un préschéma localement noethérien, $f: X \rightarrow Y$ un morphisme localement de type fini, x un point de X , $y = f(x)$. Supposons que l'anneau \mathcal{O}_y soit équidimensionnel. Alors, si \mathcal{O}_x est équidimensionnel et si l'on a l'égalité

$$(13.3.6.1) \quad \dim(\mathcal{O}_x) = \dim(\mathcal{O}_y) + \dim(\mathcal{O}_x \otimes_{\mathcal{O}_y} \mathbf{k}(y))$$

(cf. (13.2.7.1)) f est équidimensionnel au point x , et la réciproque est vraie si \mathcal{O}_y est un anneau universellement caténaire.

Gardons les notations de (13.3.3); il résulte de (13.2.8) et de l'hypothèse que \mathcal{O}_x est équidimensionnel, que chacun des Y_j est une composante irréductible de Y et que chacun des f_j est équidimensionnel au point x ; en outre (13.2.8), on a (compte tenu de (5.6.5))

$$\dim(\mathcal{O}_{X_j,x}) = \dim(\mathcal{O}_{Y_j,y}) + \dim_x(X_j \cap f^{-1}(y)) - \deg. \operatorname{tr}_{\kappa(y)} \mathbf{k}(x).$$

Or, comme \mathcal{O}_y est supposé équidimensionnel, cette égalité s'écrit

$$(13.3.6.2) \quad \dim_x(X_j \cap f^{-1}(y)) = \dim(\mathcal{O}_{X,x}) - \dim(\mathcal{O}_{Y,y}) + \deg. \operatorname{tr}_{\mathbf{k}(y)} \mathbf{k}(x).$$

Le premier membre de (13.3.6.2) est donc indépendant de j ; mais comme f_j est équidimensionnel au point x , on a $\dim_x(X_j \cap f^{-1}(y)) = \dim(f_j^{-1}(y_j))$, donc le critère (13.3.3) montre que f est équidimensionnel au point x .

Inversement, supposons que $\mathcal{O}_{Y,y}$ soit un anneau universellement caténaire et que f soit équidimensionnel au point x ; alors (13.3.5) $\mathcal{O}_{X,x}$ est équidimensionnel, et il résulte alors de (13.3.4) que l'on a la relation

$$\dim(\mathcal{O}_{X,x}) = \dim(\mathcal{O}_{Y,y}) + e - \deg. \operatorname{tr}_{\mathbf{k}(y)} \mathbf{k}(x)$$

où e est la valeur commune des nombres $\dim(f_j^{-1}(y_j)) = \dim_x(X_j \cap f^{-1}(y))$; mais par définition e est aussi égal à $\dim_x(f^{-1}(y))$, d'où la relation (13.3.6.1), compte tenu de (5.6.5.2).

Proposition (13.3.7). — Soient Y un préschéma, $f: X \rightarrow Y$ un morphisme localement de type fini et équidimensionnel, Z une partie fermée de X . Alors la fonction

$$(13.3.7.1) \quad x \mapsto \operatorname{codim}_x(Z \cap f^{-1}(f(x)), f^{-1}(f(x)))$$

est semi-continue inférieurement dans X .

Comme toutes les composantes irréductibles de $f^{-1}(f(x))$ contenant x ont par hypothèse la même dimension (13.3.1), on a, en vertu de (5.2.1),

$$\operatorname{codim}_x(Z \cap f^{-1}(f(x)), f^{-1}(f(x))) = \dim_x(f^{-1}(f(x))) - \dim_x(Z \cap f^{-1}(f(x))).$$

Mais par hypothèse le premier terme du second membre est fonction *continue* de x (13.3.1) et le second est fonction semi-continue supérieurement de x en vertu de (13.3.3); d'où la conclusion.

Proposition (13.3.8). — Soient Y un préschéma, $f: X \rightarrow Y$ un morphisme localement de type fini, x un point de X . Soient Y' un préschéma, $g: Y' \rightarrow Y$ un morphisme plat, $X' = X \times_Y Y'$, $f' = f_{(Y')} : X' \rightarrow Y'$; si f est équidimensionnel au point x , alors f' est équidimensionnel en tout point $x' \in X'$ au-dessus de x .

La question étant locale sur X et Y , on peut se borner au cas où toute composante irréductible de X (resp. Y) contient x (resp. y); comme l'image par f de toute composante irréductible de X est alors dense dans une composante irréductible de Y (13.3.1), on sait (2.3.5) que l'image par f' de toute composante irréductible de X' est dense dans une composante irréductible de Y' . D'autre part, par transitivité des fibres (I, 3.6.4), il résulte de (4.2.8) et de (13.3.1) que, pour tout $z' \in X'$, l'ensemble des dimensions des composantes irréductibles de $f'^{-1}(f'(z'))$ est le même que l'ensemble des dimensions des composantes irréductibles de $f^{-1}(f(z))$, où z est la projection de z' dans X ; d'où la conclusion en vertu de (13.3.1, a)).

Remarque (13.3.9). — La propriété d'équidimensionnalité d'un morphisme $f: X \rightarrow Y$ n'est pas stable par changement de base quelconque $g: Y' \rightarrow Y$, même lorsque g est l'injection canonique d'une composante irréductible Y' de Y dans Y (Y' étant

considérée comme sous-préschéma fermé réduit de Y). Par exemple, soient k un corps, $A_0 = k[S, T]$ l'anneau de polynômes à deux indéterminées, $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2$, où \mathfrak{p}_1 et \mathfrak{p}_2 sont les idéaux premiers $A_0 S$ et $A_0 T$ de A_0 ; soient $A = A_0/\mathfrak{a}$ et $Y = \text{Spec}(A)$, qui a deux composantes irréductibles $Y_1 = \text{Spec}(A/\mathfrak{p}_1)$, $Y_2 = \text{Spec}(A/\mathfrak{p}_2)$; prenons $X = Y_1$, $f: X \rightarrow Y$ étant l'injection canonique, qui est évidemment un morphisme équidimensionnel. Prenons d'autre part $Y' = Y_2$, $g: Y' \rightarrow Y$ étant l'injection canonique; alors on a $X' = X \times_Y Y' = \text{Spec}((A/\mathfrak{p}_1) \otimes_A (A/\mathfrak{p}_2)) = \text{Spec}(A/(\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2))$, et $\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2$ est un idéal maximal de A , donc X' est réduit à un point, et le morphisme $f': X' \rightarrow Y'$ n'est pas dominant, l'image par f' de l'unique point de X' étant un point fermé de Y' ; donc f' n'est pas équidimensionnel.

On peut aussi donner un contre-exemple où X et Y sont *intègres*, f fini et *birationnel* (et *a fortiori* équidimensionnel par (13.3.1, b)) $g: Y' \rightarrow Y$ fini et dominant. Soient A et \bar{A} les anneaux locaux définis dans (11.7.5), et prenons $Y = \text{Spec}(A)$, $X = \text{Spec}(\bar{A})$; d'autre part, avec les notations de (11.7.5), prenons $Y' = \text{Spec}(\bar{B})$; alors $X' = \text{Spec}(\bar{A} \otimes_A \bar{B}) = \text{Spec}(\bar{B} \otimes_B \bar{B})$; mais on vérifie aussitôt que $\bar{B} \otimes_B \bar{B}$ est composé direct des anneaux B/\mathfrak{p}' , B/\mathfrak{p}'' et de deux anneaux isomorphes à B/\mathfrak{n} , dont les spectres sont donc réduits à un point; comme les projections de ces points sont des points fermés de Y' , ici encore on voit que f' ne transforme pas une composante irréductible de X' en une partie partout dense d'une composante irréductible de Y' , donc f' n'est pas équidimensionnel.

Dans cet exemple, l'anneau A n'est pas géométriquement unibranche; nous allons voir au paragraphe suivant (14.4.6) que de tels phénomènes ne peuvent se produire lorsque les points de Y sont *géométriquement unibranches*. Le manque de stabilité de la notion de morphisme équidimensionnel restreint grandement son intérêt, au profit de la notion de morphisme universellement ouvert, qui va être étudiée en détail au paragraphe suivant.

§ 14. MORPHISMES UNIVERSELLEMENT OUVERTS

Les §§ 14 et 15 sont consacrés à l'étude de la notion de morphisme *universellement ouvert* (2.4.2). On a déjà vu (2.4.6) qu'un morphisme *plat* et localement de présentation finie est universellement ouvert, la réciproque étant inexacte. Au § 14, on examine d'abord les propriétés des dimensions des fibres d'un morphisme universellement ouvert $f: X \rightarrow Y$; lorsque X et Y sont localement noethériens, f se comporte à cet égard (14.2.1) comme un morphisme plat (cf. 6.1.2), et est en particulier *équidimensionnel* lorsqu'il est localement de type fini et dominant et que X est irréductible (14.2.2). Inversement, un morphisme équidimensionnel localement de type fini $f: X \rightarrow Y$ est universellement ouvert lorsqu'on suppose en outre que Y est *géométriquement unibranche*, et en particulier lorsque Y est *normal* (critère de Chevalley, 14.4.4). Nous montrons aussi que les morphismes universellement ouverts localement de type fini $f: X \rightarrow Y$ (lorsque X et Y sont

localement noethériens et Y irréductible) admettent « suffisamment » de *quasi-sections*, i.e. au voisinage d'un point fermé x d'une fibre $f^{-1}(y)$, il y a un sous-préschéma fermé X' de X contenant x et tel que la restriction $X' \rightarrow Y$ de f soit un morphisme *quasi-fini* (donc à fibres *discrètes*) et dominant (14.5.3).

Au § 15 on étudie diverses propriétés des fibres des morphismes universellement ouverts $f: X \rightarrow Y$, localement de type fini, notamment lorsque X et Y sont localement noethériens. On obtient ainsi en particulier un critère pour qu'un point $x \in X$ n'appartienne qu'à *une seule* composante irréductible de X , en termes de propriétés de la fibre $f^{-1}(f(x))$ de x : il suffit que Y soit géométriquement unibranche (par exemple normal) au point $f(x)$ et que $f^{-1}(f(x))$ soit géométriquement ponctuellement intègre au point x (15.3.3); si de plus Y est localement intègre au point $f(x)$, f est *plat* au point x et X localement intègre au point x . On étudie aussi la variation du *nombre géométrique de composantes connexes* d'une fibre $f^{-1}(y)$; par exemple, si f est universellement ouvert et *propre*, et les fibres de f géométriquement réduites, ce nombre est *localement constant* (15.5.7). Enfin, lorsque f admet une *section* g (ce qui sera le cas lorsque X est un *Y-schéma en groupes*) et que pour tout $y \in Y$, on désigne par X_y^0 la composante connexe de la fibre $X_y = f^{-1}(y)$ au point $g(y)$ (« composante neutre » dans le cas des groupes), on étudie la réunion X^0 des X_y^0 pour $y \in Y$, et on montre (15.6.4) que si f est universellement ouvert et les fibres X_y géométriquement réduites, alors X^0 est un ensemble *ouvert* dans X .

14.1. Morphismes ouverts.

(14.1.1) Rappelons (1.10.2) qu'une application continue $\psi: X \rightarrow Y$ est dite *ouverte en un point* $x \in X$ si l'image par ψ de *tout* voisinage de x dans X est un voisinage de $\psi(x)$ dans Y .

On notera que cela *n'implique pas* qu'il existe un système fondamental de voisinages de x dont les images soient *ouvertes* dans Y .

Proposition (14.1.2). — Soient X, Y deux espaces topologiques, $\psi: X \rightarrow Y$ une application continue, x un point de X , $y = \psi(x)$.

(i) Si ψ est ouverte en x , alors pour toute partie Y' de Y contenant $\psi(x)$ la restriction $\psi^{-1}(Y') \rightarrow Y'$ de ψ à Y' est ouverte au point x .

(ii) Supposons que Y soit réunion d'une famille localement finie de parties fermées (Y_i) et que pour tout i tel que $\psi(x) \in Y_i$, la restriction $\psi^{-1}(Y_i) \rightarrow Y_i$ de ψ soit ouverte au point x ; alors ψ est ouverte au point x .

(iii) Soient $\gamma: X' \rightarrow X$ une application continue, x' un point de X' ; si l'application composée $\psi \circ \gamma: X' \rightarrow Y$ est ouverte au point x' , ψ est ouverte au point $\gamma(x')$.

Si U est un voisinage de x , on a $\psi(U \cap \psi^{-1}(Y')) = \psi(U) \cap Y'$; d'où aussitôt (i). Pour prouver (ii), notons qu'il y a un voisinage W de $\psi(x)$ dans Y ne rencontrant que les parties fermées Y_i en nombre *fini* qui contiennent $\psi(x)$; donc W est réunion des $W \cap Y_i$ pour ces indices. Or, si U est un voisinage de x tel que $\psi(U) \cap Y_i$ soit un voisinage de $\psi(x)$ dans Y_i , il existe un voisinage $V \subset W$ de $\psi(x)$ dans Y tel que pour tous les i tels que $\psi(x) \in Y_i$,

on ait $V \cap Y_i \subset \psi(U) \cap Y_i$ et comme la réunion des $V \cap Y_i$ pour ces indices est V , on a $V \subset \psi(U)$, donc $\psi(U)$ est un voisinage de $\psi(x)$ dans Y . L'assertion (iii) est triviale.

Remarques (14.1.3). — (i) L'ensemble Z des points $x \in X$ où un morphisme est ouvert n'est pas nécessairement ouvert. Par exemple, soient K un corps, A l'anneau de polynômes $K[S, T]$, V le plan affine $\text{Spec}(A)$, X le sous-préschéma fermé de V « réunion de la droite X_1 définie par $T=0$ et de la droite X_2 définie par $S=0$ », c'est-à-dire $\text{Spec}(A/\alpha)$, où $\alpha = AST$; prenons $Y = X_2 = \text{Spec}(A/AS)$ et pour f la projection correspondant à l'injection canonique $K[T] \rightarrow A/\alpha$; alors on a $Z = X_2$, qui n'est pas ouvert dans X .

(ii) Soient X, Y deux préschémas noethériens irréductibles de points génériques ξ, η respectivement, $f: X \rightarrow Y$ un morphisme *dominant localement de type fini*; alors f est ouvert au point ξ . En effet, on peut évidemment se borner au cas où X et Y sont réduits (donc intègres) (1.5.4) et affines; en vertu du théorème de platitude générique (6.9.1), il existe un ouvert non vide V de Y tel que la restriction $f^{-1}(V) \rightarrow V$ de f soit un morphisme *plat*, et on conclut de (2.4.6) que cette restriction est un morphisme ouvert. Toutefois, comme il y a des morphismes dominants de type fini $f: X \rightarrow Y$ (où X et Y sont irréductibles) qui ne sont pas ouverts (voir par exemple (II, 8.1)), l'ensemble des points où un tel morphisme est ouvert n'est pas nécessairement fermé dans X .

(iii) Nous ignorons si, lorsque X et Y sont localement noethériens et $f: X \rightarrow Y$ un morphisme localement de type fini, l'ensemble des points de X où f est ouvert est ou non *localement constructible*.

Proposition (14.1.4). — Soient X, Y deux espaces topologiques, $\psi: X \rightarrow Y$ une application continue. Pour tout $y \in Y$, l'ensemble des $x \in \psi^{-1}(y)$ où ψ est ouvert est une partie fermée de $\psi^{-1}(y)$.

En effet, supposons que ψ ne soit pas ouvert en un point $x \in \psi^{-1}(y)$; il existe alors un voisinage ouvert V de x dans X tel que $\psi(V)$ ne soit pas un voisinage de y ; il en résulte que pour tout $x' \in V \cap \psi^{-1}(y)$, ψ n'est pas ouvert au point x' .

Remarque (14.1.5). — Même si X et Y sont localement noethériens et f un morphisme fini, il peut se faire que f soit ouvert en tous les points d'une fibre $f^{-1}(y)$, sans qu'il existe un *voisinage* de $f^{-1}(y)$ en tous les points duquel f soit ouvert. Soient par exemple K un corps, A l'anneau de polynômes $K[T_1, T_2, T_3]$, $V = \text{Spec}(A)$ l'espace affine à 3 dimensions sur K , $X = \text{Spec}(A/\alpha)$, où $\alpha = \mathfrak{b}\mathfrak{c}$, avec $\mathfrak{b} = (T_3)$ et $\mathfrak{c} = (T_1) + (T_2 - T_3)$ dans A , de sorte que X est réunion du plan $X_1 = \text{Spec}(A/\mathfrak{b})$ (« plan d'équation $T_3=0$ ») et de la droite $X_2 = \text{Spec}(A/\mathfrak{c})$ (« droite d'équations $T_1=0, T_2=T_3$ ») qui sont ses composantes irréductibles. Prenons $Y = X_1$ et soit $f: X \rightarrow Y$ la projection correspondant à l'injection canonique $K[T_1, T_2] \rightarrow A/\alpha$; si y est le point commun à X_1 et X_2 , $f^{-1}(y)$ est réduit à y et f est ouvert en ce point mais n'est ouvert en aucun point de X_2 dans un voisinage de y et distinct de y .

(14.1.6) Dans ce qui suit, le rôle essentiel sera joué par le critère (1.10.3) caractérisant les morphismes *localement de présentation finie* $f: X \rightarrow Y$ qui sont ouverts en un point x par le « relèvement des générations » : pour toute génératisation y' de $y=f(x)$, il existe $x' \in X$, génératisation de x , tel que $y'=f(x')$.

14.2. Morphismes ouverts et formule des dimensions.

Théorème (14.2.1). — Soient X, Y deux préschémas localement noethériens, $f: X \rightarrow Y$ un morphisme, x un point de X , $y=f(x)$. On suppose que f est ouvert aux points génériques des composantes irréductibles de $f^{-1}(y)$ contenant x . Alors on a la relation

$$(14.2.1.1) \quad \dim(\mathcal{O}_x) = \dim(\mathcal{O}_y) + \dim(\mathcal{O}_x \otimes_{\mathcal{O}_y} \mathbf{k}(y)).$$

Soit y' une généralisation quelconque de y distincte de y , et considérons le sous-préschéma fermé réduit Y' de Y ayant pour espace sous-jacent $\overline{\{y'\}}$; alors aucune composante irréductible X' de $f^{-1}(Y')$ contenant x ne peut être contenue dans $f^{-1}(y)$: en effet, si x' est le point générique de X' , on aurait $f(x')=y \neq y'$, et comme x' est sa seule généralisation dans $f^{-1}(Y')$, cela contredirait l'hypothèse que f est ouvert au point x' , en vertu du fait que a) implique c) dans (1.10.3). On peut donc appliquer (6.1.2) à l'homomorphisme local d'anneaux noethériens $\mathcal{O}_y \rightarrow \mathcal{O}_x$, d'où la conclusion.

Corollaire (14.2.2). — Soient Y un préschéma localement noethérien, $f: X \rightarrow Y$ un morphisme localement de type fini, x un point de X , $y=f(x)$. Supposons f ouvert aux points génériques des composantes irréductibles de $f^{-1}(y)$ contenant x . Alors f est équidimensionnel au point x dans chacun des deux cas suivants :

- (i) X est irréductible et f est dominant.
- (ii) Les anneaux \mathcal{O}_x et \mathcal{O}_y sont équidimensionnels.

Pour (i), cela résulte de (14.2.1) et de (13.2.3). Pour (ii), cela résulte de (14.2.1) et de (13.3.6).

Proposition (14.2.3). — Soient Y un préschéma irréductible localement noethérien, η son point générique, $f: X \rightarrow Y$ un morphisme localement de type fini, y un point de $f(X)$, Z une composante irréductible de $f^{-1}(y)$ telle que f soit ouvert au point générique de Z . Alors Z est contenue dans une composante irréductible X' de X dominant Y et telle que $\dim(Z) = \dim(X' \cap f^{-1}(y)) = \dim(X' \cap f^{-1}(\eta))$.

Cela résulte en effet de (14.2.1) appliqué au point générique de Z , et de (13.2.7).

Corollaire (14.2.4). — Avec les notations de (14.2.3), supposons que f soit ouvert en tous les points de $f^{-1}(y)$. Pour tout $z \in Y$, soient $E(z)$ l'ensemble des dimensions des composantes irréductibles de $f^{-1}(z)$ et $d(z) = \sup E(z) = \dim(f^{-1}(z))$. On a alors $E(y) \subset E(\eta)$, d'où $d(y) \leq d(\eta)$.

Cela résulte aussitôt de (14.2.3).

Corollaire (14.2.5). — Soient Y un préschéma localement noethérien, $f: X \rightarrow Y$ un morphisme propre, $y \in Y$ un point tel que f soit ouvert en tous les points de $f^{-1}(y)$. Alors la fonction $z \mapsto \dim(f^{-1}(z))$ est constante dans un voisinage de y .

Soient Y_i ($1 \leq i \leq n$) les sous-préschémas fermés réduits de Y ayant pour espaces sous-jacents les composantes irréductibles de Y contenant y ; si $f_i: f^{-1}(Y_i) \rightarrow Y_i$ est la restriction de f , on sait que chacun des f_i est propre (II, 5.4.5) et ouvert en tous les points de $f^{-1}(y)$ (14.1.2). Comme la réunion des Y_i est un voisinage de y dans Y ,

on voit qu'on peut se borner à démontrer le corollaire lorsque Y est irréductible; soit η son point générique. Il résulte de (14.2.4) que $d(y) \leq d(\eta)$; d'autre part, comme f est propre, on déduit de (13.1.5) que $z \mapsto \dim(f^{-1}(z))$ est semi-continue supérieurement; en particulier $d(y) \geq d(\eta)$, donc $d(y) = d(\eta)$. De plus, il y a un voisinage V de y tel que $d(z) \leq d(y)$ pour tout $z \in V$; mais comme z est spécialisation de η , on a d'autre part $d(z) \geq d(\eta)$, d'où finalement $d(z) = d(y)$ pour $z \in V$.

Corollaire (14.2.6). — Soient Y un préschéma localement noethérien, $f: X \rightarrow Y$ un morphisme ouvert de type fini, y un point de Y . Soient y_i ($1 \leq i \leq n$) les points génériques des composantes irréductibles de Y contenant y . Alors, avec les notations de (14.2.4) :

(i) Si pour $1 \leq i \leq n$, on a $E(y) = E(y_i)$ (resp. $d(y) = d(y_i)$), la fonction E (resp. d) est constante dans un voisinage de y .

(ii) Il existe un voisinage ouvert U de $f^{-1}(y)$ tel que la fonction $z \mapsto \dim(U \cap f^{-1}(z))$ soit constante dans un voisinage de y .

(i) Le même raisonnement que dans (14.2.5) montre qu'on peut se borner à considérer le cas où Y est irréductible, de point générique η . Si y' est une généralisation quelconque de y , on a alors (en appliquant (14.2.4) à la restriction $f^{-1}(Y') \rightarrow Y'$ de f , où $Y' = \overline{\{y'\}}$, et utilisant (14.1.2)) $E(y) \subset E(y') \subset E(\eta)$ et $d(y) \leq d(y') \leq d(\eta)$; cela montre que la relation $E(y) = E(\eta)$ (resp. $d(y) = d(\eta)$) entraîne $E(y) = E(y')$ (resp. $d(y) = d(y')$) pour toute généralisation y' de y . Or, en vertu de (9.5.5), les fonctions E et d sont localement constructibles, donc il résulte de (0_{III}, 9.2.5) appliqué à l'ensemble des z tels que $E(z) = E(y)$ (resp. $d(z) = d(y)$) que cet ensemble est un voisinage de y .

(ii) Pour chacun des y_i , $f^{-1}(y_i)$ est un espace noethérien puisque f est de type fini; soient x_{ij} ($1 \leq j \leq m_i$) les points génériques de ses composantes irréductibles, et posons $X'_{ij} = \overline{\{x_{ij}\}}$; montrons que le complémentaire U dans X de la réunion des X'_{ij} qui ne rencontrent pas $f^{-1}(y)$ (qui est évidemment un voisinage ouvert de $f^{-1}(y)$) répond à la question. En effet, la restriction $f|U: U \rightarrow Y$ de f est un morphisme ouvert de type fini (1, 6.3.5); pour tout couple (i, j) tel que $x_{ij} \in U$, x_{ij} est point maximal de $U \cap f^{-1}(y_i)$ et il résulte de (13.1.1) appliqué à la restriction $X_{ij} \rightarrow Y_i = \overline{\{y_i\}}$ de f (compte tenu de (1, 5.2.2) et de (1.5.4)) que toutes les composantes irréductibles de $X_{ij} \cap f^{-1}(y)$ ont une dimension $\geq \dim(X_{ij} \cap f^{-1}(y_i))$. Compte tenu de (14.2.3) appliqué à la restriction $f^{-1}(Y_i) \rightarrow Y_i$ de f , qui est un morphisme ouvert (14.1.2), $f^{-1}(y)$ est, pour chaque i , la réunion des composantes irréductibles de $X_{ij} \cap f^{-1}(y)$ ($1 \leq j \leq m_i$), donc $\dim(f^{-1}(y)) \geq \dim(U \cap f^{-1}(y_i))$; mais comme $f|U$ est ouvert, on a aussi $\dim(f^{-1}(y)) \leq \dim(f^{-1}(y_i) \cap U)$ en vertu de (14.2.4); on voit donc qu'on peut appliquer (i) à $f|U$, d'où la conclusion.

Remarque (14.2.7). — L'exemple (13.2.12, (iii)) montre que sous les hypothèses de (14.2.5) ou (14.2.6, (ii)), on ne peut, dans la conclusion, remplacer la fonction $z \mapsto \dim(f^{-1}(z))$ par la fonction $z \mapsto E(z)$; en effet, dans cet exemple, f est propre et plat (donc universellement ouvert (2.4.6)) et tout voisinage de l'unique point de $f^{-1}(y_0)$ contient les points génériques des composantes irréductibles de $f^{-1}(\eta)$.

14.3. Morphismes universellement ouverts.

(14.3.1) Rappelons (2.4.2) que dire qu'un morphisme $f: X \rightarrow Y$ est universellement ouvert signifie que pour tout morphisme $g: Y' \rightarrow Y$, $f_{(Y')} : X_{(Y')} \rightarrow Y'$ est ouvert; il suffit d'ailleurs qu'il en soit ainsi lorsque $Y' = Y[T_1, \dots, T_e]$, pour tout e (8.10.2) (et si Y est localement noethérien, il suffit donc qu'il en soit ainsi pour tout Y' localement noethérien).

Proposition (14.3.2). — Soit $f: X \rightarrow Y$ un morphisme de préschémas. Si f est universellement ouvert, alors, pour tout morphisme $g: Y' \rightarrow Y$, où Y' est irréductible, l'image par $f' = f_{(Y')} : X_{(Y')} \rightarrow Y'$ de toute composante irréductible de $X_{(Y')}$ est dense dans Y' . Réciproquement, si cette condition est vérifiée pour tout Y' irréductible et tout morphisme de type fini $g: Y' \rightarrow Y$, et si de plus f est localement de présentation finie, alors f est universellement ouvert.

En effet, il résulte de (1.10.4) que si f est universellement ouvert, il vérifie la condition de l'énoncé. Inversement, supposons que f soit localement de présentation finie, et montrons que pour tout entier e , si l'on pose $Y'' = Y[T_1, \dots, T_e]$, $f_{(Y'')}$ est ouvert. En effet, soit Y' un sous-préschéma fermé de Y'' ayant pour espace sous-jacent une partie fermée irréductible de Y'' ; le morphisme composé $Y' \rightarrow Y'' \rightarrow Y$ est de type fini, donc toute composante irréductible de $X_{(Y')}$ domine Y' par hypothèse; on déduit donc de (1.10.4) que $f_{(Y'')}$ est un morphisme ouvert.

Cette proposition montre que la définition (III, 4.3.9) coïncide dans le cas considéré avec la définition générale des morphismes universellement ouverts donnée dans (2.4.2).

A la notion de morphisme ouvert en un point (14.1.1) correspond de même la suivante :

Définition (14.3.3). — Soient $f: X \rightarrow Y$ un morphisme de préschémas, x un point de X . On dit que f est universellement ouvert au point x si, pour tout morphisme $g: Y' \rightarrow Y$, en posant $X' = X \times_Y Y'$, le morphisme $f' = f_{(X')} : X' \rightarrow Y'$ est ouvert en tout point x' de X' dont la projection dans X est x .

Remarques (14.3.3.1). — (i) Le raisonnement de (8.10.1) montre (avec les mêmes notations) que si x est un point de X , x_λ sa projection dans X_λ , alors, si f_μ est ouvert au point x_μ pour tout $\mu \geq \lambda$, f est ouvert au point x ; il suffit de se borner aux ouverts U de X contenant x et de remarquer que l'hypothèse implique que $f_\mu(U_\mu)$ est un voisinage de $f_\mu(x_\mu)$, donc $f(v_\mu^{-1}(U_\mu))$ est un voisinage de $f(x)$. On en déduit que l'énoncé (8.10.2) est encore exact quand on y remplace « universellement ouvert » par « universellement ouvert au point x », et « morphisme ouvert » par « morphisme ouvert en tout point x_n de X_n dont la projection dans X est x » : il suffit dans la démonstration de se limiter aux ouverts V contenant un x_n .

(ii) Le résultat de (14.1.4) est encore valable pour un morphisme $f: X \rightarrow Y$, en y remplaçant « ouvert » par « universellement ouvert ». En effet, supposons que f ne soit pas universellement ouvert en un point $x \in f^{-1}(y)$; il y a par suite un morphisme $Y' \rightarrow Y$ et un point $x' \in X'$ se projetant en x , tels que f' ne soit pas ouvert au point x' .

Or, si $y' = f'(x')$, la projection $f'^{-1}(y') \rightarrow f^{-1}(y)$ est un morphisme ouvert (2.4.10), et il y a, en vertu de (14.1.4), un voisinage V' de x' dans $f'^{-1}(y')$ où f' n'est pas ouvert; donc f n'est pas universellement ouvert aux points de l'image de V' dans $f^{-1}(y)$, qui est un voisinage de x dans $f^{-1}(y)$.

Proposition (14.3.4). — (i) Soient $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ deux morphismes, x un point de X , $y = f(x)$. Si f est universellement ouvert au point x et g universellement ouvert au point y , alors $g \circ f$ est universellement ouvert au point x . Inversement, si $g \circ f$ est universellement ouvert au point x , g est universellement ouvert au point y .

(ii) Si $f : X \rightarrow Y$ est un S -morphisme universellement ouvert au point $x \in X$, alors, pour tout changement de base $S' \rightarrow S$, $f_{(S')} : X_{(S')} \rightarrow Y_{(S')}$ est universellement ouvert en tout point de $X_{(S')}$ au-dessus de x .

(iii) Pour que $f : X \rightarrow Y$ soit universellement ouvert au point $x \in X$, il faut et il suffit que f_{red} le soit.

(iv) Soient $f : X \rightarrow Y$ un morphisme localement de présentation finie, x un point de X , $y = f(x)$; posons $Y_1 = \text{Spec}(\mathcal{O}_y)$, $X_1 = X \times_Y Y_1$, $f_1 = f_{(X_1)}$. Pour que f soit universellement ouvert au point x , il faut et il suffit que f_1 le soit (on rappelle (I, 3.6.5) que X_1 est canoniquement identifié à un sous-espace de X).

En effet (ii) est une conséquence évidente de la définition (14.3.3); il résulte aussi de la définition que pour démontrer l'assertion (i), il suffit de le faire lorsqu'on y supprime partout le mot « universellement », et cela résulte alors de (14.1.2). L'assertion (iii) résulte de (ii) et de ce que le morphisme canonique $X_{\text{red}} \rightarrow X$ est surjectif. Enfin, la condition (iv) est trivialement nécessaire. D'autre part, si elle est vérifiée, et si $g : Y' \rightarrow Y$ est un morphisme quelconque, $X' = X_{(X')}$, $f' = f_{(X')}$, x' un point de X' au-dessus de x , alors f' est localement de présentation finie, et pour voir qu'il est ouvert au point x' , il suffit d'appliquer le critère (I.10.3, b)). Soient $y' = f'(x')$, $Y'_1 = \text{Spec}(\mathcal{O}_{y'})$, $X'_1 = X' \times_{Y'} Y'_1$, $f'_1 = f'_{(X'_1)}$. Comme $g(y') = y$, le morphisme composé $Y'_1 \rightarrow Y' \xrightarrow{g} Y$ se factorise en $Y'_1 \rightarrow Y_1 \rightarrow Y$ (I, 2.4.4), donc $X'_1 = X_1 \times_{X_1} Y'_1$ et $f'_1 = (f_1)_{(X'_1)}$; la conclusion résulte alors aussitôt de l'hypothèse que f'_1 est ouvert au point x' et de (I.10.3).

Proposition (14.3.5). — Soient X, Y deux préschémas, $f : X \rightarrow Y$ un morphisme, x un point de X . Soit $(Y_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille localement finie de sous-préschémas fermés de Y telle que l'espace Y soit réunion des Y_i , et supposons que pour tout i tel que $f(x) \in Y_i$, la restriction $f^{-1}(Y_i) \rightarrow Y_i$ de f soit un morphisme universellement ouvert au point x ; alors f est universellement ouvert au point x .

Compte tenu de la définition, cela résulte de la proposition analogue (14.1.2, (ii)) pour les morphismes ouverts en un point.

Proposition (14.3.6). — Soient Y un préschéma localement noethérien, $f : X \rightarrow Y$ un morphisme localement de type fini. Pour que f soit universellement ouvert en un point $x \in X$, il faut et il suffit que la condition suivante soit vérifiée : pour tout morphisme $g : Y' \rightarrow Y$, où $Y' = \text{Spec}(A)$ est le spectre d'un anneau de valuation discrète, tel que l'image $g(y')$ du point fermé y' de Y' soit égale à $y = f(x)$, et pour tout point $x' \in X' = X \times_Y Y'$ dont les projections sur X et Y' sont x et y' respectivement, il existe une généralisation z' de x' dans X' dont la projection dans Y' est le point générique de Y' (autrement dit, il existe une composante irréductible de X' contenant x' et dominant Y').

De plus, on peut, dans la condition précédente, se borner au cas où A est complet, à un corps résiduel algébriquement clos, et où x' est rationnel sur $\mathbf{k}(y')$.

Si Y' est comme dans l'énoncé, la nécessité de la condition résulte de ce que f' doit être ouvert au point x' , et du critère (I.10.3). Pour voir que la condition est suffisante, considérons un morphisme de type fini $g: Y'' \rightarrow U$, et soient $X'' = X \times_Y Y''$, $f'' = f_{(Y'')} : X'' \rightarrow Y''$, et x'' un point de X'' au-dessus de x . Posons $y'' = f''(x'')$, et soit t une généralisation de y'' dans Y'' , distincte de y'' . Puisque Y'' est localement noethérien, il résulte de (II, 7.1.9) et (0_{III}, 10.3.1) qu'il existe un schéma $Y' = \text{Spec}(A)$, où A est un anneau de valuation discrète complet, dont le corps résiduel est une clôture algébrique de $\mathbf{k}(x'')$, et un morphisme $g: Y' \rightarrow Y''$ tels que, si s et y' sont le point générique et le point fermé de Y' , on ait $g(s) = t$ et $g(y') = y''$. Il y a alors un point x' de $X' = X \times_Y Y' = X'' \times_{Y''} Y'$ dont les projections dans X'' et Y' soient x'' et y' respectivement, et qui soit rationnel sur $\mathbf{k}(y')$ (I, 3.4.9). L'hypothèse entraîne qu'il y a une généralisation z' de x' dans X' dont la projection dans Y' soit s ; si z'' est la projection de z' dans X'' , z'' est une généralisation de x'' et sa projection dans Y'' est t' ; on conclut donc de (I.10.3) que f'' est ouvert au point x'' , donc que f est universellement ouvert au point x (14.3.3.1, (i)).

Corollaire (14.3.7). — Les notations étant celles de (14.3.6) :

(i) Étant donné un point $y \in Y$, pour que f soit universellement ouvert en tous les points de $f^{-1}(y)$, il faut et il suffit que pour tout morphisme $g: Y' \rightarrow Y$, où Y' est le spectre d'un anneau de valuation discrète, et où l'image $g(y')$ du point fermé y' de Y' est y , toute composante irréductible de $X' = X \times_Y Y'$ domine Y' .

(ii) Pour que f soit universellement ouvert, il faut et il suffit que pour tout morphisme $g: Y' \rightarrow Y$, où Y' est le spectre d'un anneau de valuation discrète, toute composante irréductible de $X' = X \times_Y Y'$ domine Y' .

Il est clair qu'il suffit de prouver (i); la nécessité de (i) résulte de (14.3.2) et sa suffisance de (14.3.6).

Proposition (14.3.8). — Soient Y un préschéma localement noethérien, irréductible, régulier et de dimension 1 (par exemple le spectre d'un anneau de Dedekind), $f: X \rightarrow Y$ un morphisme localement de type fini, y un point de Y . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) f_{red} est plat en tout point de $f^{-1}(y)$.
- b) f est universellement ouvert dans un voisinage de $(f^{-1}y)$.
- c) f est ouvert dans un voisinage de $f^{-1}(y)$.
- d) Toute composante irréductible de X rencontrant $f^{-1}(y)$ domine Y .

Comme f_{red} est localement de type fini (1.3.4), a) entraîne que f_{red} est plat dans un voisinage de $f^{-1}(y)$ (11.1.1), et il suffit d'appliquer (2.4.6) dans un tel voisinage pour voir que a) entraîne b). L'implication b) \Rightarrow c) est triviale, et l'implication c) \Rightarrow d) résulte de (1.10.4) appliqué à un voisinage de $f^{-1}(y)$. Reste à voir que d) entraîne a). On peut évidemment, en vertu de (1.3.4), se borner au cas où X est réduit. La question étant en outre locale sur X et sur Y , on peut supposer $Y = \text{Spec}(A)$ et $X = \text{Spec}(B)$ affines; si X_i ($1 \leq i \leq n$) sont les sous-préschémas fermés (intègres) de X ayant pour

espaces sous-jacents les composantes irréductibles de X , alors, pour tout $x \in X$, $\mathcal{O}_{X,x}$, étant réduit, est un sous-anneau du composé direct des $\mathcal{O}_{X_i,x}$; si $y=f(x)$, il suffira de montrer que chacun des $\mathcal{O}_{X_i,x}$ est un \mathcal{O}_y -module *sans torsion*, car il en sera alors de même de $\mathcal{O}_{X,x}$; comme par hypothèse \mathcal{O}_y est un anneau local régulier de dimension 1, c'est-à-dire un anneau de valuation discrète (II, 7.1.6), il résultera alors de (01, 6.3.4) que $\mathcal{O}_{X,x}$ est un \mathcal{O}_y -module *plat*. Mais si $X_i = \text{Spec}(B_i)$, où B_i est un anneau intègre, l'hypothèse *d*) entraîne que l'homomorphisme $A \rightarrow B_i$ est *injectif* (I, 1.2.7); donc B_i est un A -module sans torsion, et *a fortiori* $\mathcal{O}_{X_i,x}$ est un \mathcal{O}_y -module sans torsion.

Remarques (14.3.9). — (i) Dans l'énoncé de (14.3.8), on ne peut se dispenser de l'hypothèse que Y est *régulier*. Avec les notations de (11.7.5), prenons en effet $Y = \text{Spec}(A)$, $X = \text{Spec}(\bar{A})$, de sorte que $f: X \rightarrow Y$ est un morphisme *fini surjectif*; comme A est un anneau local intègre de dimension 1, ainsi que \bar{A} , il résulte aussitôt de (1.10.4) que le morphisme f est *ouvert*. Cependant f n'est pas universellement ouvert (ni *a fortiori* plat), comme le montre (11.7.5). On aurait un exemple analogue en prenant pour Y le schéma local au point double d'une courbe algébrique ayant un « point double ordinaire » et pour X le normalisé de Y .

(ii) L'exemple de (14.1.3, (i)) montre que l'ensemble des points de X où un morphisme est universellement ouvert n'est pas nécessairement ouvert, le morphisme f dans cet exemple étant universellement ouvert en tous les points où il est ouvert. L'exemple $f: X \rightarrow Y$ vu ci-dessus en (i) montre de même que l'ensemble des points où un morphisme est universellement ouvert n'est pas nécessairement fermé, car il est immédiat qu'en tous les points de X *sauf un* le morphisme f est universellement ouvert (c'est même un isomorphisme local). Il serait intéressant de savoir si l'ensemble des points où un morphisme est universellement ouvert est localement constructible.

Les deux propositions suivantes nous ont été signalées par M. Artin :

Lemme (14.3.10). — Soient A un anneau de valuation (non nécessairement discrète), k son corps résiduel, K son corps des fractions, et posons $S = \text{Spec}(A)$. Soient X un préschéma irréductible, $f: X \rightarrow S$ un morphisme dominant de type fini; soit $X_0 = X \otimes_A k$ (resp. $X_1 = X \otimes_A K$) la fibre de f au point fermé (resp. au point générique) de S . Alors, si $X_0 \neq \emptyset$, on a $\dim(X_0) = \dim(X_1)$.

On peut se borner au cas où X est affine, en remplaçant au besoin X par un ouvert affine contenant un point générique d'une composante irréductible de X_0 , de dimension maximale, et utilisant (4.1.1.3). Soit $n = \dim(X_0) \geq 0$; il résulte de (13.3.1.1) qu'il existe un voisinage U de X_0 dans X et un S -morphisme quasi-fini $g: U \rightarrow S[T_1, \dots, T_n] = Z$ tel que le morphisme restriction $g_0: U_0 = U \cap X_0 \rightarrow Z_0 = \text{Spec}(k[T_1, \dots, T_n])$ soit fini et *surjectif*. Par changement de base $\text{Spec}(K) \rightarrow S$ et restriction à l'ouvert $U_1 = U \cap X_1$ de X_1 , on déduit de g un morphisme quasi-fini $g_1: U_1 \rightarrow Z_1 = \text{Spec}(K[T_1, \dots, T_n])$. Comme U_1 est dense dans X_1 , on a $\dim(U_1) = \dim(X_1)$ (4.1.1.3); la proposition sera établie, en vertu de (4.1.2), si nous prouvons que le morphisme g_1 est *dominant*. Supposons le contraire; il existerait alors un polynôme $F_1 \neq 0$ dans $K[T_1, \dots, T_n]$ tel que $g_1(U_1) \subset V(F_1)$. Si ω est une valuation sur K associée à A , et si (a_α) est la famille des coefficients de F_1 , on peut, après multiplication de F_1 par un élément $\neq 0$ de K , supposer que l'on a $\inf_\alpha \omega(a_\alpha) = 0$; autrement dit, F_1 provient d'un polynôme $F \in A[T_1, \dots, T_n]$ (avec lequel il s'identifie) tel que l'image F_0 de F dans $k[T_1, \dots, T_n]$ soit *non nul*. Considérons alors dans Z l'ensemble fermé $V(F)$; on a $V(F) \cap Z_1 = V(F_1)$, et comme U_1 est dense dans U (puisqu'il contient le point générique de X), $g(U) \subset V(F)$; en parti-

culier, on aurait $g_0(U_0) \subset V(F) \cap Z_0 = V(F_0)$; mais puisque $F_0 \neq 0$, $V(F_0)$ est une partie fermée de Z_0 distincte de Z_0 et l'on aboutit à une contradiction. C.Q.F.D.

Proposition (14.3.11). — Soient $f : X \rightarrow S$ un morphisme de type fini, $(g_\lambda)_{\lambda \in L}$ une famille de morphismes universellement ouverts $g_\lambda : Y_\lambda \rightarrow S$, et pour tout $\lambda \in L$, soit $u_\lambda : Y_\lambda \rightarrow X$ un S -morphisme. Pour tout $s \in S$, posons $X_s = X \times_S \text{Spec}(\mathbf{k}(s))$, $(Y_\lambda)_s = Y_\lambda \times_S \text{Spec}(\mathbf{k}(s))$, et soit $(u_\lambda)_s : (Y_\lambda)_s \rightarrow X_s$ le morphisme $u_\lambda \times 1$ déduit de u_λ par changement de base. Soit $Z(s)$ l'adhérence dans X_s de la réunion des ensembles $(u_\lambda)_s((Y_\lambda)_s)$, et posons $d(s) = \dim(Z(s))$. Alors, pour toute généralisation s' d'un point $s \in S$, on a $d(s) \leq d(s')$.

On sait (II, 7.1.4) qu'il existe un anneau de valuation A' et un morphisme $h : S' = \text{Spec}(A') \rightarrow S$ tels que si a (resp. b) est le point fermé (resp. le point générique) de S' , on ait $h(a) = s$, $h(b) = s'$. En outre, le morphisme projection $p : X_s \otimes_{\mathbf{k}(s)} \mathbf{k}(a) \rightarrow X_s$ est surjectif et ouvert (2.4.10), donc fait de X_s un espace quotient de $X_s \otimes_{\mathbf{k}(s)} \mathbf{k}(a)$ par une relation d'équivalence ouverte; pour toute partie M de X_s , $p^{-1}(\overline{M})$ est donc égal à l'adhérence $\overline{p^{-1}(M)}$ (Bourbaki, *Top. gén.*, chap. I^{er}, 4^e éd., § 5, n° 3, prop. 7); on raisonne de même pour $X_{s'}$, et compte tenu de (I, 3.4.8), de (4.2.7) et du fait que les g_λ sont universellement ouverts, on voit qu'on peut se ramener à prouver la proposition sur la situation obtenue après changement de base $S' \rightarrow S$. Supposons donc $S' = S$, s étant le point fermé et s' le point générique de S . L'hypothèse que g_λ est ouvert entraîne que toute composante irréductible de Y_λ domine S (1.10.4), donc que son point générique est un point maximal de $(Y_\lambda)_{s'}$; si Z désigne l'adhérence dans X de $Z(s')$, on a donc $u_\lambda(Y_\lambda) \subset Z$, et par suite $(u_\lambda)_s((Y_\lambda)_s) \subset Z_s = Z \cap X_s$; autrement dit, on a $Z(s) \subset Z_s$, d'où $\dim(Z(s)) \leq \dim(Z_s)$. Mais en appliquant (14.3.10) à un sous-préschéma réduit de X ayant pour espace sous-jacent une composante irréductible de Z , on obtient $\dim(Z_s) \leq \dim(Z_{s'})$ (l'inégalité provenant de ce qu'il peut y avoir des composantes irréductibles de Z ne rencontrant pas $X_{s'}$). D'autre part, comme $Z(s')$ est par définition fermé dans $X_{s'}$, on a $Z_{s'} = Z(s')$, ce qui achève la démonstration.

Remarque (14.3.12). — Le cas envisagé par M. Artin était celui où $Y_\lambda = S$ pour tout λ , autrement dit le cas où (u_λ) est une famille de S -sections de X . Un autre cas utile est celui où la famille (u_λ) est réduite à un seul élément; on peut d'ailleurs toujours se ramener à ce cas en considérant le préschéma Y somme des Y_λ et les morphismes $g : Y \rightarrow S$ et $u : Y \rightarrow X$ dont les restrictions à chaque Y_λ sont respectivement g_λ et u_λ .

Proposition (14.3.13). — Soient $f : X \rightarrow Y$ un morphisme localement de type fini, y un point de Y , x un point maximal de la fibre $X_y = X \times_Y \text{Spec}(\mathbf{k}(y))$.

Considérons les conditions suivantes :

a) f est universellement ouvert au point x (ou encore en tout point de la composante irréductible de X_y de point générique x (14.3.3.1, (ii))).

b) Pour toute composante irréductible Y_0 de Y contenant y , il existe une composante irréductible Z de X contenant x , dominant Y_0 et telle que $\dim_x(X_y) = \dim_x(Z \cap X_y) = \dim(Z \cap X_\eta)$, où η est le point générique de Y_0 (ce qui entraîne que Z est équidimensionnelle sur Y_0 au point x (13.2.2)).

b') Pour tout voisinage ouvert U de x dans X et toute généralisation y' de y , on a $\dim(U \cap X_{y'}) \geq \dim_x(U \cap X_y)$.

Alors on a les implications $a) \Rightarrow b) \Leftrightarrow b')$.

Pour montrer que $b)$ implique $b')$, il suffit de remarquer que y' appartient à une composante irréductible Y_0 de Y contenant y , de point générique η ; prenant Z comme dans $b)$ et notant que le point générique de Z (qui est aussi celui de $Z \cap X_\eta$ ($0_1, 2.1.8$)) est contenu dans U , on a $\dim(U \cap X_{y'}) \geq \dim(U \cap Z \cap X_{y'})$, et, en vertu de ($13.1.6$), $\dim(U \cap Z \cap X_{y'}) \geq \dim(Z \cap X_\eta)$; d'où l'assertion, puisque $\dim_x(U \cap X_y) = \dim_x(X_y)$ ($4.1.1.3$).

Pour prouver que $b')$ implique $b)$, on peut d'abord remplacer X par $f^{-1}(Y_0)$, donc supposer $Y_0 = Y$; on peut se borner au cas où X et Y sont affines, puisque $\dim_x(U \cap X_y) = \dim_x(X_y)$ ($4.1.1.3$). Les composantes irréductibles W_i du préschéma noethérien X_η sont alors en nombre fini, et le complémentaire de la réunion des \overline{W}_i (adhérences dans X) qui ne contiennent pas x est un voisinage ouvert V de x . En remplaçant X par V , on peut donc supposer que $x \in \overline{W}_i$ pour tout i (l'hypothèse $b')$ entraîne $\dim(V \cap X_\eta) \geq 0$, donc x appartient à un des \overline{W}_i pour un i au moins). En outre, les \overline{W}_i sont exactement les composantes irréductibles de X qui dominent Y ($0_1, 2.1.8$); cela étant, si l'on avait, pour chacune de ces composantes Z , $\dim(Z \cap X_\eta) < \dim_x(X_y)$, on en conclurait $\dim(X_\eta) < \dim_x(X_y)$, contrairement à l'hypothèse $b')$. La relation $\dim_x(Z \cap X_y) = \dim(Z \cap X_\eta)$ résulte alors de ($13.1.6$).

Reste à démontrer que $a)$ entraîne $b')$. Tenant compte de ($\mathbf{II}, 7.1.4$) et de l'invariance des hypothèses et de la conclusion par changement de base (en vertu de ($4.2.7$)), on peut se borner au cas où Y est un spectre d'anneau de valuation, de point fermé y et de point générique y' , et où $U = X$. L'hypothèse que f est ouvert au point x entraîne qu'il existe une composante irréductible Z de X contenant x et dominant Y ($1.10.3$). Appliquant ($14.3.10$) à un voisinage de x dans Z , on en conclut que $\dim(Z \cap X_{y'}) = \dim_x(Z \cap X_y)$; mais comme x est maximal dans X_y , $Z \cap X_y$ contient la composante irréductible de X_y de point générique x , donc $\dim_x(Z \cap X_y) = \dim_x(X_y)$; d'autre part, on a $\dim(X_{y'}) \geq \dim(Z \cap X_{y'})$, ce qui achève de prouver $b')$.

Remarque (14.3.14). — Nous ignorons si dans ($14.3.13$), la conclusion subsiste lorsqu'on remplace l'hypothèse $a)$ par l'hypothèse plus faible que f est ouvert au point x . On peut montrer aisément qu'il suffirait de traiter le cas où Y est spectre d'un anneau local intègre, dont le point générique est isolé, et où X est un sous-préschéma fermé du fibré vectoriel $Y[T]$.

14.4. Le critère de Chevalley pour les morphismes universellement ouverts.

Théorème (14.4.1). — Soient $f: X \rightarrow Y$ un morphisme localement de type fini, y un point de Y , x un point maximal de la fibre $X_y = X \times_Y \text{Spec}(\mathbf{k}(y))$. Supposons y géométriquement unibranche. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

a) f est universellement ouvert au point x (ou encore en tout point de la composante irréductible de X_y de point générique x ($14.3.3.1$, (ii))).

b) Si Y_0 est l'unique composante irréductible de Y contenant y , η son point générique, il existe une composante irréductible Z de X contenant x , dominant Y_0 et telle que $\dim_x(Z \cap X_y) = \dim(Z \cap X_\eta)$ (ce qui signifie que Z est équidimensionnelle sur Y_0 au point x (13.2.2)).

b') Pour tout voisinage ouvert U de x dans X et toute généralisation y' de y , on a $\dim(U \cap X_{y'}) \geq \dim_x(U \cap X_y)$.

Si de plus Y est localement noethérien, ces conditions sont aussi équivalentes à la suivante :

c) f est ouvert au point x .

Notons d'abord que puisque $(\mathcal{O}_y)_{\text{red}}$ est intègre, y n'appartient qu'à une seule composante irréductible Y_0 de Y . Le fait que b) et b') sont équivalentes et que a) implique b') résulte de (14.3.13); d'autre part, si Y est localement noethérien, on a vu dans (14.2.3) que c) implique b). Il reste donc à montrer que lorsque y est géométriquement unibranche, b) entraîne a).

Lemme (14.4.1.1). — Soient Y un préschéma, $Y' = Y[T_1, \dots, T_n]$, y' un point de Y' , y son image dans Y . Si Y est géométriquement unibranche au point y , alors Y' est géométriquement unibranche au point y' .

En effet, comme pour tout $y \in Y$, $\text{Spec}(\mathbf{k}(y)[T_1, \dots, T_n])$ est géométriquement régulier sur $\mathbf{k}(y)$ (0, 17.3.7), le morphisme structural $Y' \rightarrow Y$ est lisse (6.8.1), et il suffit d'appliquer (11.3.14).

Lemme (14.4.1.2). — Soient A un anneau local intègre unibranche, B un anneau intègre contenant A et entier sur A , \mathfrak{n} un idéal premier de B au-dessus de l'idéal maximal \mathfrak{m} de A . Alors le morphisme $\text{Spec}(B_{\mathfrak{n}}) \rightarrow \text{Spec}(A)$ est surjectif, autrement dit, pour tout idéal premier \mathfrak{p} de A , il existe un idéal premier \mathfrak{q} de B tel que $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{n}$ et $\mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}$.

Soient K (resp. L) le corps des fractions de A (resp. B), A' la clôture intégrale de A , B' le sous-anneau de L engendré par A' et B , de sorte qu'on a un diagramme commutatif d'injections canoniques

$$\begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & B' \\ \uparrow & & \uparrow \\ A & \longrightarrow & A' \end{array}$$

Comme B' est entier sur B , il existe un idéal premier \mathfrak{n}' de B' tel que $\mathfrak{n}' \cap B = \mathfrak{n}$ (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. V, § 2, n° 1, th. 1), et (pour la même raison) $\text{Spec}(A') \rightarrow \text{Spec}(A)$ est surjectif. D'autre part, comme A est unibranche, A' est un anneau local, donc $\mathfrak{n}' \cap A'$, qui est au-dessus de l'idéal maximal \mathfrak{m} de A , est nécessairement égal à l'unique idéal maximal \mathfrak{m}' de A' . En vertu du second théorème de Cohen-Seidenberg (*loc. cit.*, § 2, n° 4, th. 3) le morphisme $\text{Spec}(B'_{\mathfrak{n}'}) \rightarrow \text{Spec}(A')$ est surjectif, donc il en est de même du composé $\text{Spec}(B'_{\mathfrak{n}'}) \rightarrow \text{Spec}(A') \rightarrow \text{Spec}(A)$; mais ce morphisme est aussi le composé $\text{Spec}(B'_{\mathfrak{n}'}) \rightarrow \text{Spec}(B_{\mathfrak{n}}) \rightarrow \text{Spec}(A)$, donc le morphisme $\text{Spec}(B_{\mathfrak{n}}) \rightarrow \text{Spec}(A)$ est surjectif.

Ces lemmes étant établis, revenons à la démonstration de l'implication b) \Rightarrow a) dans (14.4.1). En vertu de (14.3.3.1, (i)), il suffit de prouver que, pour tout entier $n \geq 0$ et tout point x' de $X' = X[T_1, \dots, T_n]$ au-dessus de x , le morphisme

$f' : X' \rightarrow Y' = Y[T_1, \dots, T_n]$, déduit de f par changement de base, est ouvert au point x' . Compte tenu du lemme (14.4.1.1), de (2.3.4) et (4.2.7), on est donc ramené à prouver que f est ouvert au point x : en outre, il suffit évidemment (14.1.2, (iii)) de montrer que la restriction de f à un sous-préschéma fermé de X ayant Z pour espace sous-jacent est ouverte au point x , si bien qu'on peut se borner au cas où $X=Z$ est irréductible. Quitte à remplacer X par un voisinage ouvert V de x tel que $V \cap X_y$ soit irréductible, on peut supposer, en vertu de (13.3.1), que le morphisme f se factorise en $X \xrightarrow{g} Y'' = Y[T_1, \dots, T_m] \rightarrow Y$, où g est quasi-fini, dominant et localement de type fini. Comme le morphisme structural $Y'' \rightarrow Y$ est ouvert (2.4.6), on est ramené à prouver que $g : X \rightarrow Y''$ est ouvert au point x . D'ailleurs, en vertu de (14.4.1.1), $g(x)$ est un point géométriquement unibranche de Y'' . On est donc ramené à prouver le lemme suivant :

Lemme (14.4.1.3). — Soient X, Y deux préschémas irréductibles, $f : X \rightarrow Y$ un morphisme localement quasi-fini et dominant. Si $x \in X$ est tel que $y=f(x)$ soit unibranche sur Y , alors f est ouvert au point x .

Il suffit de prouver que $f(\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})) = \text{Spec}(\mathcal{O}_{Y,y})$ (1.10.3). On peut donc se borner, par le changement de base $\text{Spec}(\mathcal{O}_{Y,y}) \rightarrow Y$, au cas où $Y = \text{Spec}(A)$, où A est un anneau local et y est le point fermé de Y (tenant compte de (I, 3.6.5) et (0_I, 2.1.8), qui prouvent que $X \times_Y \text{Spec}(\mathcal{O}_{Y,y})$ est irréductible); remplaçant f par f_{red} , on peut supposer X et Y réduits, donc intègres. Remplaçant éventuellement X et Y par des voisinages affines de x et y respectivement, on peut supposer (8.12.9) que le morphisme f se factorise en $X \xrightarrow{j} X_1 \xrightarrow{g} Y$, où j est une immersion ouverte et g un morphisme fini (évidemment dominant); comme X et X_1 sont affines, j est affine, donc séparé et quasi-compact, et par suite se factorise en $X \xrightarrow{u} X_2 \xrightarrow{h} X_1$, où X_2 est l'image fermée de X par j , h l'injection canonique et u une immersion ouverte (I, 9.5.3). En d'autres termes, on peut supposer que X_1 est intègre, ou encore de la forme $X_1 = \text{Spec}(B)$, où B est une A -algèbre intègre et finie, contenant A puisque g est dominant. Si \mathfrak{n} est l'idéal premier de B correspondant au point x , l'hypothèse que A est unibranche implique alors (14.4.1.2) que le morphisme $\text{Spec}(B_{\mathfrak{n}}) \rightarrow \text{Spec}(A)$ est surjectif, c'est-à-dire que $\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}) \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}_{Y,y})$ est surjectif. C.Q.F.D.

Corollaire (14.4.2). — Soient $f : X \rightarrow Y$ un morphisme localement de type fini, y un point géométriquement unibranche de Y , η le point générique de l'unique composante irréductible Y_0 de Y contenant y . Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) f est universellement ouvert en tous les points de X_y (ou, ce qui revient au même (14.3.3.1, (ii)), aux points maximaux de X_y).

b) Pour tout $x \in X_y$, il existe une composante irréductible Z de X contenant x et équidimensionnelle sur Y au point x (13.2.2).

b') Pour tout $x \in X_y$ et tout voisinage ouvert U de x dans X , on a

$$\dim(U \cap X_{\eta}) \geq \dim_x(U \cap X_y).$$

b'') Pour tout ouvert U de X , on a $\dim(U \cap X_{\eta}) \geq \dim(U \cap X_y)$.

Lorsque de plus Y est localement noethérien, ces conditions sont encore équivalentes à la suivante :

c) f est ouvert en tous les points de X_y (ou, ce qui revient au même (14.3.3.1, (ii)), aux points maximaux de X_y).

L'équivalence de a) et c) lorsque Y est localement noethérien résulte de (14.4.1); les conditions b) ou b'), appliquées aux points maximaux de X_y , entraînent a) en vertu également de (14.3.3.1, (ii)); enfin, b') et b'') sont équivalentes, car

$$\dim(U \cap X_y) = \sup_{x \in X_y} (\dim_x(U \cap X_y)).$$

Reste à voir que la condition a) entraîne b) et b') en tout point $x \in X_y$. Posons $d = \dim_x(X_y)$, et soit x' le point générique d'une composante irréductible de X_y contenant x et de dimension d . En vertu de a) et de (14.4.1), il y a une composante irréductible Z de X contenant x' et équidimensionnelle sur Y au point x' , donc telle que $\dim_{x'}(Z \cap X_y) = \dim(Z \cap X_{x'})$. Mais par construction $\dim_{x'}(Z \cap X_y) = \dim_{x'}(X_y) = d$, et $\dim_x(Z \cap X_y) \leq \dim(Z \cap X_y) = d$; compte tenu de (13.1.6), cela prouve que Z est équidimensionnel sur Y au point x ; donc a) entraîne b). De plus, on a $\dim(X_{x'}) \geq \dim(Z \cap X_{x'}) = d = \dim_x(X_y)$. Remplaçant X par un voisinage ouvert U de x , on voit ainsi que a) entraîne b'). C.Q.F.D.

Corollaire (14.4.3). — Soient Y un préschéma géométriquement unibranche, $f: X \rightarrow Y$ un morphisme localement de type fini. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) f est universellement ouvert.

b) Pour tout ouvert U de X , tout $y \in Y$ et toute générisation y' de y on a

$$\dim(U \cap X_{y'}) \geq \dim(U \cap X_y).$$

Si de plus Y est localement noethérien, ces conditions sont aussi équivalentes à la suivante :

c) f est ouvert.

Corollaire (14.4.4) (critère de Chevalley). — Soit $f: X \rightarrow Y$ un morphisme localement de type fini.

(i) Si f est équidimensionnel en un point $x \in X$ (13.3.2) et si $y = f(x)$ est un point géométriquement unibranche de Y , f est universellement ouvert au point x .

(ii) Si Y est géométriquement unibranche, f est universellement ouvert en tous les points de X où f est équidimensionnel, et l'ensemble de ces points est ouvert dans X . En particulier, si f est équidimensionnel, il est universellement ouvert.

L'assertion (ii) est conséquence triviale de (i), puisqu'on sait déjà que l'ensemble des points où f est équidimensionnel est ouvert (13.3.2). Quant à l'assertion (i), elle résulte de ce que l'hypothèse implique que la condition b) de (14.4.1) est vérifiée au point générique d'une composante irréductible de X_y contenant x , compte tenu de (13.3.1); il suffit donc d'appliquer (14.4.1).

Remarque (14.4.5). — On peut prouver que si Y est localement noethérien, et si toutes les générisations de $y = f(x)$ sont des points géométriquement unibranches de Y (cf. (6.15.2)), alors, si f est équidimensionnel au point x , il est universellement ouvert dans un voisinage de x .

Corollaire (14.4.6). — Soient Y un préschéma localement noethérien, $f: X \rightarrow Y$ un morphisme localement de type fini. Soit y un point géométriquement unibranche de Y , et supposons en outre que pour tout $x \in f^{-1}(y)$, l'anneau $\mathcal{O}_{X,x}$ soit équidimensionnel. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) f est équidimensionnel (13.3.2) en tous les points de $f^{-1}(y)$.
- b) f est ouvert en tous les points de $f^{-1}(y)$.
- c) f est universellement ouvert en tous les points de $f^{-1}(y)$.

En effet, c) implique trivialement b), et a) implique c) en vertu de (14.4.4); enfin, en raison des hypothèses sur \mathcal{O}_y et \mathcal{O}_x , b) implique a) par (14.2.2). Plus généralement :

Proposition (14.4.7). — Soient Y un préschéma localement noethérien, $f: X \rightarrow Y$ un morphisme localement de type fini, x un point de X , tel que $y = f(x)$ soit géométriquement unibranche. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) f est équidimensionnel (13.3.2) au point x .
- b) L'anneau \mathcal{O}_x est équidimensionnel et f est ouvert aux points génériques des composantes irréductibles de $f^{-1}(y)$ contenant x (donc aussi en tout point d'une telle composante).
- c) L'anneau \mathcal{O}_x est équidimensionnel, et f est universellement ouvert aux points génériques des composantes irréductibles de $f^{-1}(y)$ contenant x (donc aussi en tout point d'une telle composante).

En outre, lorsque ces conditions sont satisfaites, pour tout sous-préschéma fermé réduit X_i de X ayant pour espace sous-jacent une composante irréductible de X contenant x , la restriction $f_i: X_i \rightarrow Y$ de f est un morphisme équidimensionnel au point x , et universellement ouvert en tous les points des composantes irréductibles de $f^{-1}(y) \cap X_i$ qui contiennent x .

La condition a) implique que f est équidimensionnel en tous les points génériques des composantes irréductibles de $f^{-1}(y)$ contenant x (13.3.1), et par suite (14.4.4) universellement ouvert en ces points; le même raisonnement appliqué à chaque f_i (compte tenu de (13.3.3)) prouve la dernière assertion de la proposition, compte tenu de (14.3.3.1, (ii)). En outre, d'après (14.2.1), on a les relations

$$(14.4.7.1) \quad \dim(\mathcal{O}_{X_i, x}) = \dim(\mathcal{O}_y) + \dim(\mathcal{O}_{X_i, x} \otimes_{\mathcal{O}_y} \mathbf{k}(y))$$

$$(14.4.7.2) \quad \dim(\mathcal{O}_{X, x}) = \dim(\mathcal{O}_y) + \dim(\mathcal{O}_{X, x} \otimes_{\mathcal{O}_y} \mathbf{k}(y))$$

et puisque f est équidimensionnel au point x , il résulte de (13.3.1) que l'on a $\dim_x(X_i \cap f^{-1}(y)) = \dim_x(f^{-1}(y))$, donc (5.2.3) $\dim(\mathcal{O}_{X_i, x} \otimes_{\mathcal{O}_y} \mathbf{k}(y)) = \dim(\mathcal{O}_{X, x} \otimes_{\mathcal{O}_y} \mathbf{k}(y))$. On conclut donc que $\dim(\mathcal{O}_{X_i, x}) = \dim(\mathcal{O}_{X, x})$ pour tout i , autrement dit $\mathcal{O}_{X, x}$ est équidimensionnel, et cela achève de montrer que a) entraîne c). Il est clair que c) entraîne b); enfin, b) entraîne la relation (14.4.7.2) en vertu de (14.2.1); il résulte alors de (13.3.6) que b) entraîne a).

Proposition (14.4.8). — Soient Y un préschéma noethérien, $f: X \rightarrow Y$ un morphisme localement de type fini, y un point de Y , x un point maximal de $X_y = f^{-1}(y)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) Le morphisme f est universellement ouvert au point x , autrement dit, pour tout changement de base $g: Y' \rightarrow Y$, on a la propriété $\mathbf{P}(Y')$: pour tout point x' de $X' = X \times_Y Y'$ au-dessus de x , le morphisme $f' = f_{(x')} : X' \rightarrow Y'$ est ouvert au point x' .

a') La propriété $\mathbf{P}(Y')$ est vraie pour tout morphisme fini $g : Y' \rightarrow Y$.

a'') La propriété $\mathbf{P}(Y'')$ est vraie pour le normalisé Y'' de Y_{red} (II, 6.3.8).

b) Pour tout point x'' de $X'' = X \times_Y Y''$ au-dessus de x , il existe une composante irréductible Z'' de X'' contenant x'' et équidimensionnelle sur Y'' au point x'' .

Il est trivial que a) implique a'). Pour montrer que a') implique a'') notons que l'on peut écrire $Y'' = \text{Spec}(\mathcal{B})$, où \mathcal{B} est une \mathcal{O}_Y -Algèbre quasi-cohérente entière sur \mathcal{O}_Y ; comme Y est noethérien, \mathcal{B} est limite inductive de ses sous- \mathcal{O}_Y -Algèbres \mathcal{B}_λ qui sont quasi-cohérentes et de type fini (I, 9.6.6); mais alors les \mathcal{B}_λ sont des \mathcal{O}_Y -Algèbres finies (II, 6.1.2); on peut donc écrire $Y'' = \varprojlim Y'_\lambda$, où $Y'_\lambda = \text{Spec}(\mathcal{B}_\lambda)$, d'où $X'' = X \times_Y Y'' = \varprojlim X'_\lambda$, avec $X'_\lambda = X \times_Y Y'_\lambda$. En vertu de a'), les morphismes $f'_\lambda : X'_\lambda \rightarrow Y'_\lambda$ sont ouverts en tous les points de X'_λ au-dessus de x ; on en conclut que f'' est ouvert en tous les points de X'' au-dessus de x , par (8.10.1) et (14.3.3.1, (i)).

Comme le préschéma Y'' est normal par définition, le fait que b) entraîne a'') résulte de (14.4.4) appliqué à la composante irréductible équidimensionnelle de l'énoncé et à la restriction de f'' à cette composante. Il reste donc à montrer que a'') entraîne a) et b). Compte tenu de (1.10.3), on peut se borner au cas où $Y = \text{Spec}(\mathcal{O}_y)$, en notant que le morphisme canonique $\text{Spec}(\mathcal{O}_y) \rightarrow Y$ est universellement bicontinu (I, 3.6.5), et d'autre part que $Y'' \times_Y \text{Spec}(\mathcal{O}_y)$ est le normalisé de $(\text{Spec}(\mathcal{O}_y))_{\text{red}}$ comme il résulte de la permutabilité des opérations de fermeture intégrale et de localisation (Bourbaki, Alg. comm., chap. V, § 1, n° 5, prop. 16). Supposant donc $Y = \text{Spec}(A)$, où A est un anneau local noethérien, et y le point fermé de Y , on sait (0, 23.2.5) qu'il existe une factorisation

$$Y'' \xrightarrow{u} Y_1 \xrightarrow{v} Y$$

du morphisme structural, telle que v soit un morphisme fini surjectif, u un morphisme entier, radiciel et dominant, donc surjectif (II, 6.1.10) et par suite un homéomorphisme universel (2.4.5). Si l'on pose $X_1 = X \times_Y Y_1$, la projection $X'' \rightarrow X_1$ est donc un homéomorphisme, et l'hypothèse a'') entraîne par suite que $f_1 = f_{(Y_1)} : X_1 \rightarrow Y_1$ est ouvert en tous les points de X_1 au-dessus de x . En outre, cela montre que pour prouver la propriété b), il suffit de prouver la même propriété où l'on remplace Y'' , X'' et x'' par Y_1 , X_1 et un point x_1 de X_1 au-dessus de x . Mais Y_1 est noethérien et en outre il est géométriquement unibranche puisque Y'' est normal et u radiciel (6.15.1); la propriété à prouver résulte donc de (14.4.1). Il reste à montrer que f est universellement ouvert au point x , ce qui résultera du lemme suivant :

Lemme (14.4.8.1). — Soit $v : Y_1 \rightarrow Y$ un morphisme fermé (resp. universellement fermé) et surjectif. Pour qu'un morphisme $f : X \rightarrow Y$ soit ouvert (resp. universellement ouvert) en un point $x \in X$, il suffit que $f_1 = f_{(Y_1)} : X_1 = X \times_Y Y_1 \rightarrow Y_1$ soit ouvert (resp. universellement ouvert) en tous les points de X_1 au-dessus de x .

La seconde assertion résulte trivialement de la première et du fait que pour tout changement de base $Y' \rightarrow Y$, le morphisme $v_{(Y')} : Y_1 \times_Y Y' \rightarrow Y'$ est encore surjectif et est fermé si v est universellement fermé. Pour prouver la première assertion, considérons

un voisinage ouvert U de x dans X ; comme v est fermé et surjectif, pour que $f(U)$ soit un voisinage de $y=f(x)$, il faut et il suffit que $v^{-1}(f(U))$ soit un voisinage de $v^{-1}(y)$. Mais si $p : X_1 \rightarrow X$ est la projection canonique, on a $v^{-1}(f(U)) = f_1(p^{-1}(U))$ (I, 3.4.8), et l'hypothèse entraîne que $f_1(p^{-1}(U))$ est un voisinage de $f_1(p^{-1}(x)) = v^{-1}(y)$ (I, 3.4.8).

Corollaire (14.4.9). — Soient Y un préschéma noethérien, $f : X \rightarrow Y$ un morphisme localement de type fini. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) f est universellement ouvert, autrement dit, pour tout changement de base $Y' \rightarrow Y$, le morphisme $f_{(Y')} : X \times_Y Y' \rightarrow Y'$ est ouvert.

a') Pour tout morphisme fini $Y_1 \rightarrow Y$, $f_{(Y_1)}$ est ouvert.

a'') Si Y'' est le normalisé de Y_{red} , $f_{(Y'')}$ est ouvert.

b) Pour tout point x'' de $X'' = X \times_Y Y''$, il existe une composante irréductible Z'' de X'' contenant x'' et équidimensionnelle sur Y'' au point x'' (cf. (14.4.10, (ii))).

Cela résulte aussitôt de (14.4.8) et (14.1.4).

Remarques (14.4.10). — (i) L'équivalence des conditions a) et b) dans (14.4.8) (resp. (14.4.9)) est encore valable pour un préschéma Y quelconque et un morphisme f localement de type fini. En effet, a) entraîne b) en vertu de (14.4.1); inversement, b) entraîne que f'' est universellement ouvert aux points de X'' au-dessus de X (resp. en tout point de X'') en vertu de (14.4.1), et on en conclut la propriété a) en appliquant le lemme (14.4.8.1) au morphisme entier et surjectif $Y'' \rightarrow Y$.

Il se peut que, dans (14.4.1), pour l'équivalence de a) et c), l'hypothèse supplémentaire que Y est noethérien soit superflue (cf. (14.3.14)). S'il en est ainsi, les hypothèses noethériennes sont également superflues dans (14.4.2), (14.4.3), (14.4.8) et (14.4.9).

(ii) On peut donner des exemples de morphismes $f : X \rightarrow Y$ ayant les propriétés suivantes : Y est noethérien, régulier et de dimension 2, f est universellement ouvert et de type fini, X a deux composantes irréductibles X_1, X_2 , mais la restriction $X_1 \rightarrow Y$ de f à l'une d'elles n'est pas un morphisme ouvert. Le principe de la construction s'appuie sur la méthode générale de « recollement » qui sera exposée au chap. V, et ne peut donc qu'être esquissé ici. On part d'un point fermé y de Y , et on considère le Y -schéma Y_1 obtenu en faisant éclater y (II, 8.1.3); si $f_1 : Y_1 \rightarrow Y$ est le morphisme structural, on sait que la restriction de f_1 à $f_1^{-1}(Y - \{y\})$ est un isomorphisme sur $Y - \{y\}$ (loc. cit.),

tandis que la fibre $f_1^{-1}(y)$ est isomorphe à $\text{Proj}(S)$, où $S = \bigoplus_{k=0}^{\infty} m_y^k / m_y^{k+1}$ (II, 3.5.3), c'est-à-dire ici à $\mathbf{P}_{\mathbf{k}(y)}^1$: il résulte de (14.4.1) que f_1 n'est pas ouvert au point générique de $f_1^{-1}(y)$. D'autre part, posons $Y_2 = \mathbf{P}_Y^1$, et soit $f_2 : Y_2 \rightarrow Y$ le morphisme structural; il résulte de (II, 8.4.4) que f_2 est plat, donc universellement ouvert (2.4.6); en outre (II, 3.5.3), $f_2^{-1}(y)$ est isomorphe à $\mathbf{P}_{\mathbf{k}(y)}^1$; il suffit alors de « recoller » Y_1 et Y_2 le long des fibres isomorphes $f_1^{-1}(y)$ et $f_2^{-1}(y)$, ce qui donne un morphisme $f : X \rightarrow Y$ où les composantes irréductibles X_1, X_2 de X s'identifient canoniquement à Y_1 et Y_2 respectivement, et les restrictions de f à ces composantes à f_1 et f_2 .

Rappelons toutefois (12.1.1.5) que si Y est localement noethérien, $f : X \rightarrow Y$ de type fini et plat, alors toute composante irréductible de X est équidimensionnelle sur Y (et par suite la restriction de f à une telle composante est universellement ouverte si tous les points de Y sont géométriquement unibranches).

(iii) Rappelons (12.1.2, (i)) qu'il y a des morphismes $f : X \rightarrow Y$ ayant les propriétés suivantes : Y est noethérien (non géométriquement unibranche), f est fini et plat (et même étale (17.6.3)), mais la restriction de f à une composante irréductible de X n'est pas un morphisme ouvert (bien que f lui-même le soit d'après (2.4.6)).

(iv) Le critère de Chevalley (14.4.4) explique l'importance de la notion de morphisme universellement ouvert. Cette notion permet en effet, dans de nombreux résultats, plus ou moins classiques, de remplacer une hypothèse de normalité par l'hypothèse qu'un certain morphisme est universellement ouvert; l'énoncé plus général

ainsi obtenu s'appliquera en particulier à des morphismes *plats* (2.4.6), dont l'importance en géométrie algébrique va croissant. On peut considérer que les énoncés faisant intervenir l'hypothèse qu'un morphisme est universellement ouvert sont des généralisations communes d'énoncés faisant intervenir une hypothèse de normalité et d'énoncés faisant intervenir une hypothèse de platitude.

14.5. Morphismes universellement ouverts et quasi-sections.

Lemme (14.5.1). — Soient Y un préschéma irréductible localement noethérien, $f : X \rightarrow Y$ un morphisme localement de type fini, x un point de X , tel que f soit équidimensionnel (13.3.2) au point x ; on pose $y = f(x)$, $e = \dim_x(f^{-1}(y))$. Soit X' une partie fermée irréductible de X contenant x , n un entier tel que l'on ait $\text{codim}(X', X) \leq n$ et $\dim_x(X' \cap f^{-1}(y)) \leq e - n$. Alors on a nécessairement $\text{codim}(X', X) = n$, $\dim_x(X' \cap f^{-1}(y)) = e - n$, et la restriction $X' \rightarrow Y$ de f est un morphisme équidimensionnel en x (et a fortiori dominant).

La question étant locale sur X , on peut supposer que f est de type fini et équidimensionnel, de sorte que pour tout $z \in Y$, toutes les composantes irréductibles de $f^{-1}(z)$ sont de dimension e (13.3.1, a''). Soient x' le point générique de X' , $y' = f(x')$, $Y' = \overline{\{y'\}} = \overline{f(X')}$ et posons $Z = f^{-1}(Y')$. En vertu de (0, 14.2.2), on a

$$(14.5.1.1) \quad \text{codim}(X', Z) \leq n$$

et si les deux membres sont égaux, on a nécessairement $\text{codim}(X', X) = n$ et Z contient une composante irréductible de X , ce qui entraîne (13.3.1) que $f(X')$ est dense dans Y et par suite $Z = X$; donc l'égalité $\text{codim}(X', Z) = n$ équivaut à la conjonction de l'égalité $\text{codim}(X', X) = n$ et de la relation $Z = X$.

D'autre part, en raisonnant dans les préschémas réduits de Y et X ayant Y' et Z respectivement pour espaces sous-jacents, on déduit de (5.1.2) et de (I, 3.6.5) que l'on a

$$(14.5.1.2) \quad \text{codim}(X' \cap f^{-1}(y'), f^{-1}(y')) = \text{codim}(X', Z).$$

En vertu de l'hypothèse, $f^{-1}(y')$ est biéquidimensionnel (5.2.1) et de dimension e , donc (0, 14.3.5), on a, en vertu de (14.5.1.2) et (14.5.1.1)

$$(14.5.1.3) \quad e' = \dim(X' \cap f^{-1}(y')) = e - \text{codim}(X', Z) \geq e - n$$

l'égalité ayant lieu si et seulement si $\text{codim}(X', X) = n$ et si $f(X')$ est dense dans Y .

Enfin, (13.1.1), on a $\dim_x(X' \cap f^{-1}(y)) \geq e'$, d'où, par (14.5.1.3),

$$(14.5.1.4) \quad \dim_x(X' \cap f^{-1}(y)) \geq e' \geq e - n.$$

Or, par hypothèse, on a aussi $\dim_x(X' \cap f^{-1}(y)) \leq e - n$, d'où les conclusions de la proposition.

Corollaire (14.5.2). — Les hypothèses sur f , X , Y , x étant celles de (14.5.1), supposons en outre que x ne soit pas point maximal de $f^{-1}(y)$. Alors il existe un voisinage ouvert affine U de x dans X , et une section $g \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ telle que l'ensemble X' des $x' \in U$ tels que $g(x') = 0$ contienne x et ne contienne aucun point maximal de $f^{-1}(y)$. Pour tout g ayant ces propriétés, X' est équidimensionnel sur Y au point x , et l'on a

$$(14.5.2.1) \quad \dim_x(X' \cap f^{-1}(y)) = e - 1 \quad \text{et} \quad \text{codim}(X', X) = 1.$$

On peut se borner au cas où $X=U$ est un voisinage ouvert affine de x tel que toutes les composantes irréductibles de $f^{-1}(y)$ contiennent x . Ces composantes correspondent aux idéaux premiers minimaux de $\mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_y\mathcal{O}_x$, et par hypothèse ces idéaux sont distincts de $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_y\mathcal{O}_x$ (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 1, n° 1, prop. 2); pour obtenir un $g \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ vérifiant les conditions de l'énoncé, il suffit de prendre $g \in \mathfrak{I}_x$ tel que l'image de g dans \mathfrak{m}_x n'appartienne à aucun des idéaux premiers précédents. D'ailleurs, on a $\text{codim}(X', X) \leq 1$ (5.1.8), et comme X' ne contient aucune des composantes irréductibles de $f^{-1}(y)$ et que celles-ci sont de dimension e , on a (0, 14.2.2.2) $\dim_x(X' \cap f^{-1}(y)) \leq e - 1$. Il suffit alors d'appliquer (14.5.1).

Proposition (14.5.3). — Soient Y un préschéma irréductible localement noethérien, $f : X \rightarrow Y$ un morphisme localement de type fini, x un point de X . On suppose que f est équidimensionnel au point x et que x est fermé dans $f^{-1}(f(x))$. Alors il existe une partie irréductible X' de X , localement fermée dans X , contenant x et telle que la restriction $X' \rightarrow Y$ de f (où X' est le sous-préschéma réduit de X ayant X' pour espace sous-jacent) soit un morphisme quasi-fini et dominant.

En effet, avec les notations de (14.5.2), l'hypothèse que x est fermé dans $f^{-1}(y)$ entraîne que x n'est pas point maximal de $X' \cap f^{-1}(y)$ tant que $e - 1 \geq 1$. Il suffit donc d'appliquer (14.5.2) en raisonnant par récurrence descendante sur $e = \dim_x(f^{-1}(f(x)))$ jusqu'à ce que l'on arrive à $e = 1$; l'application de (14.5.2) dans ce dernier cas donne un X' tel que $X' \cap f^{-1}(f(x))$ soit noethérien et de dimension 0, donc fini et discret; comme alors X' est équidimensionnel sur Y , $X' \cap f^{-1}(f(x'))$ est de dimension 0 pour tout $x' \in X'$, ce qui entraîne que la restriction $X' \rightarrow Y$ de f est un morphisme quasi-fini (II, 6.2.2).

Corollaire (14.5.4). — Sous les hypothèses de (14.5.3), supposons en outre que $Y = \text{Spec}(A)$, où A est un anneau local noethérien intègre et complet, et que $y = f(x)$ soit l'unique point fermé de Y . Alors, il existe un anneau local intègre A' , contenant A , qui est une A -algèbre finie et possède la propriété suivante : si l'on pose $Y' = \text{Spec}(A')$ et $X' = X \times_Y Y'$, il existe une Y' -section $h : Y' \rightarrow X'$ telle que le morphisme composé $Y' \xrightarrow{h} X' \rightarrow X$ soit une immersion dont l'image contient x .

Remplaçant au besoin X par un sous-préschéma réduit irréductible de X , on peut, en vertu de (14.5.3), se borner au cas où le morphisme f est déjà quasi-fini et dominant. Utilisant (II, 6.2.5), on en déduit que $\mathcal{O}_x = A'$ est un anneau intègre qui est une A -algèbre finie, et que X est somme disjointe du sous-préschéma fermé $Y' = \text{Spec}(A')$ et d'un sous-préschéma Y'' ; le schéma Y' répond à la question, le morphisme composé $Y' \rightarrow X' \rightarrow X$ n'étant autre que le morphisme canonique $\text{Spec}(\mathcal{O}_x) \rightarrow X$.

Remarque (14.5.5). — Si on n'exige pas que dans l'énoncé de (14.5.4), le morphisme $Y' \rightarrow X$ soit une immersion, on peut supposer que A' est en outre *intégralement clos* : il suffit en effet de remplacer A' par sa *clôture intégrale* A_1 , car on sait (0, 23.1.5) que A_1 est un A -module de type fini.

Proposition (14.5.6). — Soient Y un préschéma localement noethérien, irréductible, régulier et de dimension 1, $f : X \rightarrow Y$ un morphisme localement de type fini, y un point de Y . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) f_{red} est plat en tout point de $f^{-1}(y)$.

b) f est universellement ouvert dans un voisinage de $f^{-1}(y)$.

c) f est ouvert dans un voisinage de $f^{-1}(y)$.

d) Toute composante irréductible de X rencontrant $f^{-1}(y)$ domine Y .

e) Pour tout point $x \in f^{-1}(y)$, fermé dans $f^{-1}(y)$, et toute composante irréductible X_i de X contenant x , il existe une partie irréductible X' de X , localement fermée dans X , contenant x , contenue dans X_i , et telle que la restriction $X' \rightarrow Y$ de f soit un morphisme quasi-fini et dominant.

L'équivalence de a), b), c) et d) a déjà été démontrée (14.3.8). Il est clair que e) entraîne d), car pour toute composante irréductible X_i de X rencontrant $f^{-1}(y)$, il existe dans $X_i \cap f^{-1}(y)$ un point fermé dans cet espace (5.1.11). Enfin, pour prouver que c) entraîne e), on peut se borner au cas où f est un morphisme de type fini; considérons un point fermé x de $f^{-1}(y)$ et soit X_i une composante irréductible de X contenant x . Comme la restriction $f_i : X_i \rightarrow Y$ de f à X_i est un morphisme dominant, il résulte de l'équivalence de c) et d) pour f_i que ce morphisme est ouvert aux points génériques de $X_i \cap f^{-1}(y)$. Il résulte donc de (14.2.2) que f_i est équidimensionnel au point x , et on conclut alors à l'aide de (14.5.3).

Remarque (14.5.7). — Si, dans l'énoncé de (14.5.5), on suppose que $Y = \text{Spec}(A)$, où A est un anneau de valuation discrète complet, et que y est le point fermé de Y , on peut en outre supposer que $X' = \text{Spec}(A')$, où A' est un anneau de valuation discrète qui est une A -algèbre finie, comme le montre la démonstration de (14.5.4) et le fait qu'un anneau local intègre régulier et de dimension 1 est un anneau de valuation discrète (II, 7.1.6).

Proposition (14.5.8). — Soient Y un préschéma localement noethérien, $f : X \rightarrow Y$ un morphisme localement de type fini, y un point de Y .

Pour tout Y -préschéma Y' , posons $X(Y') = \text{Hom}_Y(Y', X)$. Soit x un point de $f^{-1}(y)$; afin que f soit universellement ouvert au point x , il faut et il suffit que la condition suivante soit vérifiée :

Pour tout anneau de valuation discrète complet A , de corps résiduel algébriquement clos, tout morphisme $g : Y' = \text{Spec}(A) \rightarrow Y$ tel que l'image par g du point fermé y' de Y' soit égal à y , et tout élément $u_0 \in X(\text{Spec}(\mathbf{k}(y')))$ tel que $u_0(y') = x$, il existe un anneau de valuation discrète B , un homomorphisme local $A \rightarrow B$ faisant de B une A -algèbre finie, et, si l'on pose $Z' = \text{Spec}(B)$, un élément $u \in X(Z')$ tels que, si z' est le point fermé de Z' , le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec}(\mathbf{k}(z')) & \longrightarrow & Z' \\ \downarrow \wr & & \downarrow u \\ \text{Spec}(\mathbf{k}(y')) & \xrightarrow{u_0} & X \end{array}$$

soit commutatif.

Notons que si A et B vérifient les conditions de l'énoncé, B est un anneau de valuation discrète complet (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 3, n° 3, prop. 7 et chap. IV, § 2, n° 2, cor. 3 de la prop. 9) de corps résiduel isomorphe à celui de A , donc algébri-

quement clos, et puisque $u(z')=x$, il y a dans $X''=X \times_Y Z'$ un point x'' , dont les projections dans X et Z' sont x et z' et qui est rationnel sur $k(z')$; en outre, puisqu'il existe une Z' -section v de X'' telle que $v(z')=x''$, l'image par v du point générique s de Z' est une généralisation t de x'' dont la projection dans Z' est s ; en appliquant (14.3.6), on voit que la condition de l'énoncé est *suffisante*. Prouvons maintenant qu'elle est *nécessaire*. Posons $X'=X \times_Y Y'$, $f'=f_{(Y')} : X' \rightarrow Y'$. Il y a par hypothèse un point $x' \in X'$ au-dessus de x et de y' et rationnel sur $k(y')$ (I, 3.3.14), donc fermé dans $f'^{-1}(y')$. En vertu de (14.3.6), il y a une composante irréductible T' de X' contenant x' et dominant Y' , donc ((14.3.8) et (14.3.13)) la restriction $T' \rightarrow Y'$ de f' est équidimensionnelle au point x . On déduit donc de (14.5.5) qu'il y a une A -algèbre finie B qui est un anneau local intègre et intégralement clos et domine A (donc est un anneau de valuation discrète) et, en posant $Z'=\text{Spec}(B)$ et $X''=X \times_Y Z'=X' \times_{Y'} Z'$, une Z' -section $v : Z' \rightarrow X''$ telle que l'image du point fermé z' de Z' par le morphisme composé $Z' \xrightarrow{v} X'' \rightarrow X'$ soit x' ; le morphisme composé $u : Z' \xrightarrow{v} X'' \rightarrow X$ répond donc à la question.

Proposition (14.5.9). — Soient Y un préschéma localement noethérien irréductible, $f : X \rightarrow Y$ un morphisme localement de type fini, y un point géométriquement unibranche de Y . Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) f est universellement ouvert en tout point de $f^{-1}(y)$.
- b) f est ouvert en tout point de $f^{-1}(y)$.
- c) Pour toute composante irréductible Z de $f^{-1}(y)$, de point générique z , il existe une composante irréductible X_z de X contenant z et équidimensionnelle sur Y au point z .
- d) Pour tout point fermé x de $f^{-1}(y)$, il existe une partie irréductible X' de X , localement fermée dans X , contenant x , et telle que la restriction $X' \rightarrow Y$ de f soit un morphisme quasi-fini et dominant.

L'équivalence de a), b) et c) a déjà été démontrée (14.4.2). Pour prouver que a) entraîne d), notons qu'en vertu de (14.4.2), a) entraîne qu'il existe une composante irréductible Z de X contenant x et équidimensionnelle sur Y au point x ; l'existence de X' provient alors de (14.5.3) appliqué à la restriction $Z \rightarrow Y$ de f . Inversement, supposons d) vérifiée; en vertu du critère de Chevalley (14.4.4), la restriction $X' \rightarrow Y$ de f est un morphisme universellement ouvert au point x , et *a fortiori* f est ouvert au point x ; f est donc ouvert en tous les points fermés de $X_y=f^{-1}(y)$. Mais X_y est un $k(y)$ -préschéma localement de type fini, donc un préschéma de Jacobson; l'ensemble des points fermés de X_y est donc *dense* dans X_y (10.3.1), et il résulte de (14.1.4) que f est ouvert en tous les points de X_y , ce qui achève de prouver que d) entraîne b).

Le résultat suivant a été mis en évidence par D. Mumford :

Proposition (14.5.10). — Soient Y un préschéma noethérien, $f : X \rightarrow Y$ un morphisme universellement ouvert, surjectif et localement de type fini. Alors il existe un morphisme fini surjectif $g : Y' \rightarrow Y$ tel que, si l'on pose $X'=X \times_Y Y'$ et $f'=f_{(Y')} : X' \rightarrow Y'$, tout point $y' \in Y'$ admette un voisinage ouvert U' tel qu'il existe une U' -section de $f'^{-1}(U')$.

Nous démontrerons la proposition en plusieurs étapes.

I) *Réduction au cas où Y est intègre.* — Si l'on a prouvé la proposition pour chacun des sous-préschémas réduits Y_i ayant pour espace sous-jacent une composante irréductible de Y , et pour les images réciproques $f^{-1}(Y_i)$, il est clair que le préschéma Y' somme des Y_i correspondants répondra à la question. On peut donc supposer Y intègre et on va dans ce qui suit se borner à ce cas. Alors, dans la conclusion, on pourra aussi prendre Y' intègre (quitte à le remplacer par une composante irréductible convenable).

II) *Caractère local sur Y.* — Nous allons montrer que si l'on peut recouvrir Y par des ouverts U_j en nombre fini, tels que, pour tout j , la conclusion de la proposition soit vraie pour le morphisme $f^{-1}(U_j) \rightarrow U_j$, restriction de f , alors la conclusion est vraie également pour f . En effet, on peut évidemment supposer les U_j affines, de sorte que $U_j = \text{Spec}(A_j)$, où A_j est un anneau intègre noethérien dont le corps des fractions $K = R(Y)$ est le corps des fonctions rationnelles sur Y . Pour tout j , il y a par hypothèse une A_j -algèbre finie intègre A'_j telle que l'homomorphisme $A_j \rightarrow A'_j$ soit injectif (I, 1.2.7) et que le morphisme correspondant $g_j : U'_j = \text{Spec}(A'_j) \rightarrow \text{Spec}(A_j) = U_j$ vérifie les conditions de la proposition (pour U_j et $f^{-1}(U_j)$). Soit alors K' une extension finie de K contenant les corps des fractions de tous les A'_j (qui sont des extensions finies de K). Considérons le normalisé Y'' de Y dans K' (II, 6.3.8), qui est de la forme $\text{Spec}(\mathcal{B})$, où \mathcal{B} est une \mathcal{O}_Y -Algèbre entière quasi-cohérente, fermeture intégrale de \mathcal{O}_Y dans K' (II, 6.3.4). Ces définitions prouvent que pour tout j , $A'_j = \Gamma(U'_j, \mathcal{O}_{U'_j}) = \Gamma(U_j, (g_j)_*(\mathcal{O}_{U'_j}))$ s'identifie à une sous- A_j -algèbre finie de $\Gamma(U_j, \mathcal{B})$; autrement dit, $(g_j)_*(\mathcal{O}_{U'_j}) = \mathcal{A}'_j$ est une \mathcal{O}_{U_j} -Algèbre cohérente, sous- \mathcal{O}_{U_j} -algèbre de $\mathcal{B}|_{U_j}$. Il existe donc un sous- \mathcal{O}_Y -Module \mathcal{C}'_j cohérent de \mathcal{B} tel que $\mathcal{C}'_j|_{U_j} = \mathcal{A}'_j$ (I, 9.4.7). Si l'on pose $\mathcal{C}' = \sum_j \mathcal{C}'_j$, la sous- \mathcal{O}_Y -Algèbre \mathcal{B}' de \mathcal{B} engendrée par \mathcal{C}' est cohérente puisque \mathcal{B} est une \mathcal{O}_Y -Algèbre entière. Montrons alors que $Y' = \text{Spec}(\mathcal{B}')$ répond à la question. En effet, il est clair que le morphisme $g : Y' \rightarrow Y$ est fini surjectif et que Y' est intègre; en outre, pour tout j , $\Gamma(U_j, \mathcal{B}')$ est une A'_j -algèbre finie, autrement dit le morphisme $g^{-1}(U_j) \rightarrow U_j$, restriction de g , se factorise en $g^{-1}(U_j) \rightarrow U'_j \rightarrow U_j$, et comme l'existence locale de sections est stable par changement de base, cela établit notre assertion, tout $y \in Y$ appartenant à un U_j .

III) *Réduction au cas où Y est intègre, local et géométriquement unibranche.* — Supposons d'abord que la proposition ait été prouvée lorsque Y est intègre et local (avec Y' intègre), et montrons qu'elle est valable lorsque Y est intègre (noethérien) affine quelconque. En effet, en vertu de la réduction II), il suffit de prouver que pour tout point $y \in Y$, la proposition est vraie pour un voisinage ouvert affine V de y dans Y . Soient $Y = \text{Spec}(A)$, $Y_1 = \text{Spec}(A_p)$, où $p = \mathfrak{p}_y$, et posons $X_1 = X \times_Y Y_1$; par hypothèse, il existe un morphisme fini surjectif $g_1 : Y'_1 \rightarrow Y_1$, où $Y'_1 = \text{Spec}(B_1)$, B_1 étant une A_p -algèbre intègre finie, donc un anneau semi-local, tel que g_1 vérifie les conditions de l'énoncé pour Y_1 et X_1 . Si y'_j ($1 \leq j \leq r$) sont les points fermés de Y'_1 , il y a donc un recouvrement de Y'_1 par des ouverts U'_j tels que $y'_j \in U'_j$ et qu'il existe une U'_j -section h'_j de $X \times_Y U'_j$ ($1 \leq j \leq r$). Le A_p -module B_1 admet un système fini de générateurs de la forme z_i/s (avec $s \in A - p$,

z_i entiers sur A), que l'on peut supposer (en multipliant au besoin s par un élément de A) être des éléments du corps des fractions de B_1 , entiers sur A_s , de sorte que si V est l'ouvert affine $D(s) = \text{Spec}(A_s) \subset Y$, Y_1 s'identifie à $Y_1 \times_V V'$, où V' est le spectre de la A_s -algèbre finie engendrée par les z_i/s ; $g : V' \rightarrow V$ est donc un morphisme fini surjectif et $g_1 = g_{(Y_1)}$. De plus, appliquant la méthode de (8.1.2, a)), on peut supposer que chacun des U'_j est l'image réciproque par $p : Y'_1 \rightarrow V'$ d'un ouvert W'_j de V' , tel que les W'_j recouvrent V' (8.3.11), et que chacune des sections h'_j est de la forme $(v'_j)_{(X_j)}$, où v'_j est une W'_j -section de $X \times_Y W'_j$ (8.8.2, (i)). On est donc bien ramené à prouver la proposition lorsque $Y = \text{Spec}(A)$, A étant un anneau local intègre et noethérien. On sait alors qu'il existe une A -algèbre intègre finie B , ayant même corps des fractions que A , telle que $A \subset B$ et que $\text{Spec}(B)$ soit géométriquement unibranche ((0, 23.2.5) et (6.15.5)); comme le morphisme $\text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A)$ est surjectif, on peut évidemment remplacer Y par $\text{Spec}(B)$ et X par $X \otimes_A B$ pour prouver la proposition. Raisonnant comme au début de la réduction III), on peut donc supposer A local, intègre et $Y = \text{Spec}(A)$ géométriquement unibranche.

IV) *Réduction au cas où X est intègre, affine, et f quasi-fini, surjectif, birationnel et universellement ouvert.* — Supposons donc $Y = \text{Spec}(A)$ intègre, local et géométriquement unibranche. Il existe alors un sous-préschéma irréductible X_0 de X tel que la restriction $f_0 : X_0 \rightarrow Y$ de f soit un morphisme *quasi-fini* et *dominant* et que $f_0(X_0)$ contienne le point fermé y de Y (14.5.9); comme Y est géométriquement unibranche, il résulte de (14.4.1) que f_0 est encore *universellement ouvert*. Comme en outre on peut supposer X_0 réduit, donc intègre, on voit qu'on peut, en remplaçant X par X_0 , supposer que X est *intègre* et *f quasi-fini et dominant*, et tel que $f(X)$ contienne y ; comme f est *ouvert* et que tout ouvert de Y contenant y est égal à Y , f est *surjectif*.

Soient ξ, η les points génériques de X et Y respectivement; $k(\xi)$ est donc une extension *finie* de $K = k(\eta)$. Par suite (4.6.8), il y a une extension *finie* K' de K telle que $(\text{Spec}(k(\xi) \otimes_K K'))_{\text{red}}$ soit géométriquement réduit sur K et que ses composantes irréductibles soient géométriquement irréductibles; il en résulte ((4.5.9) et (4.6.1)) que les corps résiduels de $\text{Spec}(k(\xi) \otimes_K K')$ sont des extensions finies, primaires et séparables de K' , donc sont *égaux* à K' . Appliquant de nouveau (0, 23.2.5) et (6.15.5), il existe une A -algèbre intègre *finie* B , ayant K' pour corps des fractions, contenant A et telle que $\text{Spec}(B)$ soit géométriquement unibranche; on peut donc de nouveau remplacer Y par $\text{Spec}(B)$ et X par $(X \otimes_A B)_{\text{red}}$ pour prouver la proposition; la réduction III) permet alors de supposer encore A local, intègre et $Y = \text{Spec}(A)$ géométriquement unibranche, de point fermé y . En outre, f est alors un morphisme *quasi-fini, surjectif et universellement ouvert*; chacune des composantes irréductibles X_i de X ($1 \leq i \leq m$) domine Y (1.10.4) et est *birationnelle* sur Y . Soit alors x un point de $f^{-1}(y)$ et soit X_i une composante irréductible de X contenant x ; désignons encore par X_i le sous-préschéma réduit (donc intègre) de X ayant X_i pour espace sous-jacent, et soit $f_i : X_i \rightarrow Y$ la restriction de f . Appliquant de nouveau (14.4.1) au morphisme quasi-fini et dominant f_i , on voit que f_i est universellement ouvert; si U est un ouvert affine de X_i contenant x , $f_i(U)$ est donc

ouvert dans Y et contient y , donc est égal à Y . On peut ainsi remplacer X par U pour prouver la proposition.

V) *Fin de la démonstration.* — Nous supposons donc Y local, intègre et géométriquement unibranche, X intègre et affine, f quasi-fini, surjectif, birationnel et universellement ouvert; il en résulte que f est automatiquement *séparé*. En vertu du Main theorem (8.12.6), il existe une factorisation $X \xrightarrow{j} Z \xrightarrow{u} Y$, où j est une immersion ouverte et u un morphisme fini. Remplaçant en outre Z par l'image fermée de j (I, 9.5.10), on peut supposer que Z est intègre; comme u est fini et birationnel et Y géométriquement unibranche, il résulte de (III, 4.3.5 et 4.3.4) que u (et par suite f) est un morphisme *radiciel*; comme f est universellement ouvert et surjectif, c'est donc un *homéomorphisme universel*. Par suite (2.4.5, (ii)) f est un morphisme fini. Mais alors on répond aux conditions de l'énoncé avec Y' intègre en prenant simplement $Y'=X$ et $g=f$, la Y' -section étant le morphisme diagonal Δ . C.Q.F.D.

Ce résultat peut être utilisé pour développer des critères de « descente » de diverses propriétés par les morphismes universellement ouverts et surjectifs. Signalons en particulier le critère suivant, dû à D. Mumford :

Corollaire (I4.5.II). — Soient Y un préschéma localement noethérien, $f : X \rightarrow Y$ un morphisme localement de type fini, $g : Y' \rightarrow Y$ un morphisme localement de type fini, universellement ouvert et surjectif; posons $X' = X \times_Y Y'$, $f' = f_{(Y')} : X' \rightarrow Y'$. Alors, pour que f soit affine, il faut et il suffit que f' le soit.

On doit seulement prouver que la condition est suffisante. La question étant locale sur Y , on peut supposer Y affine, donc noethérien. En vertu de (I4.5.10), il existe un morphisme fini surjectif $h : Y_1 \rightarrow Y$ tel que, si l'on pose $Y'_1 = Y' \times_Y Y_1$, et $g' = g_{(Y_1)} : Y'_1 \rightarrow Y_1$, tout point de Y_1 admette un voisinage ouvert U_1 tel qu'il existe une U_1 -section de $g'^{-1}(U_1)$. Si l'on pose $X_1 = X \times_Y Y_1$, la projection canonique $p : X_1 \rightarrow X$ est un morphisme fini surjectif, donc, si l'on prouve que X_1 est un schéma affine, il en résultera d'abord que X est quasi-compact, donc noethérien, puis que X est affine en vertu du théorème de Chevalley (II, 6.7.1). Il suffit par suite de prouver que le morphisme $f_1 = f_{(Y_1)} : X_1 \rightarrow Y_1$ est affine. Or, si l'on pose

$$X'_1 = X_1 \times_{Y_1} Y'_1 = X' \times_Y Y'_1 \quad \text{et} \quad f'_1 = (f_1)_{(Y_1)} = f'_{(Y'_1)} : X'_1 \rightarrow Y'_1,$$

f'_1 est affine en vertu de l'hypothèse. On est donc ramené à prouver le corollaire en y remplaçant Y , X , f et Y' par Y_1 , X_1 , f_1 et Y'_1 , autrement dit, il suffit de prouver que f est affine lorsqu'on fait de plus, dans l'énoncé de (I4.5.II), l'hypothèse que tout point de Y admet un voisinage ouvert U tel qu'il existe une U -section de $g^{-1}(U)$. La question étant locale sur Y , on peut même supposer qu'il existe une Y -section s de Y' . Or, on a le lemme élémentaire suivant (valable dans toute catégorie admettant des produits fibrés) :

Lemme (I4.5.II.I). — Soient $f : X \rightarrow S$, $g : Y \rightarrow S$ deux morphismes, $p_1 : X \times_S Y \rightarrow X$, $p_2 : X \times_S Y \rightarrow Y$ les projections canoniques. Si $s : S \rightarrow Y$ est une section de g , alors $s' = (1, s \circ f)_S$ est une section de p_1 et X , muni des morphismes $f : X \rightarrow S$ et $s' : X \rightarrow X \times_S Y$, s'identifie au produit des Y -préschémas S et $X \times_S Y$ pour les morphismes $s : S \rightarrow Y$ et $p_2 : X \times_S Y \rightarrow Y$.

C'est un cas particulier de (I, 3.3.11), où l'on remplace le diagramme par

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \xrightarrow{p_1} & X \times_S Y & \xrightarrow{s'} & X \\
 \downarrow t & & \downarrow p_2 & & \downarrow t \\
 S & \longrightarrow & Y & \xrightarrow{s} & S
 \end{array}$$

Appliquant ce lemme en y remplaçant S, Y par Y, Y', on voit que l'on peut écrire $f = (f')_{(Y)}$ pour le changement de base $s : Y \rightarrow Y'$, donc f est affine puisque f' l'est. C.Q.F.D.

Une variante de ce critère est la suivante :

Corollaire (14.5.12). — Avec les notations et hypothèses générales de (14.5.11), soit \mathcal{L} un \mathcal{O}_X -Module inversible. Supposons qu'il existe une partie fermée Z de X, propre sur Y (II, 5.4.10) et telle que le préschéma induit par X sur l'ouvert $X - Z$ soit normal. Alors, pour que \mathcal{L} soit ample relativement à f , il faut et il suffit que $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y'}$ soit ample relativement à f' .

Gardons les notations de la démonstration de (14.5.11). Posons $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y_1}$; il suffira de prouver que \mathcal{L}_1 est ample relativement à $f \circ p$, en vertu de (III, 2.6.2); mais $f \circ p = h \circ f_1$, et, compte tenu de (II, 4.6.13, (v)), il suffira de prouver que \mathcal{L}_1 est ample relativement à f_1 . La question étant locale sur Y_1 , on peut de nouveau supposer que g' admet une section s ; si $\mathcal{L}'_1 = \mathcal{L}' \otimes_{\mathcal{O}_{Y_1}} \mathcal{O}_{Y_1}$, on peut alors écrire, en vertu du lemme (14.5.11.1), $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}'_1 \otimes_{\mathcal{O}_{Y_1}} \mathcal{O}_{Y_1}$ pour le changement de base $s : Y_1 \rightarrow Y'_1$; la conclusion résulte donc de deux applications de (II, 4.6.13, (iii)).

§ 15. ÉTUDE DES FIBRES D'UN MORPHISME UNIVERSELLEMENT OUVERT

15.1. Multiplicités des fibres d'un morphisme universellement ouvert.

Proposition (15.1.1). — Soient Y un préschéma irréductible localement noethérien, de point générique η , $f : X \rightarrow Y$ un morphisme localement de type fini, y un point de Y, \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -Module cohérent; on pose $\mathcal{F}_y = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathbf{k}(y)$ (faisceau de modules sur la fibre $f^{-1}(y)$). Soit z le point générique d'une composante irréductible de $\text{Supp}(\mathcal{F}_y)$, et soient X_i ($1 \leq i \leq n$) ceux des sous-préschémas fermés réduits de X dont l'espace sous-jacent est une composante irréductible de $\text{Supp}(\mathcal{F})$ contenant z , et qui sont tels que la restriction $X_i \rightarrow Y$ de f soit un morphisme universellement ouvert au point z ; soit z_i le point générique de X_i ($1 \leq i \leq n$). Si $\lambda_z(\mathcal{F}_y)$ (resp. $\lambda_t(\mathcal{F}_\eta)$) désigne la longueur géométrique de \mathcal{F}_y en un point $x \in f^{-1}(y)$ (resp. celle de \mathcal{F}_η en un point $t \in f^{-1}(\eta)$) (4.7.5), on a

$$(15.1.1.1) \quad \lambda_z(\mathcal{F}_y) \geq \sum_{i=1}^n \lambda_{z_i}(\mathcal{F}_\eta).$$

Si de plus on suppose l'anneau \mathcal{O}_y régulier, on a

$$(15.1.1.2) \quad \text{long}((\mathcal{F}_y)_z) \geq \sum_{i=1}^n \text{long}((\mathcal{F}_\eta)_{z_i}).$$

Les fibres $f^{-1}(y')$ de f (pour tout $y' \in Y$) ne changeant pas lorsque l'on remplace f par f_{red} , on peut supposer que X et Y sont réduits (2.4.3, (vi)), donc Y intègre; on posera $K = k(\eta)$. On peut en outre remplacer f par la restriction $\text{Supp}(\mathcal{F}) \rightarrow Y$ de f au sous-préschéma fermé réduit de X ayant $\text{Supp}(\mathcal{F})$ comme espace sous-jacent, donc se borner au cas où $X = \text{Supp}(\mathcal{F})$. Enfin, si $y = \eta$, il n'y a qu'une seule composante irréductible X_i de X contenant z (0.1, 2.1.8) et on a $z_i = z$, ce qui rend (15.1.1.1) et (15.1.1.2) triviales (sans hypothèses sur f). On peut donc se borner au cas $y \neq \eta$; il résulte alors de l'hypothèse et de (1.10.3) que les z_i appartiennent à $f^{-1}(\eta)$, les seconds membres de (15.1.1.1) et (15.1.1.2) étant donc définis. Soit Z_i le sous-préschéma fermé réduit de $f^{-1}(\eta)$ ayant pour espace sous-jacent $X_i \cap f^{-1}(\eta)$; on sait (4.6.6) qu'il existe une extension finie radicielle K' de K telle que, pour tout i , le K' -préschéma $(Z_i \otimes_K K')_{\text{red}}$ soit géométriquement réduit sur K' . En outre, le morphisme projection $f^{-1}(\eta) \otimes_K K' \rightarrow f^{-1}(\eta)$ est fini, dominant et radiciel (I, 3.5.7), donc est un homéomorphisme (2.4.5). Si z'_i est l'unique point de $f^{-1}(\eta) \otimes_K K'$ au-dessus de z_i , il résulte de (4.7.9) et (4.7.5) que l'on a

$$(15.1.1.3) \quad \lambda_{z_i}(\mathcal{F}_\eta) = \lambda_{z'_i}(\mathcal{F}_\eta \otimes_K K') = \text{long}((\mathcal{F}_\eta \otimes_K K')_{z'_i}).$$

Soit V un anneau de valuation discrète, de corps de fractions K' , dominant \mathcal{O}_y (II, 7.1.7); posons $Y' = \text{Spec}(V)$, $X' = X \times_Y Y'$, $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \otimes_Y Y'$, $f' = f_{(Y')} : X' \rightarrow Y'$; si $g : Y' \rightarrow Y$ est le morphisme structural, η' le point générique de Y' et y' son point fermé, on a $g(y') = y$, $g(\eta') = \eta$; le morphisme $\text{Spec}(k(y')) \rightarrow \text{Spec}(k(y))$ étant fidèlement plat, il en est de même de la projection $g' : f'^{-1}(y') \rightarrow f^{-1}(y)$ (2.2.13), donc (2.3.4), il y a un point générique z' d'une composante irréductible de $f'^{-1}(y')$ tel que $g'(z') = z$. Par construction, on a $k(\eta') = K'$, donc $f'^{-1}(\eta') = f^{-1}(\eta) \otimes_K K'$; d'autre part, si l'on pose $X'_i = X_i \times_Y Y'$, la restriction $X'_i \rightarrow Y'$ de f' est un morphisme universellement ouvert au point z' , donc (1.10.3) il existe un point $z'_i \in f'^{-1}(\eta')$ qui est une généralisation de z' , et l'on peut évidemment supposer que z'_i est point générique d'une composante irréductible de $X'_i \cap f'^{-1}(\eta')$; comme la projection de $X'_i \cap f'^{-1}(\eta')$ dans $f^{-1}(\eta)$ est Z_i , on a $z'_i = z_i$. En vertu de (4.7.9) et (4.7.5), on a

$$(15.1.1.4) \quad \lambda_z(\mathcal{F}_y) = \lambda_{z'}(\mathcal{F}'_{y'}) \geq \text{long}((\mathcal{F}'_{y'})_{z'})$$

et il résulte donc de cette inégalité et de (15.1.1.3) qu'il suffit, pour établir (15.1.1.1), de démontrer l'inégalité

$$(15.1.1.5) \quad \text{long}((\mathcal{F}'_{y'})_{z'}) \geq \sum_{i=1}^n \text{long}((\mathcal{F}'_{\eta'})_{z'_i}).$$

Considérons maintenant la seconde inégalité (15.1.1.2); nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme (15.1.1.6). — Soient A un anneau local régulier qui n'est pas un corps, K son corps des fractions, k son corps résiduel. Il existe un anneau de valuation discrète V dominant A , ayant K pour corps des fractions et dont le corps résiduel est une extension transcendante pure de k .

Posons $S = \text{Spec}(A)$, et considérons le S -schéma P obtenu en faisant éclater le point fermé s de S (II, 8.1.3); si \mathfrak{m} est l'idéal maximal de A , on a donc par définition

$P = \text{Proj}(B)$, où B est la A -algèbre graduée $\bigoplus_{n \geq 0} m^n$. Si $h : P \rightarrow S$ est le morphisme structural, la fibre $h^{-1}(s)$ est isomorphe à $\text{Proj}(B \otimes_A k)$ (II, 2.8.10), et par définition $B \otimes_A k$ est la k -algèbre graduée $\bigoplus_{n \geq 0} m^n/m^{n+1}$; mais comme A est régulier, cette algèbre est isomorphe à une algèbre de polynômes $k[t_1, \dots, t_e]$ (t_i indéterminées) (0, 17.1.1) et par suite $h^{-1}(s)$ est isomorphe à \mathbf{P}_k^{e-1} . Soit ζ le point générique de $h^{-1}(s)$; si t'_i ($1 \leq i \leq e$) sont les éléments de m dont les classes mod. m^2 sont les t_i , $B_{(t'_i)}$ est l'anneau d'un voisinage ouvert affine de ζ dans P , et l'on a $k(\zeta) = k(t_1, \dots, t_{e-1})$; d'autre part, comme A est intégralement clos, on vérifie aisément qu'il en est de même de B (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. V, § 1, n° 8, cor. 1 de la prop. 21), donc $B_{(t'_i)}$ est aussi intégralement clos, et il en est par suite de même de l'anneau local $\mathcal{O}_{P, \zeta}$. Enfin, comme $A = \mathcal{O}_s$ est régulier, donc un anneau universellement caténaire (5.6.4), on a, en vertu de (5.6.5), $\dim(\mathcal{O}_{P, \zeta}) = \dim(\mathcal{O}_s) - (e - 1)$, puisque h est un morphisme birationnel, que $\dim(h^{-1}(s)) = e - 1$ et que l'anneau local de la fibre $h^{-1}(s)$ en son point générique ζ est de dimension 0. Mais $\dim(\mathcal{O}_s) = e$, donc $\dim(\mathcal{O}_{P, \zeta}) = 1$, et $\mathcal{O}_{P, \zeta} = V$ est un anneau de valuation discrète, étant noethérien, de dimension 1 et intégralement clos (II, 7.1.6); il répond évidemment à la question.

Ce lemme étant établi, on peut reprendre le raisonnement fait pour l'inégalité (15.1.1.1) avec $Y' = \text{Spec}(V)$; cette fois $k(y')$ est une extension séparable de $k(y)$, et par suite (4.7.9), on a $\text{long}((\mathcal{F}_y)_z) = \text{long}((\mathcal{F}_{y'})_{z'})$; comme par ailleurs $f'^{-1}(\eta') = f^{-1}(\eta)$ et $\mathcal{F}'_{\eta'} = \mathcal{F}_\eta$, on est encore ramené à prouver l'inégalité (15.1.1.5). Or, si t est une uniformisante de $\mathcal{O}_{y'}$, $f'^{-1}(y')$ est le sous-préschéma fermé de X' défini par l'Idéal $t\mathcal{O}_{X'}$, et on a $\mathcal{F}'_{y'} = \mathcal{F}'/t\mathcal{F}'$; d'autre part, on vérifie aussitôt (I, 9.1.12) que $(\mathcal{F}'_{\eta'})_{z'} = \mathcal{F}'_{z'}$; l'inégalité à démontrer (15.1.1.5) n'est autre alors qu'un cas particulier de (3.4.1.1).

Corollaire (15.1.2). — *Les hypothèses étant celles de (15.1.1), supposons de plus que $\lambda_z(\mathcal{F}_y) = 1$ (resp. que \mathcal{O}_y soit régulier et $\text{long}((\mathcal{F}_y)_z) = 1$). Alors il existe au plus une composante irréductible X_i de $\text{Supp}(\mathcal{F})$ contenant z et telle que la restriction $X_i \rightarrow Y$ de f soit universellement ouverte au point z . De plus, si z_i est le point générique de cette composante, on a $\lambda_{z_i}(\mathcal{F}_\eta) = 1$ (resp. $\text{long}((\mathcal{F}_\eta)_{z_i}) = 1$).*

Cela résulte aussitôt de (15.1.1) en notant que l'on a nécessairement, par définition de X_i , $(\mathcal{F}_\eta)_{z_i} \neq 0$ (I, 9.1.13).

Corollaire (15.1.3). — *Soient Y un préschéma irréductible localement noethérien de point générique η , $f : X \rightarrow Y$ un morphisme localement de type fini, \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -Module cohérent de support X , x un point de X , $y = f(x)$. On suppose que : 1° x n'appartient qu'à une seule composante irréductible Z de $f^{-1}(y)$; 2° $\mathcal{F}_y = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} k(y)$ est géométriquement réduit sur $k(y)$, autrement dit, si z est le point générique de Z , $\lambda_z(\mathcal{F}_y) = 1$ (resp. \mathcal{O}_y est régulier et $\text{long}((\mathcal{F}_y)_z) = 1$). Alors, il existe au plus une composante irréductible X' de X contenant x , telle que $\dim_x(X' \cap f^{-1}(y)) = \dim_x(f^{-1}(y))$ et que la restriction $X' \rightarrow Y$ de f soit universellement ouverte aux points génériques des composantes irréductibles de $X' \cap f^{-1}(y)$ contenant x . De plus, s'il existe une telle composante X' et si z' est son point générique, on a $\lambda_{z'}(\mathcal{F}_\eta) = 1$ (resp. $\text{long}((\mathcal{F}_\eta)_{z'}) = 1$).*

En effet, une composante irréductible X' de X contenant x et telle que $\dim_x(X' \cap f^{-1}(y)) = \dim_x(f^{-1}(y))$ contient nécessairement Z , puisqu'une composante irréductible de $X' \cap f^{-1}(y)$ contenant x doit être de même dimension que la seule composante irréductible Z de $f^{-1}(y)$ contenant x . On peut alors appliquer (15.1.2) à z .

Remarques (15.1.4). — (i) Dans l'énoncé de (15.1.1), on ne peut remplacer « universellement ouvert » par « équidimensionnel », comme le montre l'exemple (14.4.10, (ii)) où l'on fait $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$; les fibres de f sont alors des schémas artiniens réduits, donc (avec les notations introduites *loc. cit.*) on a $\lambda_{x'}(\mathcal{F}_y) = 1$, mais il y a deux composantes irréductibles X_1, X_2 de X contenant x' , et le second membre de (15.1.1.1) est donc égal à 2, bien que la restriction de f à chacune des composantes X_1, X_2 soit un morphisme équidimensionnel en tout point. Ce même exemple montre aussi que dans (15.1.2) et (15.1.3), on ne peut remplacer l'hypothèse « universellement ouvert » par « équidimensionnel ».

(ii) Il est vraisemblable que pour la validité de l'inégalité (15.1.1.2), on ne peut supprimer l'hypothèse que \mathcal{O}_y est régulier.

15.2. Platitude des morphismes universellement ouverts à fibres géométriquement réduites.

(15.2.1) On a vu (2.4.6) qu'un morphisme *plat* et localement de présentation finie est *universellement ouvert*. On a une réciproque partielle de ce résultat moyennant des hypothèses supplémentaires :

Théorème (15.2.2). — Soient Y un préschéma localement noethérien, $f : X \rightarrow Y$ un morphisme localement de type fini, \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -Module cohérent, x un point de X , $y = f(x)$. On suppose vérifiées les conditions suivantes :

(i) $\text{Supp}(\mathcal{F}) = X$.

(ii) f est universellement ouvert aux points génériques des composantes irréductibles de $f^{-1}(y)$ contenant x .

(iii) $\mathcal{F}_y = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathbf{k}(y)$ est géométriquement réduit au point x (4.6.22).

(iv) L'anneau \mathcal{O}_y est réduit.

Alors \mathcal{F} est *f-plat* au point x .

Comme \mathcal{O}_y est réduit et noethérien, nous allons appliquer le critère valuatif de platitude (11.8.1). Considérons donc un homomorphisme local $\mathcal{O}_y \rightarrow A'$, où A' est un anneau de valuation discrète; posons $Y' = \text{Spec}(A')$, $X' = X \times_Y Y'$, $f' = f_{(Y')} : X' \rightarrow Y'$, et soit x' un point de X' dont les projections dans X et Y' sont respectivement x et le point fermé y' de Y' ; si l'on pose $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \otimes_Y Y'$, on a $\text{Supp}(\mathcal{F}') = X'$ par (I, 9.1.13); tout point générique z' d'une composante irréductible de $f'^{-1}(y')$ contenant x' a pour projection dans $f^{-1}(y)$ un point générique z d'une composante irréductible de $f^{-1}(y)$ contenant x , en vertu de (4.2.6); donc f' est universellement ouvert au point z' . Enfin, il résulte de (4.7.11) que $\mathcal{F}'_{y'}$ est géométriquement réduit au point x' . On voit donc qu'on est ramené à démontrer le

Lemme (15.2.2.1). — Soient $Y = \text{Spec}(A)$ le spectre d'un anneau de valuation discrète, y son point fermé, $f : X \rightarrow Y$ un morphisme localement de type fini, x un point de $f^{-1}(y)$, \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -Module cohérent. On suppose vérifiées les conditions suivantes :

- (i) $\text{Supp}(\mathcal{F}) = X$.
- (ii) f est ouvert aux points génériques des composantes irréductibles de $f^{-1}(y)$ contenant x .
- (iii) $\mathcal{F}_y = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_y} \mathbf{k}(y)$ est réduit au point x (3.2.2).

Alors \mathcal{F} est f -plat au point x .

Désignons en effet par t une uniformisante de A , posons $B = \mathcal{O}_x$ et $\mathcal{F}_x = M$; la condition (i) implique que $\text{Supp}(M) = \text{Spec}(B)$ (I, 9.1.13). La condition (ii) implique, en vertu de (14.3.2), que toute composante irréductible de X contenant x domine Y ; en d'autres termes, l'image réciproque dans A de tout idéal premier minimal \mathfrak{p}_i de B est \mathfrak{o} , ce qui signifie encore que l'on a $t \notin \mathfrak{p}_i$ pour tout i . Enfin, (iii) signifie que M/tM est un (B/tB) -module réduit (3.2.2). Il s'agit de montrer que sous ces conditions M est un A -module sans torsion (0_I, 6.3.4), et pour cela il suffit évidemment de montrer que t est un élément M -régulier; mais cela résulte de (3.4.6.1).

Corollaire (15.2.3). — Soient Y un préschéma localement noethérien, $f : X \rightarrow Y$ un morphisme localement de type fini, x un point de X , $y = f(x)$. On suppose vérifiées les conditions suivantes :

(i) f est universellement ouvert aux points génériques des composantes irréductibles de $f^{-1}(y)$ contenant x .

(ii) $f^{-1}(y)$ est géométriquement réduit (sur $\mathbf{k}(y)$) au point x (4.6.9).

(iii) L'anneau \mathcal{O}_y est réduit.

Sous ces conditions f est plat au point x .

Il suffit d'appliquer (15.2.2) à $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$ (4.6.22).

Remarques (15.2.4). — (i) Les trois premières des conditions de (15.2.2) ne changent pas lorsqu'on remplace f par f_{red} ; mais si \mathfrak{N} est le nilradical d'un anneau local noethérien A , A/\mathfrak{N} est plat sur A/\mathfrak{N} mais non sur A lui-même lorsque $\mathfrak{N} \neq \mathfrak{o}$ (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 3, n° 2, cor. 2 de la prop. 5). On voit donc qu'on ne peut dans (15.2.2) supprimer la condition (iv).

(ii) Il résulte de (2.4.6) que si la conclusion de (15.2.2) est vraie, ainsi que l'hypothèse (i), f est universellement ouvert dans un voisinage de x , et en particulier aux points génériques des composantes irréductibles de $f^{-1}(y)$ contenant x . Même lorsque (i), (iii) et (iv) sont vérifiées, on ne peut remplacer (ii) par l'hypothèse plus faible que f est universellement ouvert au point x seulement. C'est ce que montre l'exemple (14.1.3, (i)), où f est évidemment universellement ouvert en tout point de X_2 , donc en particulier au point x , intersection de X_1 et X_2 ; les conditions (ii) et (iii) de (15.2.3) sont aussi vérifiées par cet exemple. Toutefois, \mathcal{O}_x n'est pas un \mathcal{O}_y -module sans torsion, \mathcal{O}_y s'identifiant à un sous-anneau de \mathcal{O}_x qui contient des diviseurs de \mathfrak{o} dans \mathcal{O}_x ; donc f n'est pas plat au point x .

(iii) Dans (15.2.3), la conclusion n'est plus nécessairement valable lorsqu'on remplace l'hypothèse (ii) par l'hypothèse plus faible que $f^{-1}(y)$, considéré comme $\mathbf{k}(y)$ -préschéma, n'a pas de cycles premiers associés immergés. Un exemple est fourni en prenant pour Y une courbe ayant un point de rebroussement y , par exemple $Y = \text{Spec}(K[S, T]/(S^3 - T^2))$, K étant un corps algébriquement clos, et pour X sa normalisée (II, 6.3.8). Si s et t sont les classes de S et T dans $A = K[S, T]/(S^3 - T^2)$, on vérifie aussitôt que $X = \text{Spec}(B)$, où $B = K[s, t, u]$, u étant l'élément t/s du corps des fractions de A , et comme $s = u^2$, $t = u^3$, on a aussi $B = K[u]$, isomorphe à l'anneau de polynômes à une indéterminée sur K . Le seul point x de X au-dessus du point y correspondant à l'idéal maximal $(s) + (t)$ correspond à l'idéal maximal (u) ; mais comme la classe \bar{u} de u dans $\mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_y \mathcal{O}_x$ est telle que $\bar{u}^2 = \mathfrak{o}$, $f^{-1}(y)$ n'est pas un $\mathbf{k}(y)$ -préschéma réduit. Ici f est un morphisme fini, surjectif et radiciel, donc un homéomorphisme universel (2.4.5), mais n'est pas plat au point x , car si \mathcal{O}_x était un \mathcal{O}_y -module plat, il serait un \mathcal{O}_y -module

libre de rang 1 engendré par l'élément 1 de \mathcal{O}_x (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 3, n° 2, prop. 5), ce qui est absurde.

(iv) Montrons enfin que dans (15.2.2) ou (15.2.3), on ne peut remplacer « géométriquement réduit » par « réduit ». Nous allons en effet définir deux anneaux A, A' ayant les propriétés suivantes :

1) A est un anneau local noethérien d'idéal maximal \mathfrak{m} , intègre, complet, de dimension 1 et géométriquement unibranche.

2) A' est la clôture intégrale de A , une A -algèbre finie dont l'idéal maximal est $\mathfrak{m}A'$, et le corps résiduel k' une extension radicielle finie non triviale du corps résiduel $k = A/\mathfrak{m}$ de A .

On peut alors prendre $Y = \text{Spec}(A)$, $X = \text{Spec}(A')$, $\mathcal{F} = \mathcal{O}_x$, y et x étant les points fermés de Y et X respectivement; les hypothèses (i) et (iv) de (15.2.2) sont trivialement vérifiées; comme A est de dimension 1, $f: X \rightarrow Y$ est radiciel, fini et surjectif, donc un homéomorphisme universel (2.4.5), ce qui prouve l'hypothèse (i) de (15.2.3). Enfin, il est clair que $f^{-1}(y)$ est réduit. Cependant f n'est pas plat au point x , car si A' était un A -module plat, ce serait un A -module libre de rang 1 (puisque'il a même corps des fractions que A) engendré par l'élément 1 de A (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 3, n° 2, prop. 5), ce qui est absurde.

Pour construire les anneaux A et A' , partons d'un corps imparfait k de caractéristique $p > 0$; soient $K_0 = k((T))$ le corps des séries formelles sur k , A_0 l'anneau de valuation pour K_0 correspondant à la valuation discrète égale à l'ordre des séries formelles; le corps résiduel de A_0 est donc k . Soit α un élément de k qui n'est pas puissance p -ième, et prenons $k' = k(\alpha^{1/p})$; $K = k'((T))$ est alors une extension radicielle finie de K_0 , et $A' = A_0 \otimes_k k'$ l'anneau de valuation discrète pour K correspondant à l'ordre des séries formelles sur K . Si \mathfrak{m}' est l'idéal maximal de A' , on répondra aux conditions 1) et 2) en prenant $A = A_0 + \mathfrak{m}'$: en effet, comme A_0 est noethérien et A' un A_0 -module de type fini, A est une A_0 -algèbre finie, donc un anneau noethérien; comme A' est fini sur A , \mathfrak{m}' est le seul idéal maximal de A , qui est donc un anneau local complet, évidemment de dimension 1 (étant fini sur A_0) et géométriquement unibranche puisque A' est intégralement clos et a même corps de fractions K que A .

(v) La démonstration de (15.2.2) montre toutefois que l'on peut affaiblir la condition (iii) en y remplaçant « géométriquement réduit » par « réduit » lorsqu'on peut appliquer le critère valuatif de platitude (11.8.1) en utilisant seulement des anneaux de valuation discrète A' dont le corps résiduel k' est séparable sur $k(y)$; en effet, si x' et z' ont les mêmes significations que dans (15.2.2), les multiplicités radicielles $\mu_i(k(z')|k')$ et $\mu_i(k(z)|k(y))$ sont les mêmes, en vertu de (4.7.3), donc il résulte de (4.7.9) que $\text{long}((\mathcal{F}_y)_{z'})$ et $\text{long}((\mathcal{F}'_y)_{z'})$ sont égales, et l'on est encore ramené au cas où Y est le spectre d'un anneau de valuation discrète et y son point fermé. Par exemple, on pourra obtenir ce résultat plus fort lorsque \mathcal{O}_y est unibranche et dominé par un anneau de valuation discrète dont le corps résiduel est extension séparable de $k(y)$, en vertu de (11.6.4). C'est le cas lorsque \mathcal{O}_y est un anneau régulier, d'après (15.1.1.6). Mais, comme nous l'a signalé Hironaka, il y a des anneaux locaux intégralement clos noethériens, de dimension 2 (provenant de schémas algébriques sur des corps imparfaits) qui ne satisfont pas à la condition précédente.

15.3. Applications : critères de réduction et d'irréductibilité.

Proposition (15.3.1). — Soient Y un préschéma localement noethérien, $f: X \rightarrow Y$ un morphisme localement de type fini, \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -Module cohérent, x un point de X , $y = f(x)$. Supposons vérifiées les conditions (i), (ii) et (iii) de (15.2.2). Alors :

(i) Il existe un voisinage U de x dans X tel que $f|U$ soit universellement ouvert et que, pour tout $x' \in U$, $\mathcal{F}|_{f(x')}$ soit géométriquement réduit sur $k(f(x'))$ au point x' .

(ii) Si de plus Y est réduit au point y , il existe un voisinage $U_1 \subset U$ de x tel que $\mathcal{F}|U_1$ soit f -plat et réduit.

Compte tenu de (I, 5.1.8), (4.2.7) et (4.7.11), les hypothèses ne changent pas, ni la conclusion (i) de l'énoncé, si l'on remplace Y par Y_{red} et X par $X \times_Y Y_{\text{red}}$, et l'on peut donc supposer Y réduit. Il résulte alors de (15.2.2) que \mathcal{F} est f -plat au point x , donc aussi (11.1.1) dans un voisinage de x , et a fortiori f est universellement ouvert dans ce voisinage (2.4.6). Le fait que $\mathcal{F}|_{f(x')}$ soit alors géométriquement réduit au point x'

pour tous les points d'un voisinage de x résulte de (12.1.1, (vii)). L'assertion (ii) résulte donc de ce qui précède et de (3.3.4).

Proposition (15.3.2). — *Les notations étant celles de (15.3.1), supposons que les conditions (i), (ii), (iii) de (15.2.2) soient vérifiées, et de plus que $f^{-1}(y)$ soit équidimensionnel au point x . Alors f est équidimensionnel au point x .*

On a, pour tout $y' \in Y$, $\text{Supp}(\mathcal{F}_{y'}) = f^{-1}(y')$. Par hypothèse \mathcal{F}_y est réduit (donc vérifie (S₁)) et est équidimensionnel au point x . En vertu de (12.1.1, (ii)), on peut donc supposer que $\mathcal{F}_{f(x')}$ est équidimensionnel et de dimension constante $e = \dim_x(f^{-1}(y))$ au point x' pour tous les $x' \in U$, ce qui signifie que $f^{-1}(f(x'))$ est équidimensionnel et de dimension e au point x' . Comme par ailleurs $\mathcal{F}|U$ est f -plat, il résulte de (2.3.4) et de (13.3.1, a)) que f est équidimensionnel au point x .

Corollaire (15.3.3). — *Les notations étant celles de (15.3.1), supposons vérifiées les conditions suivantes :*

- (i) $\text{Supp}(\mathcal{F}) = X$.
- (ii) f est universellement ouvert aux points génériques des composantes irréductibles de $f^{-1}(y)$ contenant x .
- (iii) \mathcal{F}_y est géométriquement ponctuellement intègre sur $k(y)$ au point x (4.6.22).
- (iv) Y est géométriquement unibranche au point y .

Alors x n'appartient qu'à une seule composante irréductible de X .

Si de plus Y est intègre au point y et $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$, alors X est intègre au point x et f est plat au point x .

Notons d'abord que (i) et (iii) entraînent que x n'appartient qu'à une seule composante irréductible Z de $f^{-1}(y)$. Il résulte donc de (14.4.7) et de (15.3.2) que pour toute composante irréductible X_i de X contenant x (donc Z), la restriction f_i de f à X_i est un morphisme équidimensionnel au point x , et universellement ouvert au point générique de Z . La première assertion de l'énoncé résulte alors de (15.1.3) et la seconde de (15.3.1).

Remarques (15.3.4). — (i) L'exemple (14.4.10, (ii)) montre que, dans (15.3.3), on ne peut supprimer l'hypothèse que Y est géométriquement unibranche au point y .

(ii) La remarque (15.2.4, (vi)) montre que la conclusion de (15.3.3) est encore vraie sous les hypothèses suivantes : \mathcal{O}_y est régulier, $\text{Supp}(\mathcal{F}) = X$ et \mathcal{F}_y est intègre au point x . Nous ignorons si dans cet énoncé, on peut remplacer l'hypothèse que \mathcal{O}_y est régulier par celle qu'il est géométriquement unibranche, ou même intègre et intégralement clos.

15.4. Compléments sur les morphismes de Cohen-Macaulay.

Proposition (15.4.1). — *Soient Y un préschéma localement noethérien, $f : X \rightarrow Y$ un morphisme localement de type fini, \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -Module cohérent tel que $\text{Supp}(\mathcal{F}) = X$, x un point de X , $y = f(x)$. On pose, pour tout $z \in X$, $X_{f(z)} = f^{-1}(f(z))$, $\mathcal{F}_{f(z)} = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{f(z)}} k(f(z))$. Supposons que \mathcal{F} soit f -plat au point x et que \mathcal{F}_y soit un \mathcal{O}_{X_y} -Module de Cohen-Macaulay au point x . Alors f est équidimensionnel au point x .*

En effet ((11.1.1) et (12.1.1, (vi))), il existe un voisinage U de x tel que $\mathcal{F}|U$ soit f -plat et que pour tout $x' \in U$, $\mathcal{F}_{f(x')}$ soit un $\mathcal{O}_{X_{f(x')}}$ -Module de Cohen-Macaulay au point x' ; cette dernière propriété entraîne que $\mathcal{F}_{f(x')}$ est équidimensionnel au point x' et que x' n'appartient à aucun cycle premier immergé associé à $\mathcal{F}_{f(x')}$ (0, 16.5.4). En outre, en vertu de (12.1.1, (ii)), on peut supposer que les dimensions des composantes irréductibles de $\text{Supp}(\mathcal{F}_{f(x')}|(U \cap X_{f(x')}))$ aient une (même) valeur indépendante de x' . Comme $\text{Supp}(\mathcal{F}_{f(x')}) = X_{f(x')}$ par hypothèse, il résulte de (2.3.4) et de (13.3.1, a)) que f est équidimensionnel au point x .

Proposition (15.4.2). — Soient Y un préschéma localement noethérien, $f: X \rightarrow Y$ un morphisme localement de type fini, \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -Module cohérent tel que $\text{Supp}(\mathcal{F}) = X$, x un point de X , $y = f(x)$. On suppose que \mathcal{O}_y est régulier et que \mathcal{F} est un \mathcal{O}_X -Module de Cohen-Macaulay au point x . Alors (avec les notations de (15.4.1)) les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) \mathcal{F} est f -plat au point x et \mathcal{F}_y est un \mathcal{O}_{X_y} -Module de Cohen-Macaulay au point x .
- b) \mathcal{F} est f -plat au point x .
- c) f est universellement ouvert dans un voisinage de x .
- d) f est ouvert aux points génériques des composantes irréductibles de X_y contenant x .
- e) $\dim(\mathcal{F}_x) = \dim(\mathcal{O}_y) + \dim((\mathcal{F}_y)_x)$.
- e') $\dim(\mathcal{O}_{X,x}) = \dim(\mathcal{O}_y) + \dim(\mathcal{O}_{X,x} \otimes_{\mathcal{O}_y} k(y))$.

Comme $\text{Supp}(\mathcal{F}) = X$, les conditions e) et e') sont équivalentes par définition (5.1.12). La condition a) implique trivialement b); b) entraîne que \mathcal{F} est f -plat aux points d'un voisinage de x (11.1.1), donc b) entraîne c) (2.4.6); c) entraîne trivialement d), et d) entraîne e') par (14.2.1). Enfin, puisque \mathcal{O}_y est régulier et que \mathcal{F}_x est un $\mathcal{O}_{X,x}$ -module de Cohen-Macaulay, il résulte de (6.1.4) que e) entraîne a).

Proposition (15.4.3). — Soient $f: X \rightarrow Y$ un morphisme localement de présentation finie, \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -Module de présentation finie, tel que $\text{Supp}(\mathcal{F}) = X$, x un point de X , $y = f(x)$. Alors (avec les notations de (15.4.1)) les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) \mathcal{F} est f -plat au point x et \mathcal{F}_y est un \mathcal{O}_{X_y} -Module de Cohen-Macaulay au point x .
- b) Il existe un voisinage ouvert U de x dans X , et un Y -morphisme quasi-fini $g: U \rightarrow Y' = Y[T_1, \dots, T_n]$ (T_i indéterminées), tels que $\mathcal{F}|U$ soit g -plat au point x .

Montrons d'abord que b) entraîne a). Posons $h: Y' \rightarrow Y$; le $k(y)$ -préschéma $Y'_y = h^{-1}(y)$ est régulier (0, 17.3.7); soient A l'anneau local de ce préschéma au point $y' = g(x)$, k son corps résiduel, et soit B l'anneau local de X_y au point x ; posons d'autre part $(\mathcal{F}_y)_x = M$, qui est un B -module de type fini. L'hypothèse que le morphisme g est quasi-fini entraîne qu'il en est de même de $g_y: X_y \rightarrow Y'_y$ (II, 6.2.4), donc $M \otimes_A k$ est un $(B \otimes_A k)$ -module de longueur finie (II, 6.2.2); comme par hypothèse M est un A -module plat et A un anneau de Cohen-Macaulay, M est un B -module de Cohen-Macaulay (6.3.3). Le fait que \mathcal{F} est f -plat au point x résulte de ce qu'il est g -plat et de ce que le morphisme h est plat (2.1.6).

Montrons maintenant que a) entraîne b). La question étant locale sur X et Y , on peut supposer X et Y affines; utilisant (8.9.1) et (11.2.7), on se ramène au cas où X et Y sont noethériens, compte tenu de (6.7.1). L'hypothèse entraîne que f est

équidimensionnel au point x (15.4.1), d'où l'existence d'un morphisme quasi-fini $g : U \rightarrow Y'$ tel que toute composante irréductible de U domine Y' (13.3.1, b) et que $g_y : U_y \rightarrow Y'_y$ soit fini et surjectif (13.3.1.1). D'autre part, pour prouver que $\mathcal{F}|U$ est g -plat au point x , il suffit, puisque $h : Y' \rightarrow Y$ est plat, de montrer (en vertu du critère de platitude par fibres (11.3.10)) que \mathcal{F}_y est g_y -plat au point x . Mais par hypothèse \mathcal{F}_y est un \mathcal{O}_{x_y} -Module de Cohen-Macaulay au point x et Y'_y un préschéma régulier; d'autre part, comme g_y est fini et surjectif, il vérifie la condition e' de (15.4.2) en vertu de (5.6.10); il suffit donc pour conclure d'appliquer (15.4.2) à g_y et à \mathcal{F}_y .

15.5. Rang séparable des fibres d'un morphisme quasi-fini et universellement ouvert. Application aux composantes connexes géométriques des fibres d'un morphisme propre.

Proposition (15.5.1). — Soient Y un préschéma localement noethérien, $f : X \rightarrow Y$ un morphisme séparé et quasi-fini. Pour tout $z \in Y$, soit $n(z)$ le nombre géométrique des points de $f^{-1}(z)$ (ou rang séparable de $f^{-1}(z)$ sur $k(z)$; cf. I, 6.4.8). On a les propriétés suivantes :

(i) La fonction $z \rightsquigarrow n(z)$ est semi-continue inférieurement en tout point $y \in Y$ tel que f soit universellement ouvert aux points de $f^{-1}(y)$.

(ii) Soit y un point de Y tel que f soit universellement ouvert aux points de $f^{-1}(y)$; si la fonction $z \rightsquigarrow n(z)$ est constante dans un voisinage de y , alors f est propre au point y (15.7.1).

(iii) On suppose que f soit universellement ouvert et que tout point de Y soit géométriquement unibranche; alors, si la fonction $z \rightsquigarrow n(z)$ est localement constante dans Y , les composantes irréductibles de X sont deux à deux disjointes.

(i) Notons que puisque f est quasi-fini, le nombre $n(z)$ est le nombre géométrique des composantes connexes de $f^{-1}(z)$; on sait que la fonction $z \rightsquigarrow n(z)$ est localement constructible (9.7.9); compte tenu de (0_{III}, 9.3.4), on est ramené à prouver le

Corollaire (15.5.2). — Sous les hypothèses générales de (15.5.1), soit y un point de Y tel que f soit universellement ouvert aux points de $f^{-1}(y)$. Alors, si y' est une généralisation de y , on a

$$(15.5.2.1) \quad n(y) \leq n(y').$$

Pour tout changement de base $g : Z \rightarrow Y$, $f_{(z)} : X_{(z)} \rightarrow Z$ est séparé, quasi-fini et universellement ouvert aux points de $X_{(z)}$ se projetant dans $f^{-1}(y)$; en outre, si z, z' sont deux points de Z tels que $g(z) = y, g(z') = y'$ et que z' soit généralisation de z , on a $n(z) = n(y)$ et $n(z') = n(y')$ (I, 6.4.12); il suffit donc de démontrer (15.5.2.1) pour un g convenable. On peut évidemment supposer $y \neq y'$. Nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme (15.5.2.2). — Sous les hypothèses générales de (15.5.1), si y est un point de Y , y' une généralisation de y distincte de y , il existe un spectre d'anneau de valuation discrète Z , de point fermé z et de point générique z' , et un morphisme $g : Z \rightarrow Y$ tels que : 1° $g(z) = y, g(z') = y'$; 2° si l'on pose $f' = f_{(z)}$, $n(y)$ est le nombre de points de $f'^{-1}(z)$ et $n(y')$ est le nombre de points de $f'^{-1}(z')$.

En effet, il existe un anneau de valuation discrète A_1 et un morphisme g_1 de $Z_1 = \text{Spec}(A_1)$ dans Y tels que si z_1 et z'_1 sont le point fermé et le point générique de Z_1 ,

on ait $g_1(z_1) = y$ et $g_1(z'_1) = y'$ (II, 7.1.9); on peut donc déjà supposer que Y est spectre d'un anneau de valuation discrète A , y son point fermé et y' son point générique. Pour tout $x \in f^{-1}(y)$, $k(x)$ est une extension finie de $k(y)$ par hypothèse (II, 6.2.2); on déduit de (4.5.11) qu'il existe une extension algébrique finie k de $k(y)$ telle que le nombre de points de $f^{-1}(y) \otimes_{k(y)} k$ soit égal à $n(y)$. Comme il y a un anneau de valuation discrète A_2 dominant A et dont le corps résiduel est fini sur $k(y)$ et contient k (II, 7.1.2), on peut en second lieu supposer que $n(y)$ est le nombre de points de $f^{-1}(y)$. Enfin, le même raisonnement montre qu'il y a une extension finie K de $k(y')$ telle que le nombre de points de $f^{-1}(y') \otimes_{k(y')} K$ soit égal à $n(y')$; si w est une valuation de $k(y')$ associée à A , il y a une valuation discrète de K prolongeant w , et l'anneau A_3 de cette valuation domine A , a K pour corps des fractions, et répond aux conditions du lemme.

On peut donc désormais supposer que Y est le spectre d'un anneau de valuation discrète, y son point fermé, y' son point générique, et que $n(y)$ et $n(y')$ sont les nombres de points de $f^{-1}(y)$ et $f^{-1}(y')$, de sorte que pour tout $x \in f^{-1}(y)$ (resp. tout $x' \in f^{-1}(y')$) on a $k(x) = k(y)$ (resp. $k(x') = k(y')$).

Désignons alors par X_i les sous-préschémas réduits de X ayant pour espaces sous-jacents les composantes irréductibles de X ($1 \leq i \leq m$). En vertu de (1.10.4), la restriction $X_i \rightarrow Y$ de f à tout X_i est un morphisme dominant, et comme $f^{-1}(y')$ est discret, chacune des intersections $X_i \cap f^{-1}(y')$ est réduite au point générique de X_i , d'où (en désignant par $n_i(z)$ le nombre géométrique de points de $X_i \cap f^{-1}(z)$ pour tout $z \in Y$), $n_i(y') = 1$ pour tout i , et $n(y') = \sum_{i=1}^m n_i(y') = m$. Par ailleurs, $f^{-1}(y)$ est réunion des $X_i \cap f^{-1}(y)$, d'où

$$(15.5.2.3) \quad n(y) \leq \sum_{i=1}^m n_i(y),$$

et pour prouver (15.5.2.1), il suffit d'établir que $n_i(y) \leq 1$ pour tout i . Autrement dit, on peut supposer X intègre, et le morphisme f birationnel. Mais alors, pour tout $x \in f^{-1}(y)$, on a $\mathcal{O}_y \subset \mathcal{O}_x \subset K$, où $K = k(y')$ est le corps des fractions de \mathcal{O}_y . Comme \mathcal{O}_y est un anneau de valuation et que \mathcal{O}_x domine \mathcal{O}_y , on a nécessairement $\mathcal{O}_y = \mathcal{O}_x$ (II, 7.1.1). Il existe alors une Y -section $h : Y \rightarrow X$ telle que $h(y) = x$ (I, 2.4.4); comme Y est réduit et que X est séparé sur Y , une telle section est unique (I, 7.2.2), donc l'ensemble $f^{-1}(y)$ ne contient qu'un seul point, ce qui achève de prouver (i).

(ii) Comme au début de (i), on est ramené à montrer que si les deux membres de (15.5.2.1) sont égaux pour toute généralisation y' de y , f est propre au point y . Grâce au critère de propreté locale (15.7.5) et aux remarques du début on peut encore supposer que $Y = \text{Spec}(A)$ est le spectre d'un anneau de valuation discrète A , y son point fermé et y' son point générique, et il s'agit alors de montrer que f est propre.

Utilisons (15.5.2.2) et notons que si A' est un anneau de valuation discrète dominant A , A' est un A -module sans torsion, donc le morphisme $\text{Spec}(A') \rightarrow \text{Spec}(A)$ est fidèlement plat et quasi-compact, et il revient donc au même de dire que f est propre ou que le morphisme déduit de f par le changement de base $\text{Spec}(A') \rightarrow \text{Spec}(A)$ est

propre (2.7.1, (vii)); on peut donc supposer que $n(y)$ et $n(y')$ sont les nombres de points des fibres $f^{-1}(y)$ et $f'^{-1}(y')$ respectivement. Avec les notations de (i), on a alors par (15.5.2.3) et (15.5.2.1)

$$(15.5.2.4) \quad n(y) \leq \sum_i n_i(y) \leq \sum_i n_i(y') = n(y')$$

et pour que les membres extrêmes soient égaux, il faut que $n_i(y) = n_i(y') = 1$ pour tout i . Comme on l'a vu dans (i), si $n_i(y) = 1$ pour tout i , $X_i \cap f^{-1}(y)$ n'est pas vide et la restriction $X_i \rightarrow Y$ de f est un isomorphisme; comme les X_i sont des sous-préschémas fermés de X , cela entraîne que f est propre (II, 5.4.5).

(iii) On peut se borner au cas où Y est affine et réduit, et comme Y est par hypothèse localement intègre (I, 5.1.4), on peut supposer Y intègre, et la fonction $y \mapsto n(y)$ constante dans Y . Soient encore X_i ($1 \leq i \leq m$) les composantes irréductibles de X . Il résulte de (1.10.4) que si y' est le point générique de Y , chacun des $X_i \cap f^{-1}(y')$ est réduit à un seul point; la restriction $f_i : X_i \rightarrow Y$ de f étant un morphisme quasi-fini et dominant et tout point de Y étant géométriquement unibranche, il résulte du critère de Chevalley (14.4.4) que f_i est *universellement ouvert*. Si alors y est un point quelconque de Y , on a $n_i(y) \leq n_i(y')$; d'autre part, comme les $X_i \cap f^{-1}(y)$ sont deux à deux disjoints, $\sum_i n_i(y) = n(y)$; on a donc encore les relations (15.5.2.4). Mais par hypothèse les membres extrêmes sont égaux, donc $n(y) = \sum_i n_i(y)$, ce qui implique que les $X_i \cap f^{-1}(y)$ sont deux à deux disjoints, et achève la démonstration.

Combinant cette proposition avec le théorème de connexion de Zariski et ses conséquences (III, 4.3), on obtient les résultats suivants qui complètent (III, 4.3.7 et 4.3.10) :

Proposition (15.5.3). — Soient Y un préschéma irréductible localement noethérien, $f : X \rightarrow Y$ un morphisme propre; pour tout $y \in Y$, soit $n(y)$ le nombre géométrique de composantes connexes (4.5.2) de $f^{-1}(y)$. On suppose que la restriction de f à toute composante irréductible de X soit un morphisme dominant dans Y . Alors, si y_0 est un point géométriquement unibranche de Y , la fonction $y \mapsto n(y)$ est semi-continue inférieurement au point y_0 .

Considérons la factorisation de Stein $f = g \circ f'$ de f (III, 4.3.3), où $g : Y' \rightarrow Y$ est un morphisme fini et $f' : X \rightarrow Y'$ un morphisme surjectif dont les fibres sont géométriquement connexes (III, 4.3.4). Puisque f' est surjectif, l'image réciproque par f' de toute composante irréductible de Y' contient une composante irréductible de X au moins; donc chacune des composantes irréductibles de Y' domine Y . On peut donc appliquer le critère de Chevalley (14.4.4) aux restrictions de g à chacune de ces composantes irréductibles, et on en conclut que g est *universellement ouvert en tout point de $g^{-1}(y_0)$* . La conclusion résulte donc de (15.5.2) et du fait que le nombre géométrique des composantes connexes de $f^{-1}(y)$ est égal au nombre géométrique des points de $g^{-1}(y)$ (III, 4.3.4).

Corollaire (15.5.4). — Soient Y un préschéma localement noethérien, $f : X \rightarrow Y$ un morphisme propre; soit y un point de Y tel que f soit universellement ouvert aux points de $f^{-1}(y)$;

alors, avec les notations de (15.5.3), la fonction $z \mapsto n(z)$ est semi-continue inférieurement au point y .

Avec les notations de (15.5.3), notons que dans la factorisation de Stein $f = g \circ f'$, f' est surjectif; comme f est universellement ouvert aux points de $f^{-1}(y)$, g est universellement ouvert aux points de $g^{-1}(y)$ (14.3.4, (i)); il suffit alors d'appliquer à g la proposition (15.5.1, (i)) en tenant compte de (III, 4.3.4).

Remarques (15.5.5). — (i) Même si Y est intègre et normal, X intègre, f fini et surjectif (donc universellement ouvert en vertu du critère de Chevalley (14.4.4)), la fonction $y \mapsto n(y)$ n'est pas nécessairement localement constante. On en a un exemple en prenant $Y = \text{Spec}(k[T])$ où k est algébriquement clos, et $X = \text{Spec}(A)$, où $A = k[S, T]/(S^2 + T^2 - 1)$; aux points y', y'' de Y correspondant aux idéaux maximaux $(T-1)$ et $(T+1)$, on a $n(y') = n(y'') = 1$, mais $n(y) = 2$ en tous les autres points de Y . On va donner ci-dessous une condition supplémentaire assurant que $y \mapsto n(y)$ est localement constante (15.5.7).

(ii) L'exemple (14.4.10, (ii)) montre que dans (15.5.1, (iii)), on ne peut supprimer l'hypothèse que les points de Y sont géométriquement unibranches.

(iii) L'exemple (11.7.5) montre que la conclusion de (15.5.1, (i)) n'est plus valable si on suppose seulement que le morphisme f est ouvert (même si, comme c'est le cas dans l'exemple cité, f est fini et surjectif).

(iv) Enfin, dans (15.5.1), on ne peut se dispenser de l'hypothèse que le morphisme f est séparé, comme le montre l'exemple où X est la droite affine dont on a « dédoublé un point » (I, 5.5.11), et Y la droite affine : ici f est un isomorphisme local (donc est plat) et est quasi-fini, mais $z \mapsto n(z)$ n'est pas semi-continue inférieurement.

Lemme (15.5.6). — Soit Y le spectre d'un anneau de valuation discrète, a son point fermé, b son point générique. Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme localement de type fini et ouvert. Supposons que X soit connexe et que la fibre $f^{-1}(a)$ soit un préschéma réduit. Alors $f^{-1}(b)$ est connexe.

Nous utiliserons le lemme purement topologique suivant (cas particulier d'un résultat plus général du chap. III, 3^e Partie) :

Lemme (15.5.6.1). — Soit X un espace localement noethérien, dont toute partie fermée irréductible admet un point générique. Soit Z une partie fermée rare de X ayant la propriété suivante : pour tout $x \in Z$, si l'on désigne par T_x l'ensemble des générations de x dans X , alors $T_x - \{x\}$ est connexe. Dans ces conditions, si X est connexe, $X - Z$ est connexe.

Donnons-en une démonstration indépendante. Raisonnant par l'absurde, supposons que l'ouvert $U = X - Z$, partout dense dans X , soit réunion de deux ouverts non vides sans point commun U' , U'' , et désignons par X' et X'' les adhérences dans X de U' et U'' . Comme $X = \bar{U} = X' \cup X''$ et que X est connexe, on a $X' \cap X'' \neq \emptyset$, et il est clair que $X' \cap X'' \subset Z$. Soit x un point générique d'une composante irréductible de $X' \cap X''$. Comme X est localement noethérien, il y a un voisinage ouvert V de x dans X tel que $V \cap U'$ et $V \cap U''$ n'aient qu'un nombre fini de composantes irréductibles; comme x est adhérent à U' et à U'' , il est nécessairement dans l'adhérence d'une composante irréductible Z' de $V \cap U'$ et dans l'adhérence d'une composante irréductible Z'' de $V \cap U''$. Mais \bar{Z}' (resp. \bar{Z}'') est fermé et irréductible dans X , donc admet un point générique z' (resp. z''), et on a nécessairement $z' \in U'$ et $z'' \in U''$. Ceci prouve que les intersections de $T_x - \{x\}$ avec U' et U'' sont non vides. Mais par définition $(X' \cap X'') \cap (T_x - \{x\}) = \emptyset$; donc les intersections de X' et de X'' avec $T_x - \{x\}$ sont deux fermés non vides disjoints dans $T_x - \{x\}$, dont la réunion est $T_x - \{x\}$; or cela contredit l'hypothèse que $T_x - \{x\}$ est connexe. C.Q.F.D.

Pour prouver (15.5.6), nous appliquerons le lemme (15.5.6.1) à X et à sa partie fermée $Z=f^{-1}(a)$ qui est rare puisque f est ouvert. Notons que l'hypothèse, compte tenu de (15.2.2.1), implique que f est *plat* aux points de $f^{-1}(a)$. Pour un tel point x , \mathcal{O}_x est donc un \mathcal{O}_a -module sans torsion (01, 6.3.4), et en particulier, si t est une uniformisante de \mathcal{O}_a , t est \mathcal{O}_x -régulier. En outre $\mathcal{O}_x/t\mathcal{O}_x$ est réduit par hypothèse; s'il est de profondeur 0, c'est donc un corps (0, 16.4.7), et comme $t\mathcal{O}_x$ est alors l'idéal maximal de \mathcal{O}_x , \mathcal{O}_x est un anneau de valuation discrète (0, 17.1.4), donc $\text{Spec}(\mathcal{O}_x)-\{x\}$ est réduit à un point, et *a fortiori* est connexe. Si au contraire $\text{prof}(\mathcal{O}_x/t\mathcal{O}_x) \geq 1$, on a $\text{prof}(\mathcal{O}_x) \geq 2$ puisque t est \mathcal{O}_x -régulier (0, 16.4.6); il résulte alors du théorème de Hartshorne (5.10.7) que $\text{Spec}(\mathcal{O}_x)-\{x\}$ est connexe, ce qui termine la démonstration.

Proposition (15.5.7). — Soient Y un préschéma localement noethérien, $f: X \rightarrow Y$ un morphisme propre. Pour tout $z \in Y$, soit $n(z)$ le nombre géométrique de composantes connexes de $f^{-1}(z)$. Soit y un point de Y tel que f soit universellement ouvert aux points de $f^{-1}(y)$ et que $f^{-1}(y)$ soit géométriquement réduit sur $k(y)$ (4.6.2). Alors la fonction $z \mapsto n(z)$ est constante dans un voisinage de y .

On sait déjà (15.5.4) que sous les conditions de l'énoncé, $z \mapsto n(z)$ est semi-continue inférieurement au point y ; tout revient à voir qu'elle est aussi semi-continue supérieurement, et par le même raisonnement qu'au début de la démonstration de (15.5.1, (i)), il suffit de montrer que si y' est une généralisation de y , on a

$$(15.5.7.1) \quad n(y') \leq n(y).$$

Utilisant le raisonnement du début de la démonstration de (15.5.2) et le lemme (15.5.2.2) appliqué au morphisme fini g de la factorisation de Stein $f = g \circ f'$ de f (en se souvenant que le nombre géométrique de points de $g^{-1}(y)$ est égal à celui des composantes connexes de $f^{-1}(y)$ (III, 4.3.4)), on se ramène au cas où $n(y)$ et $n(y')$ sont respectivement le nombre de composantes connexes de $f^{-1}(y)$ et $f^{-1}(y')$, et où Y est le spectre d'un anneau de valuation discrète, y le point fermé et y' le point générique de Y . On peut en outre remplacer X par une quelconque de ses composantes connexes, ces dernières étant ouvertes et fermées dans X , et propres sur Y . Supposons donc X connexe; l'hypothèse que f est ouvert aux points de $f^{-1}(y)$ entraîne que si $f^{-1}(y) \neq \emptyset$, on a aussi $f^{-1}(y') \neq \emptyset$ (1.10.3); l'hypothèse que f est fermé entraîne que si $f^{-1}(y') \neq \emptyset$, on a aussi $f^{-1}(y) \neq \emptyset$ (II, 7.2.1). Donc, si $X \neq \emptyset$ (ce qu'on peut évidemment supposer, la proposition étant triviale dans le cas contraire), $f^{-1}(y)$ et $f^{-1}(y')$ sont tous deux non vides. En outre, l'hypothèse entraîne que le préschéma $f^{-1}(y)$ est *réduit* (4.6.1); comme f est ouvert aux points de $f^{-1}(y)$, le lemme (15.5.6) implique que $f^{-1}(y')$ est connexe, autrement dit $n(y') = 1$. Comme $f^{-1}(y)$ n'est pas vide, cela prouve (15.5.7.1).

Remarque (15.5.8). — La relation (15.5.7.1) n'est plus nécessairement valable si f n'est pas supposé propre, même s'il vérifie les autres hypothèses de (15.5.7). Avec les notations de (15.5.5, (i)), il suffit pour le voir de considérer la restriction de f à $X - \{x'\}$, où x' est un des deux points de X au-dessus d'un point y distinct de y' et y'' ; on a alors $n(y) = 1$, tandis que si η est le point générique de Y , $n(\eta) = 2$.

Proposition (15.5.9). — Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme plat et localement de présentation finie; pour tout $y \in Y$, soit $n(y)$ le nombre géométrique de composantes connexes de $f^{-1}(y)$.

(i) Si f est séparé et quasi-fini, la fonction $y \mapsto n(y)$ (égale alors au nombre géométrique des points de $f^{-1}(y)$) est semi-continue inférieurement dans Y ; si elle est constante dans un voisinage de y_0 , f est propre au point y_0 .

(ii) Si f est propre, la fonction $y \mapsto n(y)$ est semi-continue inférieurement dans Y ; si de plus $f^{-1}(y_0)$ est géométriquement réduit sur $\mathbf{k}(y_0)$, $n(y)$ est constante dans un voisinage de y_0 .

Dans tous les cas, les questions sont locales sur Y , donc on peut supposer Y affine et f de présentation finie; utilisant (8.9.1), (8.10.5) et (11.2.7), on se ramène au cas où Y est noethérien (en utilisant en outre (8.2.11) pour la seconde assertion de (i)). Comme de plus f est alors universellement ouvert (2.4.6), il suffit d'appliquer (15.5.1), (15.5.4) et (15.5.7) pour conclure.

Remarque (15.5.10). — On notera qu'on a ainsi obtenu une autre démonstration de (12.2.4, (vi)). Inversement, on peut déduire (15.5.7) de (12.2.4, (vi)) : en effet, on peut se borner au cas où Y est réduit (en remplaçant f par f_{red}), et il résulte alors des hypothèses de (15.5.7) et de (15.2.3) que f est plat dans un voisinage ouvert de $f^{-1}(y)$; comme de plus f est propre, on peut supposer que ce voisinage est de la forme $f^{-1}(U)$, où U est un voisinage ouvert de y dans Y . On conclut alors par (12.2.4, (vi)). La démonstration de (15.5.7) donnée plus haut a l'avantage de mettre en évidence le résultat (15.5.6), qui a un intérêt indépendant.

15.6. Composantes connexes des fibres le long d'une section.

Proposition (15.6.1). — Soient Y un préschéma localement noethérien, $f : X \rightarrow Y$ un morphisme localement de type fini, $g : Y \rightarrow X$ une Y -section de X (I, 2.5.5). Pour tout $y \in Y$, désignons par X_y^0 la composante connexe de $f^{-1}(y)$ contenant le point $g(y)$. Soient y' un point de Y , v' une généralisation de y dans Y . Alors :

(i) S'il existe une composante irréductible Z de $X_{y'}$, de dimension égale à $\dim(X_{y'}^0)$ et contenant $g(y')$ (ce qui sera le cas si $X_{y'}^0$ est irréductible), on a

$$(15.6.1.1) \quad \dim(X_y^0) \geq \dim(X_{y'}^0).$$

(ii) Si de plus X_y^0 est irréductible et si les deux membres de (15.6.1.1) sont égaux, alors $X_y^0 \subset \overline{X_{y'}^0}$ (adhérence dans X).

(i) Soit \overline{Z} l'adhérence de Z dans X ; comme y est adhérent à y' et g continue, on a $g(y) \in \overline{Z}$. Comme $Z = \overline{Z} \cap f^{-1}(y')$, il résulte du théorème de semi-continuité de Chevalley (13.1.3) appliqué à la restriction de f au sous-préschéma fermé réduit de X ayant \overline{Z} pour espace sous-jacent, que l'on a $\dim_{g(y)}(\overline{Z} \cap f^{-1}(y)) \geq \dim(Z)$; mais les composantes irréductibles de $\overline{Z} \cap f^{-1}(y)$ contenant $g(y)$ sont évidemment contenues dans X_y^0 , d'où a fortiori l'inégalité (15.6.1.1).

(ii) Le raisonnement de (i) montre en outre que si les deux membres de (15.6.1.1) sont égaux, on a nécessairement $\dim_{g(y)}(\overline{Z} \cap f^{-1}(y)) = \dim_{g(y)}(X_y^0)$; si X_y^0 est irréductible, cela entraîne $\overline{Z} \cap f^{-1}(y) = X_y^0$, donc X_y^0 est contenu dans \overline{Z} , et a fortiori dans $\overline{X_{y'}^0}$.

Corollaire (15.6.2). — Avec les notations de (15.6.1), supposons en outre que pour tout $y \in Y$, X_y^0 soit irréductible. Alors la fonction $z \mapsto \dim(X_z^0)$ est semi-continue supérieurement dans Y . Si en outre cette fonction est constante dans un voisinage d'un point $y \in Y$, alors on a $X_y^0 \subset \overline{X_{y'}^0}$ pour toute généralisation y' de y .

Soit y un point de Y , et soit U un voisinage ouvert affine de $g(y)$ dans X ; alors il y a un voisinage ouvert V de y dans Y tel que $g(V) \subset U$, et pour tout $z \in V$, $U \cap X_z^0$ est dense dans X_z^0 , donc $\dim(X_z^0) = \dim(U \cap X_z^0)$ (4.1.1.3). Remplaçant X par U , on peut donc supposer que f est un morphisme de type fini. On sait alors (9.7.10) que la fonction $z \mapsto \dim(X_z^0)$ est localement constructible, et les assertions du corollaire résultent donc de (15.6.1) et de (0_{III}, 9.3.4).

Proposition (15.6.3). — Avec les notations de (15.6.1), supposons que pour tout $y \in Y$, X_y^0 soit géométriquement irréductible (4.5.2). Alors, pour tout $y \in Y$ tel que la fonction $z \mapsto \dim(X_z^0)$ soit constante dans un voisinage de y , f est universellement ouvert aux points de X_y^0 .

Appliquons le critère (14.3.7). Soit donc $h : Y' \rightarrow Y$ un morphisme, Y' étant le spectre d'un anneau de valuation discrète, dont nous désignerons par t, t' le point fermé et le point générique respectivement, et supposons que $h(t) = y$, de sorte que $y' = h(t')$ est une généralisation de y . Posons $X' = X \times_Y Y'$, $f' = f_{(Y')} : X' \rightarrow Y'$, $g' = g_{(Y')} : Y' \rightarrow X'$. Avec les mêmes notations que dans (15.6.1), l'hypothèse faite sur les X_z^0 implique que $X_t'^0 = X_y^0 \otimes_{\mathbf{k}(y)} \mathbf{k}(t)$ et $X_{t'}'^0 = X_y^0 \otimes_{\mathbf{k}(y')} \mathbf{k}(t')$, et que $X_t'^0$ et $X_{t'}'^0$ sont irréductibles (4.4.1); comme $\dim(X_y^0) = \dim(X_t'^0)$ et $\dim(X_y^0) = \dim(X_{t'}'^0)$ (4.1.4), on voit qu'on est ramené à prouver la proposition pour f' et $X_t'^0$, autrement dit on peut se borner au cas où Y est spectre d'un anneau de valuation discrète, y son point fermé et y' son point générique; si x' est le point générique de X_y^0 , il résulte alors de (15.6.2) que tout point de X_y^0 est spécialisation de x' , d'où la conclusion.

Proposition (15.6.4). — Sous les hypothèses générales de (15.6.1), soit X^0 la réunion des X_y^0 lorsque y parcourt Y . Si $y \in Y$ est tel que X_y^0 soit géométriquement réduit sur $\mathbf{k}(y)$ (4.6.2) et si f est universellement ouvert en tout point de X_y^0 , alors X^0 est un voisinage de X_y^0 dans X . En particulier, si f est universellement ouvert et si, pour tout $y \in Y$, X_y^0 est géométriquement réduit sur $\mathbf{k}(y)$, X^0 est ouvert dans X .

Montrons d'abord qu'on peut se ramener au cas où f est un morphisme de type fini. Soit x un point de X_y^0 ; il résulte de (5.10.8.1) (avec $\mathfrak{F} = \{\emptyset\}$) qu'il y a une suite finie $(Z_i)_{0 \leq i \leq n}$ de composantes irréductibles de $f^{-1}(y)$ telle que $g(y) \in Z_0$, $x \in Z_n$ et $Z_i \cap Z_{i+1} \neq \emptyset$ pour $0 \leq i \leq n-1$; les Z_i étant irréductibles, il y a une suite finie (U_i) ($1 \leq i \leq n$) d'ouverts affines dans $f^{-1}(y)$ tels que $g(y) \in U_1$, $x \in U_n$, U_i étant un voisinage affine d'un point x_i de $Z_i \cap Z_{i-1}$ pour $1 \leq i \leq n$. Il y a pour chaque i un ouvert quasi-compact W_i dans X tel que $U_i = f^{-1}(y) \cap W_i$; soit W l'ouvert quasi-compact de X réunion des W_i . Comme g est continue, il y a un voisinage ouvert affine V de y dans Y tel que $g(V) \subset W$; si $X' = W \cap g^{-1}(V)$, la restriction de f à X' est de type fini; en outre, si, pour tout $z \in V$, X_z^0 est la composante connexe de $X' \cap f^{-1}(z)$ contenant $g(z)$, on a $X_z'^0 \subset X_z^0$, et x appartient à $X_y'^0$. En effet, chacun des U_i contient les deux ensembles irréductibles $U_i \cap Z_{i-1}$ et $U_i \cap Z_i$ qui se rencontrent, et les ensembles irréductibles $U_i \cap Z_{i-1}$ et $U_{i-1} \cap Z_{i-1}$

se rencontrent pour $2 \leq i \leq n$; la réunion des $U_i \cap Z_{i-1}$ et des $U_i \cap Z_i$ pour $1 \leq i \leq n$ est donc connexe et contient x et $g(y)$. Comme $f|X'$ est universellement ouvert aux points de X_y^0 , cela achève de prouver notre assertion, car si la proposition est prouvée lorsque f est de type fini, la réunion X^0 des X_z^0 pour $z \in V$ sera un voisinage de x , et il en sera de même de X^0 .

Supposons donc f de type fini. Alors X^0 est localement constructible (9.7.12); il suffit par suite de montrer que X^0 contient toute généralisation x' de x (0_{III}, 9.2.5). Posons $y' = f(x')$; il existe un anneau de valuation discrète A et un morphisme u de $Y' = \text{Spec}(A)$ dans X tels que, si z est le point fermé et z' le point générique de Y' , on ait $u(z) = x$ et $u(z') = x'$ (II, 7.1.9); si $h = f \circ u$, on a donc $h(z) = y$ et $h(z') = y'$. Posons $X' = X \times_Y Y'$, $f' = f|_{X'} : X' \rightarrow Y'$, qui est un morphisme de type fini universellement ouvert aux points de $f'^{-1}(z)$, et $g' = g|_{Y'}$, qui est une Y' -section de X' . Si $p_y : f'^{-1}(z) \rightarrow f^{-1}(y)$ (resp. $p_{y'} : f'^{-1}(z') \rightarrow f^{-1}(y')$) est la projection canonique, $p_y^{-1}(X_y^0)$ (resp. $p_{y'}^{-1}(X_{y'}^0)$) est la composante connexe de $f'^{-1}(z)$ (resp. $f'^{-1}(z')$) contenant $g'(z)$ (resp. $g'(z')$), car les X_i^0 sont géométriquement connexes (4.5.13) et il suffit d'appliquer (4.4.1). De plus, le morphisme u correspond à une Y' -section v de X' telle que $p_y(v(y)) = x$, $p_{y'}(v(y')) = x'$, de sorte que $v(y')$ est une généralisation de $v(y)$, et il suffira donc de prouver que $v(y')$ appartient à $p_{y'}^{-1}(X_{y'}^0)$. Enfin, il est clair que $p_y^{-1}(X_y^0)$ est géométriquement réduit sur $k(z)$.

En d'autres termes, on est ramené au cas où Y est spectre d'un anneau de valuation discrète, y son point fermé, y' son point générique. Comme $f^{-1}(y) - X_y^0$ est alors fermé dans X , on peut, en remplaçant X par l'ouvert $X - (f^{-1}(y) - X_y^0)$, supposer que $X_y^0 = f^{-1}(y)$; de même, on peut remplacer X par l'ouvert, composante connexe de X , qui contient $g(Y)$, cette composante connexe contenant évidemment X^0 ; autrement dit, on peut supposer X connexe. La proposition sera alors établie si l'on montre que $X^0 = X$, ou encore que $X_{y'}$ est connexe; mais $f^{-1}(y')$ est géométriquement réduit sur $k(y')$, et *a fortiori* réduit; comme en outre f est ouvert aux points de $f^{-1}(y)$, on peut appliquer le lemme (15.5.6), d'où la conclusion.

Corollaire (15.6.5). — Soient $f : X \rightarrow Y$ un morphisme plat de présentation finie, g une Y -section de X ; pour tout $y \in Y$, soit X_y^0 la composante connexe de $f^{-1}(y)$ contenant $g(y)$, et soit X^0 la réunion des X_y^0 quand y parcourt Y . Alors, pour tout $y \in Y$ tel que X_y^0 soit géométriquement réduit sur $k(y)$, X^0 est un voisinage de X_y^0 dans X . En particulier, si f est réduit (6.8.1), X^0 est ouvert dans X .

La question étant locale sur Y , on peut supposer $Y = \text{Spec}(A)$ affine. Il existe donc un sous-anneau noethérien A_0 et un morphisme plat de type fini $f_0 : X_0 \rightarrow Y_0 = \text{Spec}(A_0)$ tels que $X = X_0 \times_{Y_0} Y$ et $f = (f_0)_Y$ ((8.9.1) et (11.2.7)); en outre, on peut supposer qu'il existe une Y_0 -section g_0 de X_0 telle que $g = (g_0)_Y$ (8.8.2). Pour tout $y \in Y$, soit y_0 sa projection dans Y_0 ; il résulte de (4.5.13) que $(X_0)_{y_0}^0$ est géométriquement connexe, donc, si $p : f^{-1}(y) \rightarrow f_0^{-1}(y_0)$ est la projection canonique, on a $X_y^0 = p^{-1}((X_0)_{y_0}^0)$ (4.4.1); de plus, l'hypothèse que X_y^0 est géométriquement réduit sur $k(y)$ entraîne que $(X_0)_{y_0}^0$ est géométriquement réduit sur $k(y_0)$ (4.6.10). On est ainsi ramené au cas où on suppose

en outre Y noethérien; comme f est universellement ouvert (11.1.1), il suffit alors d'appliquer (15.6.4).

Proposition (15.6.6). — Soit $f: X \rightarrow Y$ un morphisme tel que Y soit localement noethérien et f localement de type fini, ou que f soit de présentation finie. Soit g une Y -section de X ; pour tout $y \in Y$, soit X_y^0 la composante connexe de $f^{-1}(y)$ contenant $g(y)$; enfin, soit X^0 la réunion des X_y^0 lorsque y parcourt Y .

Supposons que, pour tout $y \in Y$, X_y^0 soit géométriquement irréductible. Alors :

(i) La fonction $y \mapsto \dim(X_y^0)$ est semi-continue supérieurement dans Y .

(ii) Soient $x_0 \in X^0$, $y_0 = f(x_0)$. Si la fonction $y \mapsto \dim(X_y^0)$ est constante dans un voisinage de y_0 , il existe un voisinage ouvert U de y_0 tel que f soit universellement ouvert aux points de $X^0 \cap f^{-1}(U)$. Si de plus Y est réduit et $f^{-1}(y_0)$ géométriquement réduit sur $\mathbf{k}(y_0)$ au point x_0 , f est plat au point x_0 .

(iii) Inversement, supposons que f soit universellement ouvert au point générique de $X_{y_0}^0$ et en outre que l'une des conditions suivantes soit vérifiée :

α) La fibre $f^{-1}(y_0)$ est géométriquement réduite sur $\mathbf{k}(y_0)$ au point $g(y_0)$ et l'anneau \mathcal{O}_{X, y_0} est noethérien.

β) Pour tout point générique y' d'une composante irréductible de Y contenant y_0 , on a $\dim(f^{-1}(y')) = \dim(X_{y'}^0)$.

Alors la fonction $y \mapsto \dim(X_y^0)$ est constante dans un voisinage de y_0 .

(iv) L'ensemble W des points $x \in X^0$ tels que la fonction $y \mapsto \dim(X_y^0)$ soit constante dans un voisinage de $f(x)$ et que $X_{f(x)}^0$ soit géométriquement réduit sur $\mathbf{k}(f(x))$, est ouvert dans X .

Les questions étant locales sur Y , on peut supposer que $Y = \text{Spec}(A)$ est affine. Lorsque f est de présentation finie, il existe donc un sous-anneau noethérien A_1 de A et un morphisme de type fini $f_1: X_1 \rightarrow Y_1 = \text{Spec}(A_1)$ tels que $X = X_1 \times_{Y_1} Y$ et $f = (f_1)_{(Y)}$ (8.9.1); en outre, on peut supposer qu'il existe une Y_1 -section g_1 de X_1 telle que $g = (g_1)_{(Y)}$ (8.8.2). Pour tout $y \in Y$, soit y_1 sa projection dans Y_1 ; il résulte de (4.5.13) que $(X_1)_{y_1}^0$ est géométriquement connexe, donc, si $p: f^{-1}(y) \rightarrow f_1^{-1}(y_1)$ est la projection canonique, on a $X_y^0 = p^{-1}((X_1)_{y_1}^0)$ (4.4.1). Notons d'autre part que l'on peut, en vertu de (9.7.11) et (9.7.12), appliquer (9.3.3) à la propriété d'être géométriquement irréductible; on peut donc supposer A_1 choisi de telle sorte que $(X_1)_{y_1}^0$ soit géométriquement irréductible pour tout $y_1 \in Y_1$. On a $\dim(X_y^0) = \dim((X_1)_{y_1}^0)$ (4.1.4), et en appliquant de nouveau (9.3.3) à la propriété d'avoir une dimension donnée (et utilisant (9.5.5) et (9.7.12)), on peut supposer (en restreignant au besoin Y à un voisinage de y_0) que si $\dim(X_y^0)$ est constante dans Y , alors $\dim((X_1)_{y_1}^0)$ est constante dans Y_1 . Si Y est réduit, il en est de même de Y_1 puisque $A_1 \subset A$; d'autre part, si $f^{-1}(y_0)$ est géométriquement réduit au point x_0 , $f_1^{-1}(y_{01})$ l'est au point x_{01} (x_{01} et y_{01} étant les projections respectives dans X_1 et Y_1 de x_0 et y_0) (4.6.10).

Ces remarques montrent que pour démontrer (i) et (ii), on peut se borner au cas où Y est noethérien et f localement de type fini. Mais dans ce cas, l'assertion (i) résulte de (15.6.2) et la première assertion de (ii) de (15.6.3). D'autre part, si Y est réduit et $f^{-1}(y_0)$ géométriquement réduit sur $\mathbf{k}(y_0)$ au point x_0 (Y étant toujours supposé

noethérien), comme X_y^0 est la *seule* composante irréductible de $f^{-1}(y)$ contenant x , on déduit de (15.6.3) et (15.2.3) que si $\dim(X_y^0)$ est constante dans un voisinage de y_0 , f est plat au point x_0 .

Pour prouver (iii), remarquons d'abord que l'ensemble X^0 est localement constructible dans X (9.7.12), donc, par (9.5.5), l'ensemble E des $y \in Y$ tels que $\dim(X_y^0) = \dim(X_{y_0}^0)$ est localement constructible dans Y . Appliquons alors (1.10.1) à E : il suffit de prouver (compte tenu de (i)) que $\dim(X_{y'}^0) = \dim(X_{y_0}^0)$ pour le point générique y' d'une composante irréductible de Y contenant y_0 ; ceci permet déjà de supposer que $Y = \text{Spec}(\mathcal{O}_{Y, y_0})$.

Si on est dans le cas α , on se ramène aussitôt, en vertu de (II, 7.1.9), et utilisant (4.5.13) et (4.4.1) comme dans (15.6.4), au cas où Y est spectre d'un anneau de valuation discrète, y_0 son point fermé et y' son point générique. Mais alors les hypothèses entraînent en vertu de (15.2.2.1), que f est *plat* au point $g(y_0)$, donc aussi dans un voisinage V de ce point dans X (11.1.1). Pour démontrer notre assertion, on peut remplacer X par V , car $V \cap X_{y'}^0$ n'est pas vide en vertu de (2.3.4), donc est un ouvert partout dense dans $X_{y'}^0$ et a par suite même dimension (4.1.1.3); d'ailleurs, comme $X_{y'}^0$ est aussi la composante connexe de $f^{-1}(y')$ contenant $g(y')$, on peut supposer V pris tel que V ne rencontre aucune autre composante irréductible de $f^{-1}(y_0)$ ni de $f^{-1}(y')$, autrement dit on peut supposer que $X^0 = X$; mais alors la conclusion résulte de (12.1.1, (i)), puisque par hypothèse $X_{y_0}^0$ est intègre.

Supposons maintenant qu'on soit dans le cas β). Appliquons cette fois (II, 7.1.4) de la même manière que (II, 7.1.9) dans le cas α) : on est alors ramené au cas où Y est spectre d'un anneau de valuation (non nécessairement discrète), y_0 son point fermé et y' son point générique. En vertu de (14.3.13), il existe une composante irréductible Z de X contenant $X_{y_0}^0$ et dominant Y , et telle que $\dim(Z \cap f^{-1}(y')) = \dim(X_{y_0}^0)$; mais l'hypothèse β) et le fait que $\dim(Z \cap f^{-1}(y')) \leq \dim(f^{-1}(y'))$ montrent que $\dim(X_{y_0}^0) \leq \dim(X_{y'}^0)$ d'où $\dim(X_{y_0}^0) = \dim(X_{y'}^0)$ en vertu de (i).

Reste à prouver (iv). Notons d'abord que les ensembles envisagés ne changent pas lorsqu'on remplace f par $f_{(Y_{\text{red}})} : X \times_Y Y_{\text{red}} \rightarrow Y_{\text{red}}$, la projection $X \times_Y Y_{\text{red}} \rightarrow X$ étant un homéomorphisme. Autrement dit, on peut supposer Y réduit, et alors il résulte de (ii) que f est *plat* aux points de W . Considérons un point x_0 de W et prouvons que W est un voisinage de x_0 ; procédant comme au début de la démonstration, et utilisant aussi (11.2.7), on peut de plus supposer Y *noethérien*; il résulte alors de (ii) et de (15.6.4) que X^0 est un voisinage de x_0 dans X , et de (12.1.1, (vii)) que W est aussi un voisinage de x_0 dans X .

Corollaire (15.6.7). — *Supposons vérifiées les conditions préliminaires de (15.6.6) sur f , et supposons en outre que pour tout $y \in Y$, X_y^0 soit géométriquement intègre sur $\mathbb{k}(y)$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

- a) *La fonction $y \mapsto \dim(X_y^0)$ est localement constante dans Y .*
- b) *Le morphisme $f_{(Y_{\text{red}})} : X \times_Y Y_{\text{red}} \rightarrow Y_{\text{red}}$ déduit de f par changement de base, est plat aux points de X^0 .*

En outre, ces conditions entraînent que X^0 est ouvert dans X . Enfin, lorsque Y est localement noethérien, $a)$ et $b)$ sont aussi équivalentes à

$b')$ f est universellement ouvert aux points de X^0 .

Le fait que $a)$ entraîne $b)$ résulte de (15.6.6, (ii)), ainsi que le fait que X^0 est alors ouvert dans X . Si $b)$ est vérifiée, on peut se borner au cas où Y est réduit et f plat; alors, on se ramène, comme au début de (15.6.6), et en utilisant en outre (11.2.7), au cas où Y est noethérien, cas où la conclusion résulte de (15.6.6, (iii), cas α). L'équivalence de $b)$ et $b')$ a déjà été prouvée lorsque Y est localement noethérien (15.2.2.1), compte tenu de ce que le morphisme $X \times_Y Y_{\text{red}} \rightarrow X$ est un homéomorphisme universel.

Proposition (15.6.8). — Soient $f: X \rightarrow Y$ un morphisme séparé de présentation finie, g une Y -section de X ; pour tout $y \in Y$, soit X_y^0 la composante connexe de $f^{-1}(y)$ qui contient $g(y)$, et soit X^0 la réunion des X_y^0 quand y parcourt Y . Alors, si $y \in Y$ est tel que X_y^0 soit propre sur $\mathbf{k}(y)$, X^0 est propre sur Y au point y (i.e. (15.7.1)), il existe un voisinage ouvert U de y dans Y tel que $X^0 \cap f^{-1}(U)$ soit fermé dans $f^{-1}(U)$ et propre sur U .

Procédant comme au début de (15.6.6) (où on utilise (8.10.5, (v)), et où on remplace (9.7.11) par (9.6.7)), on se ramène au cas où Y est noethérien et f de type fini. On sait alors (9.7.12) que X^0 est localement constructible dans X ; d'autre part, les X_y^0 sont géométriquement connexes (pour tout $z \in Y$) en vertu de (4.5.13); enfin, comme $g(Y) \subset X^0$, X^0 est universellement submersif sur Y (15.7.8). Il suffit alors d'appliquer à X^0 le critère (15.7.9).

Corollaire (15.6.9). — Soit $f: X \rightarrow Y$ un morphisme séparé tel que Y soit localement noethérien et f localement de type fini, ou que f soit de présentation finie. Soit g une Y -section de X , et pour tout $y \in Y$, soit X_y^0 la composante connexe de $f^{-1}(y)$ contenant $g(y)$. Soit y un point de Y tel que X_y^0 soit propre sur $\mathbf{k}(y)$. Alors, pour toute généralisation y' de y , on a $\dim(X_{y'}^0) \geq \dim(X_y^0)$.

Supposons d'abord f de présentation finie; alors en remplaçant au besoin Y par un voisinage de y , on peut supposer que $f|X^0$ est propre (15.6.8), et il suffit d'appliquer (13.1.5) à cette restriction. Si Y est localement noethérien et f localement de type fini, X est localement noethérien; en outre l'hypothèse que X_y^0 soit propre sur $\mathbf{k}(y)$ entraîne que X_y^0 est noethérien; il existe donc un ouvert noethérien $V \subset X$ contenant X_y^0 ; par suite il y a un voisinage ouvert W de y dans Y tel que $g(W) \subset V$. En outre, si z est point maximal de $X_{y'}^0$, on peut supposer que $z \in V$. La restriction de f à $V \cap f^{-1}(W)$ est alors un morphisme de type fini, et $g|W$ une W -section; en appliquant à ce morphisme le résultat déjà obtenu, on voit que si Z est la composante irréductible de $X_{y'}^0$ de point générique z , on a $\dim(Z) \leq \dim(X_y^0)$. Comme z est un point maximal quelconque de $X_{y'}^0$, on a bien $\dim(X_{y'}^0) \leq \dim(X_y^0)$.

Remarques (15.6.10). — (i) L'hypothèse supplémentaire sur l'existence d'une composante irréductible de $X_{y'}^0$ contenant $g(y')$ et de dimension égale à $\dim(X_y^0)$, faite dans (15.6.1), n'est pas superflue, comme le montre l'exemple suivant. Soient A un anneau de valuation discrète, π une uniformisante de A , K le corps des fractions de A , k son corps résiduel. Prenons $Y = \text{Spec}(A)$, et désignons par y et y' le point fermé et le point générique de Y . Considérons les deux Y -schémas suivants : $X_1 = \text{Spec}(A[t])$, $X_2 = \text{Spec}(K[u, v])$, où t, u, v sont des indéterminées (on notera que la projection de X_2 dans Y est donc $\{y'\}$). Dans l'anneau $A[t]$, l'idéal principal $(\pi t - 1)$ est maximal, et correspond donc à un point fermé x_1 de X_1 , qui se projette au point générique y' de Y et est tel que $\mathbf{k}(x_1) = K$.

Considérons d'autre part le point fermé x_2 de X_2 correspondant à l'idéal maximal $\left(u - \frac{1}{\pi}\right) + (v)$ de $K[u, v]$; on a aussi $k(x_2) = K$. Comme on le verra au chap. V, on peut donc recoller X_1 et X_2 le long des deux sous-préschémas fermés Z_1, Z_2 de X_1, X_2 ayant respectivement $\{x_1\}$ et $\{x_2\}$ pour espaces sous-jacents, suivant l'unique Y -isomorphisme de Z_1 sur Z_2 . Désignons par X le Y -préschéma ainsi obtenu, par x le point de X image de x_1 et x_2 . La « section nulle » g de X_1 (II, 1.7.9) est encore alors une Y -section de X ; $f^{-1}(y)$ est égale à $(X_1)_y$, tandis que $f^{-1}(y')$ a deux composantes irréductibles, respectivement isomorphes à $(X_1)_{y'}$ et $(X_2)_{y'}$, ayant un unique point commun x , et de dimensions respectives 1 et 2. Voir cependant la prop. (15.6.9).

(ii) Considérons le morphisme f défini dans (12.2.3, (ii)), qui est propre et plat; en outre, la restriction de f à $X_1 \cap f_0^{-1}(Y)$ est un isomorphisme, donc le morphisme réciproque $g : Y \rightarrow X$ est une Y -section de X . On a alors $\dim(X_{y_0}) = 1$ tandis que $\dim(X_y^0) = 0$ pour $y \neq y_0$, bien que X_y^0 soit géométriquement irréductible pour tout $y \in Y$ (mais $X_{y_0}^0$ n'est pas réduit); on voit donc que dans (15.6.6, (iii)), on ne peut supprimer les hypothèses α et β). En outre, X^0 n'est pas un voisinage de $X_{y_0}^0$, ce qui prouve que dans (15.6.4), on ne peut se dispenser de l'hypothèse que X^y est réduit.

(iii) Au chap. VI, nous appliquerons les résultats précédents aux Y -préschémas en groupes localement de type fini sur un préschéma localement noethérien Y . Si G est un tel préschéma, il existe une Y -section canonique g , la « section unité », et l'on montre que G_y est toujours géométriquement irréductible et que l'on a $\dim(G_y^0) = \dim(G_y)$, en posant $G_y = f^{-1}(y)$. Il résultera donc de (15.6.2) et (15.6.3) que la fonction $z \mapsto \dim(G_z)$ est semi-continue supérieurement, et que si elle est constante au voisinage d'un point y , f est universellement ouvert aux points de G_y^0 . Si de plus G_y est géométriquement réduit sur $k(y)$ en un de ses points, on montre que G_y est lisse (6.8.1) sur $k(y)$ en tous ses points; il résultera alors de (15.6.6) que si de plus \mathcal{O}_y est réduit, alors f est lisse en tous les points de G_y^0 (mais pas nécessairement en tous les points de G_y). Ces résultats s'appliqueront par exemple dans la théorie de schémas de Picard, où nous disposerons d'un théorème général assurant que, sous certaines conditions, la fonction $z \mapsto \dim(G_z)$ est localement constante. Remarquons que c'est en vue d'applications de cette nature que les énoncés tels que (15.6.1) sont donnés pour les morphismes localement de type fini, et non seulement pour les morphismes de type fini.

On notera aussi que dans le cas d'un Y -préschéma en groupes G , l'hypothèse β de (15.6.6) est toujours vérifiée.

15.7. Appendice : Critères valuatifs de propreté locale.

Ce numéro donne des compléments au critère valuatif de propreté démontré dans (II, 7.3.10); il est indépendant du reste du § 15.

Définition (15.7.1). — Soient $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de préschémas, y un point de Y . On dit que f est propre au point y s'il existe un voisinage ouvert U de y dans Y tel que la restriction $f^{-1}(U) \rightarrow U$ de f soit un morphisme propre. On dit qu'une partie Z de X est propre sur Y au point y s'il existe un voisinage ouvert U de y tel que $Z \cap f^{-1}(U)$ soit fermée dans $f^{-1}(U)$ et propre sur U (II, 5.4.10) (ce qui revient à dire que pour tout sous-préschéma fermé de X ayant Z pour espace sous-jacent, la restriction $Z \rightarrow Y$ de f à Z est propre au point y).

Soit $g : Y' \rightarrow Y$ un morphisme quelconque; posons $X' = X \times_Y Y'$, $f' = f_{(Y')}$ et, si $p : X' \rightarrow X$ est la projection canonique, $Z' = p^{-1}(Z)$. Alors, si Z est propre sur Y au point y , Z' est propre sur Y' en tout point y' au-dessus de y (II, 5.4.2).

Proposition (15.7.2). — Soient Y un préschéma intègre localement noethérien, X un préschéma intègre, $f : X \rightarrow Y$ un morphisme séparé, dominant et de type fini, y un point de Y . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) f est propre au point y .
- b) Si $Y_1 = \text{Spec}(\mathcal{O}_y)$, $X_1 = X \times_Y Y_1$, le morphisme $f_1 = f_{(Y_1)} : X_1 \rightarrow Y_1$ est propre.
- c) Tout anneau de valuation discrète ayant $R(X)$ pour corps des fractions et dominant \mathcal{O} domine un anneau local \mathcal{O}_x de X (auquel cas on a nécessairement $f(x) = y$).

Le fait que $a)$ implique $b)$ résulte de (II, 5.4.2), et l'implication $b) \Rightarrow c)$ résulte de (II, 7.3.10). Reste donc à montrer que $c)$ entraîne $a)$. La question étant locale sur Y , on peut supposer Y affine, donc noethérien. En vertu du lemme de Chow (II, 5.6.1), il existe un préschéma intègre X' , un morphisme projectif $p : P \rightarrow Y$, une immersion ouverte dominante $j : X' \rightarrow P$, et un morphisme projectif et birationnel (donc surjectif) $g : X' \rightarrow X$ tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} P & \xleftarrow{j} & X' \\ p \downarrow & & \downarrow g \\ Y & \xleftarrow{\quad} & X \end{array}$$

soit commutatif. Comme X' est intègre et j dominant, P est irréductible, et l'on peut, en remplaçant p par p_{red} , supposer P intègre (I, 5.2.2 et II, 5.5.5, (vi)). Tout revient à prouver qu'il existe un voisinage ouvert U de y tel que $p^{-1}(U) \subset j(X')$, car alors la restriction de j à $j^{-1}(p^{-1}(U)) = g^{-1}(f^{-1}(U)) = V$ sera un isomorphisme sur $p^{-1}(U)$, donc la restriction $V \rightarrow U$ de $f \circ g$ sera propre, et comme la restriction $V \rightarrow f^{-1}(U)$ de g est surjective, la restriction $f^{-1}(U) \rightarrow U$ sera propre (II, 5.4.3). Comme $T = P - j(X')$ est fermé dans P , $p(T)$ est fermé dans Y , et il suffit de montrer que $y \notin p(T)$, ou encore que tout $z' \in P$ tel que $p(z') = y$ appartient à $j(X')$. Or, le corps des fractions rationnelles $R(P)$ est égal à $R(X')$, donc à $R(X)$ par construction; comme on peut se borner au cas où z' n'est pas le point générique de P , il existe un anneau de valuation discrète A ayant $R(X)$ pour corps des fractions et dominant $\mathcal{O}_{z'}$ (II, 7.1.7); comme $p(z') = y$, A domine aussi \mathcal{O}_y , donc par hypothèse il existe un $x \in X$ tel que $f(x) = y$ et que A domine \mathcal{O}_x . Comme g est propre, il existe $x' \in X'$ tel que $g(x') = x$ et que A domine $\mathcal{O}_{x'}$ (II, 7.3.10); donc z' et $j(x')$ sont deux points de P dont les anneaux locaux $\mathcal{O}_{z'}$ et $\mathcal{O}_{j(x')} = \mathcal{O}_{x'}$ sont apparentés (I, 8.1.4); comme P est un schéma, cela entraîne $z' = j(x')$ (I, 8.2.2), ce qui achève la démonstration.

Remarque (15.7.3). — On peut dans (15.7.2) supprimer l'hypothèse que Y est localement noethérien, en remplaçant dans la condition $c)$ les anneaux de valuation discrète par des anneaux de valuation quelconque; la démonstration est alors inchangée, compte tenu de (II, 7.3.10).

Corollaire (15.7.4). — Soient Y un préschéma noethérien, $f : X \rightarrow Y$ un morphisme séparé de type fini, Z une partie de X tel que les points maximaux de son adhérence \bar{Z} appartiennent à Z (ce qui est le cas lorsque Z est fini, ou lorsque Z est constructible (0_{III}, 9.2.2)). Soit y un point de Y . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- L'ensemble \bar{Z} est propre sur Y au point y .
- Si $Y_1 = \text{Spec}(\mathcal{O}_y)$, $X_1 = X \times_Y Y_1$, et si $g_1 : X_1 \rightarrow X$ est la projection canonique et $Z_1 = g_1^{-1}(Z)$, l'adhérence \bar{Z}_1 de Z_1 dans X_1 est propre sur Y_1 .
- Pour tout schéma $Y' = \text{Spec}(A')$, où A' est un anneau de valuation discrète, et tout morphisme $g : Y' \rightarrow Y$, tel que l'image $g(y')$ du point fermé y' de Y' soit y , on a la propriété suivante : posant $X' = X \times_Y Y'$, $f' = f_{(Y')} : X' \rightarrow Y'$, $g' = g_{(X)} : X' \rightarrow X$, $Z' = g'^{-1}(Z)$, et désignant par η'

le point générique de Y' , alors, pour tout point $x' \in Z' \cap f'^{-1}(\eta')$ rationnel sur $\mathbf{k}(\eta')$, il existe une Y' -section de X' contenant x' .

Le fait que $a)$ entraîne $b)$ résulte de ce que $\bar{Z}_1 \subset g_1^{-1}(\bar{Z})$ et de ce que $g_1^{-1}(\bar{Z})$ est propre sur Y_1 (15.7.1). Le fait que $b)$ entraîne $c)$ résulte de (II, 7.3.3). Reste donc à voir que $c)$ implique $a)$. Il suffit évidemment de prouver que toute composante irréductible de \bar{Z} est propre sur Y au point y , et l'hypothèse permet donc de se borner au cas où Z est réduit à un seul point z . On peut évidemment aussi, compte tenu de (I, 5.2.2) et (II, 5.4.6), supposer que X et Y sont réduits, puis (par définition d'une partie propre (II, 5.4.10)) supposer que $\bar{Z} = X = \{\bar{z}\}$ et (appliquant encore (I, 5.2.2)) que f est dominant, donc X et Y intègres et noethériens; il faut alors prouver que f est propre au point y de Y . Montrons pour cela que f vérifie la condition $c)$ de (15.7.2). Soit A' un anneau de valuation discrète ayant $R(X) = \mathbf{k}(z)$ pour corps des fractions et dominant \mathcal{O}_y ; avec les notations de $c)$, on a donc $g(y') = y$, et $g(\eta')$ est le point générique $\eta = f(z)$ de Y . Comme par définition $\mathbf{k}(\eta') = \mathbf{k}(z)$, il existe un $\mathbf{k}(\eta)$ -morphisme $\text{Spec}(\mathbf{k}(\eta')) \rightarrow \text{Spec}(\mathbf{k}(z))$ transformant η' en z , donc une $\mathbf{k}(\eta')$ -section de $f'^{-1}(\eta')$ (I, 3.3.14); si z' est l'image de η' par cette section, z' est donc rationnel sur $\mathbf{k}(\eta')$ et $g'(z') = z$. On conclut donc de l'hypothèse $c)$ qu'il existe une Y' -section h' de X' telle que $h'(\eta') = z'$; soit $h = g' \circ h' : Y' \rightarrow X$ le Y -morphisme correspondant, et soit $x = h(y')$; il est clair que $f(x) = y$ et que $A' = \mathcal{O}_{y'}$ domine \mathcal{O}_x , ce qui achève la démonstration.

Corollaire (15.7.5). — Soient Y un préschéma localement noethérien, $f : X \rightarrow Y$ un morphisme séparé de type fini, y un point de Y . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- f est propre au point y .
- Si $Y_1 = \text{Spec}(\mathcal{O}_y)$, $X_1 = X \times_Y Y_1$, le morphisme $f_1 = f_{(Y_1)} : X_1 \rightarrow Y_1$ est propre.
- Pour tout schéma $Y' = \text{Spec}(A')$, où A' est un anneau de valuation discrète, et tout morphisme $g : Y' \rightarrow Y$, tel que l'image $g(y')$ du point fermé y' de Y' soit y , on a la propriété suivante : posant $X' = X \times_Y Y'$, $f' = f_{(Y')} : X' \rightarrow Y'$ et désignant par η' le point générique de Y' , alors, pour tout $x' \in f'^{-1}(\eta')$, rationnel sur $\mathbf{k}(\eta')$, il existe une Y' -section de X' contenant x' .

Corollaire (15.7.6). — Soient Y un préschéma localement noethérien, $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de type fini. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- Il existe un morphisme propre $g : X \rightarrow Z$ et une immersion $h : Z \rightarrow Y$ tels que $f = h \circ g$.
- Le sous-espace $f(X)$ est localement fermé dans Y , et si Z' est le sous-préschéma de Y image fermée de X par f (I, 9.5.3 et 9.5.1), et Z'' le préschéma induit par Z' sur l'ouvert $f(X)$ de Z' , de sorte que f se factorise de façon unique en $f = j \circ g$ (où $j : Z'' \rightarrow Y$ est l'injection canonique), alors $g : X \rightarrow Z''$ est propre.
- Pour tout $y \in f(X)$, f est propre au point y .
- Pour tout schéma $Y' = \text{Spec}(A')$, où A' est un anneau de valuation discrète, et tout morphisme $g : Y' \rightarrow Y$ tel que $g(Y') \subset f(X)$, toute Y' -section rationnelle (I, 7.1.2) de $X' = X \times_Y Y'$ se prolonge de façon unique en une Y' -section de X' .

Il est clair que $b)$ entraîne $a)$. Pour voir que $a)$ entraîne $c)$, remarquons d'abord que $a)$ entraîne que $h(Z)$ est localement fermé dans Y et $g(X)$ fermé dans Z , donc $f(X)$ est localement fermé dans Y ; pour tout $y \in f(X)$, il y a par suite un voisinage ouvert U

de y dans Y tel que $f(X) \cap U$ soit fermé dans U ; alors la restriction $h^{-1}(U) \rightarrow U$ de h est une immersion fermée, et la restriction $f^{-1}(U) = g^{-1}(h^{-1}(U)) \rightarrow h^{-1}(U)$ de g est propre, donc la restriction $f^{-1}(U) \rightarrow U$ de f est propre (II, 5.4.2). Pour voir que c) entraîne b), notons d'abord que, pour tout $y \in f(X)$, il existe, en vertu de c), un voisinage ouvert U de y dans Y tel que $f(X) \cap U$ soit fermé dans U , donc $f(X)$ est localement fermé, et par suite ouvert dans son adhérence. Comme cette dernière est l'espace sous-jacent de Z' , et que f se factorise en $f = j_0 \circ g_0$, où $j_0 : Z' \rightarrow Y$ est l'injection canonique et g_0 est un morphisme de X dans Z' , le fait que $g_0(X) = Z''$ (qui est ouvert dans Z') entraîne la factorisation de l'énoncé de b); le fait que g est propre résulte alors du caractère local (sur Z'') de cette propriété, et de (II, 5.4.3). Il est clair que c) implique d) en vertu de (15.7.5), l'unicité du prolongement d'une Y' -section rationnelle résultant de l'hypothèse que f est séparé (I, 7.2.2). Prouvons enfin que d) entraîne c); en premier lieu, il résulte de d), compte tenu de (II, 7.2.3 et 7.2.4), que f est séparé; on peut alors appliquer le critère (15.7.5, c)), qui montre que f est propre en tout point de $f(X)$.

Remarques (15.7.7). — (i) Dans (15.7.4, c)), (15.7.5, c)) et (15.7.6, d)), on peut se restreindre au cas où l'anneau de valuation discrète A' est *complet* et admet un corps résiduel *algébriquement clos*. En effet, dans la démonstration de (15.7.4), si l'on considère un anneau de valuation discrète A'' complet dominant A' et ayant un corps résiduel algébriquement clos (0_{III}, 10.3.1), l'hypothèse c) est alors vérifiée pour $Y'' = \text{Spec}(A'')$, $X'' = X \times_Y Y''$ et $f'' = f_{(Y'')}$; mais $X'' = X' \times_{Y'} Y''$, et il résulte alors de la remarque (II, 7.3.9, (i)) que f'' est propre; par suite Y' , X' et f' vérifient aussi l'hypothèse c) (II, 7.3.8).

(ii) Compte tenu de (II, 7.3.8), la condition c) de (15.7.5) peut se remplacer par la condition que f' est *propre*.

(15.7.8). On dit qu'un morphisme de préschémas $f : X \rightarrow Y$ est *submersif* s'il est surjectif et si la topologie de Y est égale au quotient de la topologie de X par la relation d'équivalence définie par f . On dit que f est *universellement submersif* si pour tout changement de base $Y' \rightarrow Y$, le morphisme $f' = f_{(Y')}$: $X \times_Y Y' \rightarrow Y'$ est submersif. Tout morphisme surjectif *universellement ouvert*, ou *universellement fermé*, ou *fidèlement plat et quasi-compact* est universellement submersif (2.3.12). Étant donné un morphisme $f : X \rightarrow Y$, on dit qu'un sous-ensemble Z de X est *submersif sur $f(Z)$* si la topologie du sous-espace $f(Z)$ de Y est quotient de la topologie du sous-espace Z de X par la relation d'équivalence définie par $f|_Z$. On dit que Z est *universellement submersif sur $f(Z)$* si, pour tout changement de base $g : Y' \rightarrow Y$, l'image réciproque $Z' = p^{-1}(Z)$ de Z par la projection $p : X \times_Y Y' \rightarrow Y'$ est un ensemble submersif sur $f'(Z') = g^{-1}(f(Z))$. On notera que si le morphisme f admet une Y -section $h : Y \rightarrow X$, tout ensemble Z contenant $h(Y)$ est *universellement submersif sur Y* .

Proposition (15.7.9). — Soient Y un préschéma localement noethérien, y un point de Y , $f : X \rightarrow Y$ un morphisme séparé de type fini. Soit Z une partie localement constructible de X ayant les propriétés suivantes :

(i) Pour toute généralisation y' de y , $Z_{y'} = Z \cap f^{-1}(y')$ est une composante connexe de $f^{-1}(y')$ et est géométriquement connexe sur $\mathbf{k}(y')$ (4.5.2).

(ii) Z_y est propre sur $\text{Spec}(\mathbf{k}(y))$.

(iii) Z est universellement submersif sur $f(Z)$ (15.7.8).

Alors Z est propre sur Y au point y (autrement dit (15.7.1) il existe un voisinage ouvert U de y tel que $Z \cap f^{-1}(U)$ soit fermé dans $f^{-1}(U)$ et propre sur U).

Utilisant la méthode de (8.1.2, a) et (8.10.5, (xii)), on est ramené à prouver que lorsque $Y = \text{Spec}(A)$ est spectre d'un anneau local noethérien, les hypothèses (i), (ii) et (iii) entraînent que Z est propre sur Y .

Notons d'abord que si A' est un anneau local noethérien, $\varphi : A \rightarrow A'$ un homomorphisme local, $Y' = \text{Spec}(A')$ et $g : Y' \rightarrow Y$ le morphisme correspondant à φ , l'image réciproque Z' de Z par la projection canonique $p : X \times_Y Y' \rightarrow X$ a vis-à-vis de Y' les propriétés (i), (ii), (iii) de l'énoncé, compte tenu de (1.8.2); utilisant (2.7.1, (vii)), il revient donc au même de démontrer que Z' est propre sur Y' , pourvu que A' soit un A -module fidèlement plat. Nous allons utiliser cette remarque en prenant $A' = \hat{A}$ (0_I, 7.3.5), autrement dit nous pouvons nous borner au cas où A est complet. Comme Z_y est une composante connexe de $f^{-1}(y)$, propre sur $\mathbf{k}(y)$, il résulte de (III, 5.5.2) que X est somme de deux sous-préschémas X_0, X_1 induits sur des parties ouvertes et fermées de X , telles que X_0 soit propre sur Y et que $X_0 \cap f^{-1}(y) = Z_y$. Posons $Z_0 = X_0 \cap Z$, $Z_1 = X_1 \cap Z$, de sorte que ces ensembles forment une partition de Z en deux parties ouvertes et fermées dans Z . Comme les Z_y sont connexes, on a nécessairement $Z_y \subset Z_0$ ou $Z_y \subset Z_1$, donc $f(Z_0) \cap f(Z_1) = \emptyset$. Mais comme Z_0 et Z_1 sont saturés pour la relation d'équivalence définie par $f|Z$, il résulte de (iii) que $f(Z_0)$ et $f(Z_1)$ sont ouverts dans $f(Z)$. Mais $f(Z_0)$ contient y , et tout voisinage de y dans Y est égal à Y , donc $f(Z_0) = f(Z)$, et par suite $f(Z_1) = \emptyset$, donc $Z_1 = \emptyset$ et $Z \subset X_0$.

On peut donc désormais supposer de plus que f est propre, et il reste à prouver que Z est fermé dans X . Autrement dit, il suffira de prouver qu'une partie constructible Z d'un préschéma X propre sur Y qui satisfait aux deux seules conditions (i) et (iii), est fermée dans X . En vertu de (0_{III}, 9.2.5), il suffit donc de prouver que pour tout $x' \in Z$ et toute spécialisation x de x' dans X , on a $x \in Z$. Soient A_1 un anneau de valuation discrète complet, u un morphisme de $Y_1 = \text{Spec}(A_1)$ dans X tel que, si y_1 et y'_1 sont le point fermé et le point générique de Y_1 , on ait $u(y_1) = x$, $u(y'_1) = x'$ (II, 7.1.7); posons $g = f \circ u : Y_1 \rightarrow Y$ et $X_1 = X \times_Y Y_1$; il existe une Y_1 -section $u_1 : Y_1 \rightarrow X_1$ de $f_1 = f|_{Y_1}$ telle que $u = p \circ u_1$, où $p : X_1 \rightarrow X$ est la projection canonique. Si $x_1 = u_1(y_1)$, $x'_1 = u_1(y'_1)$, on a donc $p(x_1) = x$ et $p(x'_1) = x'$, et x_1 est une spécialisation de x'_1 . En outre, on a $x'_1 \in Z_1 = p^{-1}(Z)$; comme nous avons remarqué que les conditions (i) et (iii) sont stables pour tout changement de base, ainsi que la propriété d'être constructible, on voit qu'on est ramené à la situation suivante : Y est le spectre d'un anneau de valuation discrète complet, X est propre sur Y , $f(x) = y$ est le point fermé de Y , $y' = f(x')$ son point générique, il existe une Y -section h de X telle que $h(y) = x$, $h(y') = x'$, et enfin on a $x' \in Z$; il faut prouver que $x \in Z$. Or, Z_y est une composante connexe de $f^{-1}(y)$, propre sur $\text{Spec}(\mathbf{k}(y))$ puisque X est propre sur Y . Appliquant de nouveau (III, 5.5.2), on voit comme plus haut qu'il y a une partie ouverte et fermée X' de X telle que $X' \cap f^{-1}(y) = Z_y$; comme Z_y est connexe,

on peut supposer X' connexe (en remplaçant au besoin X' par celle de ses composantes connexes contenant Z_y). Mais alors le même raisonnement qu'au début prouve qu'on a nécessairement $Z \subset X'$; comme $h(Y)$ est connexe et contient x' , il est nécessairement contenu dans X' , donc $x = h(y) \in X' \cap f^{-1}(y) = Z_y$. C.Q.F.D.

Corollaire (15.7.10). — Soient Y un préschéma localement noethérien, $f : X \rightarrow Y$ un morphisme séparé de type fini, universellement submersif (15.7.8) et tel que toutes les fibres $X_y = f^{-1}(y)$ soient géométriquement connexes. Alors, si $y \in Y$ est tel que X_y soit propre sur $k(y)$, f est propre au point y .

Compte tenu de (15.7.5), on est ramené au cas où $Y = \text{Spec}(\mathcal{O}_y)$ puisque les hypothèses sont stables par changement de base. Mais dans ce cas il suffit d'appliquer (15.7.9) à $Z = X$.

Corollaire (15.7.11). — Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme séparé de présentation finie; supposons qu'il existe un morphisme surjectif de présentation finie $g : Y' \rightarrow Y$, qui soit en outre propre ou plat, et tel que si l'on pose $X' = X \times_Y Y'$, il existe une Y' -section de X' (ou encore un Y' -morphisme $Y' \rightarrow X'$ (I, 3.3.14)). Supposons enfin que les fibres $X_y = f^{-1}(y)$ soient géométriquement connexes. Alors l'ensemble U des $y \in Y$ tels que X_y soit propre sur $k(y)$ est ouvert dans Y , et la restriction $f^{-1}(U) \rightarrow U$ de f est propre.

La question étant locale sur Y , on peut supposer $Y = \text{Spec}(A)$ affine. Appliquant (8.9.1) à f et à g , on voit qu'il existe un sous-anneau noethérien A_0 de A et deux morphismes de type fini $f_0 : X_0 \rightarrow Y_0 = \text{Spec}(A_0)$, $g_0 : Y'_0 \rightarrow Y_0$ tels que $X = X_0 \times_{Y_0} Y$, $Y' = Y'_0 \times_{Y_0} Y$, $f = (f_0)_{(Y)}$ et $g = (g_0)_{(Y)}$; en outre, utilisant (8.10.5, (v), (vi) et (xii)) et (11.2.7), on peut supposer f_0 séparé, g_0 surjectif et propre (resp. plat) si g est propre (resp. plat); utilisant (8.8.2), on peut de plus supposer qu'il existe une Y'_0 -section de X_0 . D'autre part, utilisant (9.7.7), on peut appliquer (9.3.3) à la propriété d'être géométriquement connexe, et on peut donc supposer A_0 choisi de sorte que les $f_0^{-1}(y_0)$ soient géométriquement connexes pour tout $y_0 \in Y_0$. Enfin, utilisant (2.7.1, (vii)), il revient au même de dire que $f^{-1}(y)$ est propre sur $k(y)$ ou que $f_0^{-1}(y_0)$ est propre sur $k(y_0)$, où y_0 est la projection de y dans Y_0 . Ces remarques montrent qu'on est ramené à démontrer le corollaire lorsque Y est noethérien. Notons maintenant le

Lemme (15.7.11.1). — Soient $f : X \rightarrow Y$ un morphisme, $g : Y' \rightarrow Y$ un morphisme surjectif, qui est en outre propre ou plat et quasi-compact. Posons $X' = X \times_Y Y'$, $f' = f_{(Y')} : X' \rightarrow Y'$. Alors, si f' est submersif (resp. universellement submersif), il en est de même de f .

On peut se borner au cas où f' est submersif. En effet, supposons le lemme prouvé dans ce cas, et montrons que si f' est universellement submersif, f l'est aussi. Soit donc $Y_1 \rightarrow Y$ un morphisme quelconque, et posons $Y'_1 = Y' \times_Y Y_1$; si $X'_1 = X' \times_{Y'} Y'_1$ et $f'_1 = (f')_{(Y'_1)} : X'_1 \rightarrow Y'_1$, f'_1 est submersif par hypothèse; de plus le morphisme $g_1 : Y'_1 \rightarrow Y_1$ est surjectif, et propre (resp. plat et quasi-compact) si g l'est. Donc, si l'on pose $X_1 = X \times_Y Y_1$, $f_1 = f_{(Y_1)}$, il résulte de l'hypothèse et du fait que $X'_1 = X_1 \times_{Y_1} Y'_1$, que f_1 est submersif, donc f universellement submersif. Supposons donc seulement que f' soit submersif. Il est clair tout d'abord que f est surjectif. Soit E une partie de Y telle que $f^{-1}(E)$ soit fermé dans X ; alors, si $p : X' \rightarrow X$ est la projection cano-

nique, $p^{-1}(f^{-1}(E)) = f'^{-1}(g^{-1}(E))$ est fermé dans X' , donc, puisque f' est submersif, $g^{-1}(E)$ est fermé dans Y' ; mais comme g est aussi universellement submersif (15.7.8), E est fermé dans Y , ce qui prouve le lemme.

Cela étant, comme il existe par hypothèse une Y' -section de X' , f' est universellement submersif (15.7.8), donc il en est de même de f d'après le lemme (15.7.11.1). Il suffit alors d'appliquer (15.7.10), en remarquant que l'ensemble des $y \in Y$ tels que f soit propre en y est par définition ouvert dans Y .

(A suivre.)

BIBLIOGRAPHIE (*suite*)

[39] J.-P. SERRE, *Corps locaux*, Paris (Hermann), 1962.

[40] J.-P. SERRE, Groupes proalgébriques, *Publ. Inst. Hautes Études Sci.*, n° 7 (1960).

INDEX DES NOTATIONS

- $\mathcal{C}(X)$, $\mathcal{D}c(X)$, $\mathfrak{F}c(X)$, $\mathfrak{L}\mathfrak{F}c(X)$ (X préschéma) : 8.3.9.
 $\mathcal{Q}(\mathcal{F})$ (\mathcal{F} \mathcal{O}_X -Module) : 8.5.10.
 $\mathcal{S}pr(Y)$, $\mathcal{S}pro(Y)$, $\mathcal{S}prf(Y)$ (Y préschéma) : 8.6.1.
Pro(C) (C catégorie) : 8.13.3.
 X_s , \mathcal{F}_s , u_s , g_s , Z_s , h_s (X S -préschéma, $s \in S$, \mathcal{F} \mathcal{O}_X -Module, u homomorphisme de \mathcal{O}_X -Modules, g section de \mathcal{O}_X -Module, Z partie de X , $h : X \rightarrow Y$ S -morphisme) : 9.4.1.
 $\mathcal{D}c(X)$, $\mathfrak{L}q(X)$, $\mathcal{D}(X)$, $\mathfrak{F}(X)$, $\mathfrak{L}f(X)$, $\mathfrak{L}c(X)$ (X espace topologique) : 10.1.1.
 $\text{prof}_x^*(\mathcal{F})$, $\text{prof}_2^*(\mathcal{F})$, $\text{prof}^*(\mathcal{F})$ (\mathcal{F} \mathcal{O}_X -Module) : 10.8.1.
 $S(X)$ (X préschéma de Jacobson) : 10.9.1.
 $S(f)$ (f morphisme de préschémas de Jacobson) : 10.9.2.
 $\text{Spm}(A)$, $D^m(h)$ (A anneau de Jacobson, $h \in A$) : 10.9.3.
 $\text{Tor.dim}_B(M)$ (M B -module) : 12.3.2.
-

INDEX TERMINOLOGIQUE

- Critère de platitude par fibres : 11.3.10.
Espace algébrique sur k , espace k -algébrique, espace préalgébrique sur k , espace k -préalgébrique : 10.10.2.
Espace de Jacobson : 10.3.1.
Espace k -préalgébrique réduit : 10.10.4.
Famille de morphismes schématiquement dominante : 11.10.2.
Famille de morphismes universellement schématiquement dominante : 11.10.7.
Famille de sous-préschémas schématiquement dense : 11.10.2.
Famille séparante d'homomorphismes de faisceaux de modules : 11.9.1.
Famille séparante d'homomorphismes de modules : 11.9.4.
Famille universellement séparante d'homomorphismes de faisceaux de modules : 11.9.14.
Géométriquement isomorphes (k -préschémas) : 9.1.4.
Homomorphisme de Modules universellement injectif : 11.9.14 et 11.9.18.
Lemme de Chow pour les morphismes de présentation finie : 8.10.5.1.
« Main theorem » de Zariski pour les morphismes de présentation finie : 8.12.6.
Morphisme équidimensionnel en un point, morphisme équidimensionnel : 13.2.2 et 13.3.2.
Morphisme propre en un point : 15.7.1.
Morphisme pseudo-fini : 8.12.3.
Morphisme submersif, morphisme universellement submersif : 15.7.8.
Morphisme universellement ouvert en un point : 14.3.3.
Ouvert ultraaffine : 10.9.5.
Partie finie saturée d'un k -préschéma algébrique : 9.8.9.
Partie propre en un point (d'un S -préschéma) : 15.7.1.
Partie quasi-constructible, partie localement quasi-constructible d'un espace topologique : 10.1.1.
Partie très dense d'un espace topologique : 10.1.3.
Polynôme géométriquement irréductible : 9.7.4.
Préschéma de Jacobson : 10.4.1.
Préschéma équidimensionnel sur un autre en un point, équidimensionnel sur un autre : 13.2.2 et 13.3.2.
Préschéma essentiellement affine sur un autre : 8.13.4.
Principe de l'extension finie : 9.1.1.
Profondeur rectifiée : 10.8.1.
Pro-objet, morphisme de pro-objets : 8.13.3.
Pro-objet essentiellement affine : 8.13.4, 8.14.1.
Propriété constructible, propriété ind-constructible : 9.2.1 et 9.2.2, (i) et (ii).
Quasi-homéomorphisme d'espaces topologiques : 10.2.2.
Quasi-isomorphisme d'espaces annelés : 10.2.8.
Saturée d'une partie finie d'un k -préschéma algébrique : 9.8.9.
Sous-ensemble d'un S -préschéma submersif, universellement submersif sur son image : 15.7.8.
Squelette primaire d'un Module, squelette virtuel : 9.8.9.
Spectre maximal d'un anneau de Jacobson : 10.9.3.
Type primaire d'un Module, type primaire géométrique d'un Module : 9.8.9.
Ultrapréschéma, morphisme d'ultrapréschémas : 10.9.5.
R-ultrapréschéma : 10.10.2.
-

TABLE DES MATIÈRES

	PAGES
CHAPITRE IV. — Étude locale des schémas et des morphismes de schémas (<i>suite</i>)	5
§ 8. Limites projectives de préschémas	5
8.1. Introduction.....	5
8.2. Limites projectives de préschémas	7
8.3. Parties constructibles dans une limite projective de préschémas.	12
8.4. Critères d'irréductibilité et de connexion pour les limites projectives de préschémas.....	17
8.5. Modules de présentation finie sur une limite projective de préschémas.....	19
8.6. Sous-préschémas de présentation finie d'une limite projective de préschémas	25
8.7. Critères pour qu'une limite projective de préschémas soit un préschéma réduit (resp. intègre)	27
8.8. Préschémas de présentation finie sur une limite projective de préschémas.....	28
8.9. Premières applications à l'élimination des hypothèses noethériennes	34
8.10. Propriétés de permanence des morphismes par passage à la limite projective	36
8.11. Application aux morphismes quasi-finis.....	41
8.12. Nouvelle démonstration et généralisation du « Main Theorem » de Zariski.....	43
8.13. Traduction en termes de pro-objets.....	49
8.14. Caractérisation d'un préschéma localement de présentation finie sur un autre, en termes du foncteur qu'il représente.....	52
§ 9. Propriétés constructibles	54
9.1. Le principe de l'extension finie.....	54
9.2. Propriétés constructibles et ind-constructibles.....	56
9.3. Propriétés constructibles de morphismes de préschémas algébriques	60

	PAGES
9.4. Constructibilité de certaines propriétés des Modules	62
9.5. Constructibilité de propriétés topologiques	67
9.6. Constructibilité de certaines propriétés des morphismes	71
9.7. Constructibilité des propriétés de séparabilité, d'irréductibilité géométrique et de connexité géométrique	76
9.8. Décomposition primaire au voisinage d'une fibre générique	83
9.9. Constructibilité des propriétés locales des fibres	88
§ 10. Préschémas de Jacobson	95
10.1. Parties très denses d'un espace topologique	95
10.2. Quasi-homéomorphismes	97
10.3. Espaces de Jacobson	101
10.4. Préschémas de Jacobson et anneaux de Jacobson	101
10.5. Préschémas de Jacobson noethériens	104
10.6. Dimension dans les préschémas de Jacobson	107
10.7. Exemples et contre-exemples	109
10.8. Profondeur rectifiée	110
10.9. Spectres maximaux et ultrapréschémas	112
10.10. Espaces algébriques de Serre	114
§ 11. Propriétés topologiques des morphismes plats de présentation finie. Critères de platitude	116
11.1. Ensembles de platitude (cas noethérien)	117
11.2. Platitude d'une limite projective de préschémas	119
11.3. Application à l'élimination d'hypothèses noethériennes	132
11.4. Descente de la platitude par des morphismes quelconques : cas d'un préschéma de base artinien	143
11.5. Descente de la platitude par des morphismes quelconques : cas général	150
11.6. Descente de la platitude par des morphismes quelconques : cas d'un préschéma de base unibranche	154
11.7. Contre-exemples	157
11.8. Un critère valuatif de platitude	159
11.9. Familles séparantes et universellement séparantes d'homomor- phismes de faisceaux de modules	160
11.10. Familles schématiquement dominantes de morphismes et familles schématiquement denses de sous-préschémas	170
§ 12. Étude des fibres des morphismes plats de présentation finie	173
12.0. Introduction	173
12.1. Propriétés locales des fibres d'un morphisme plat localement de présentation finie	174

12.2.	Propriétés locales et globales des fibres d'un morphisme propre, plat et de présentation finie	179
12.3.	Propriétés cohomologiques locales des fibres d'un morphisme plat et localement de présentation finie	183
§ 13.	Morphismes équidimensionnels	187
13.1.	Le théorème de semi-continuité de Chevalley	188
13.2.	Morphismes équidimensionnels : cas des morphismes dominants de préschémas irréductibles	190
13.3.	Morphismes équidimensionnels : cas général	194
§ 14.	Morphismes universellement ouverts	199
14.1.	Morphismes ouverts	200
14.2.	Morphismes ouverts et formule des dimensions	202
14.3.	Morphismes universellement ouverts	204
14.4.	Le critère de Chevalley pour les morphismes universellement ouverts	209
14.5.	Morphismes universellement ouverts et quasi-sections	216
§ 15.	Étude des fibres d'un morphisme universellement ouvert ...	223
15.1.	Multiplicités des fibres d'un morphisme universellement ouvert.	223
15.2.	Platitude des morphismes universellement ouverts à fibres géométriquement réduites	226
15.3.	Application : critères de réduction et d'irréductibilité	228
15.4.	Compléments sur les morphismes de Cohen-Macaulay	229
15.5.	Rang séparable des fibres d'un morphisme quasi-fini et universellement ouvert. Application aux composantes connexes géométriques des fibres d'un morphisme propre	231
15.6.	Composantes connexes des fibres le long d'une section	236
15.7.	Appendice : Critères valuatifs de propreté locale	242
BIBLIOGRAPHIE (<i>suite</i>)		249
INDEX DES NOTATIONS		250
INDEX TERMINOLOGIQUE		251

Manuscrit reçu le 15 novembre 1964.